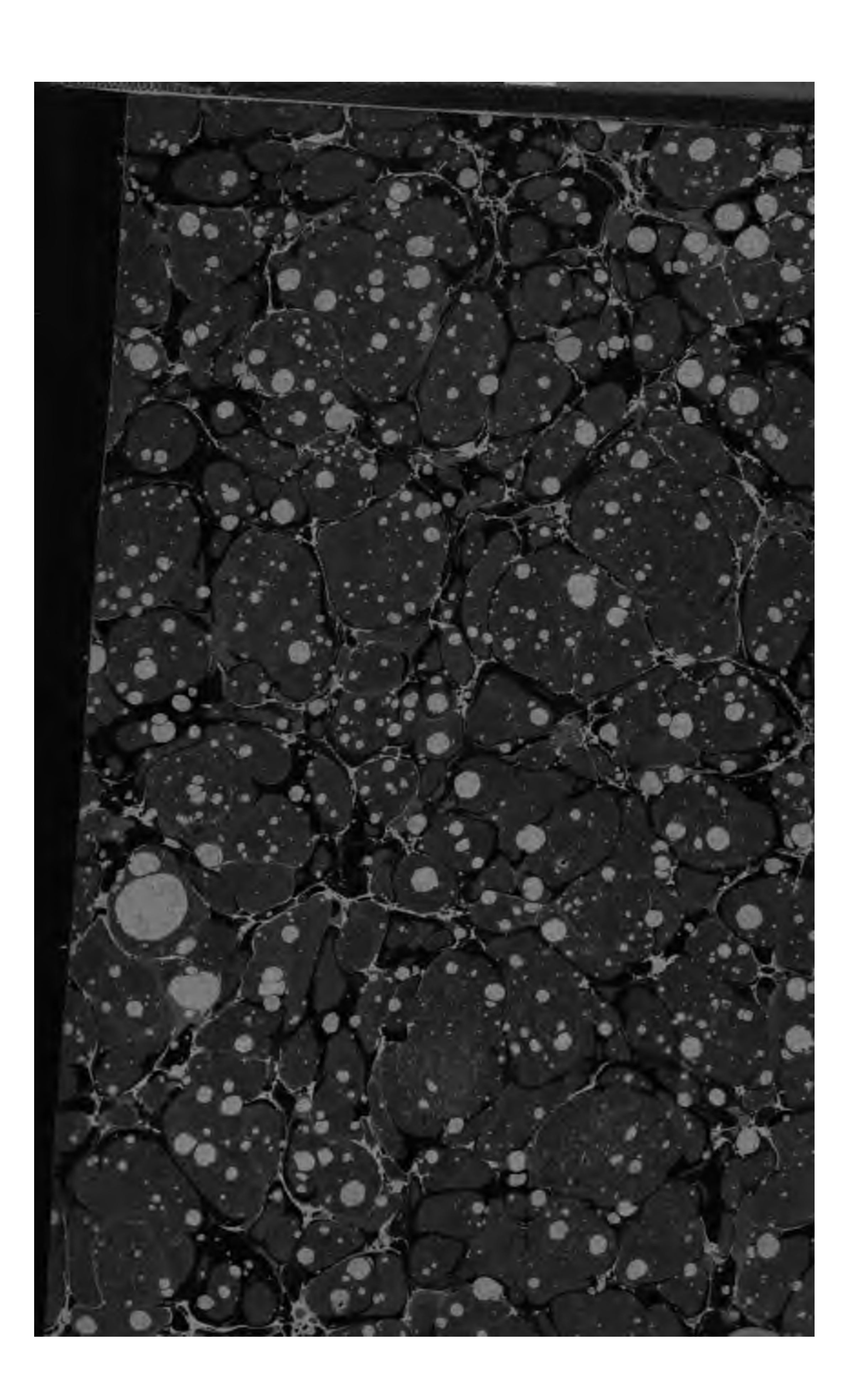
















ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

VIERTER BAND:

MECHANIK.

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN,
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

VIERTER BAND IN VIER TEILBÄNDEN.

MECHANIK.

REDIGIERT VON

FELIX KLEIN UND CONR. MÜLLER
IN GÖTTINGEN.

ERSTER TEILBAND.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901—1908.

Übersicht über die im vorliegenden ersten Teilbande von Band IV zusammengefassten Hefte und ihre Ausgabedaten.

A. Grundlegung der Mechanik.

Heft 1. 13. XI. 1901. — Art. 1. Voss: Die Prinzipien der rationellen Mechanik.

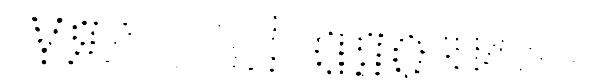
B. Mechanik der Punkte und starren Systeme.

I. Behandlung elementarer Fragen in geometrischer Form.

Heft 2. 8. VII. 1902. — Art. 2. Timerding: Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers.
Art. 3. Schoenflies-Grübler: Kinematik.

Heft 3. 11. IX. 1903. — Art. 4. Jung: Die Geometrie der Massen.
Art. 5. Henneberg: Graphische Statik.

Heft 4. 5. III. 1908. — Art. 6. Stäckel: Die elementare Dynamik.
Klein: Vorrede zu Band IV.
Inhaltsverzeichnis von Band IV, erster Teilband.



Vorrede zum vierten Bande.

Mit dem Bande IV, dessen ersten Teil ich hiermit dem Publikum vorlege, beginnt gemäss dem Plan der Encyklopädie die Reihenfolge der drei Bände, welche den *Anwendungen der Mathematik auf Naturwissenschaft und Technik* gewidmet sein sollen, also der Mechanik, der theoretischen Physik und der Geonomie und Astronomie. Wie Hr. v. Dyck in seinem „Einleitenden Bericht" in Band I bereits auseinandergesetzt hat, will die Encyklopädie in diesen Bänden mehr sein als eine blosse Zusammenstellung der fertig ausgearbeiteten mathematischen Theorieen; sie möchte der ferneren mathematischen Entwickelung der in Betracht kommenden wissenschaftlichen Disziplinen allgemein die Wege ebnen, indem sie ihren Lesern neben den Resultaten auch die *Ansätze* zur Kenntnis bringt, mit denen die Fachverständigen der verschiedenen Gebiete versucht haben, den ihnen vorliegenden Bedingungen der Wirklichkeit mathematisch gerecht zu werden.

Die Schwierigkeiten, welche sich der Durchführung dieses Programms sogleich bei der Inangriffnahme der Bände und dann Schritt für Schritt bei der weiteren Arbeit entgegenstellten und fortgesetzt entgegenstellen, sind in der Tat sehr bedeutende. Denn die Entwickelung im 19. Jahrhundert ist im ganzen die gewesen, dass sich die verschiedenen Gebiete der mathematischen Praxis von dem Betriebe der reinen Mathematik immer mehr abgetrennt haben, so dass die sachliche und namentlich auch die persönliche Verbindung, welche die notwendige Voraussetzung für die Durchführung unseres Planes ist, von Fall zu Fall immer erst mühsam hergestellt werden muss.

Hr. v. Dyck hat in seinem „Einleitenden Bericht" bereits des näheren dargelegt, wie sich diesen Verhältnissen gegenüber der Gedanke der Encyklopädie allmählich durchgesetzt hat. Den Anfang machte vor nun zehn Jahren eine allgemeine Orientierung nach der persönlichen Seite, unter direkter Bezugnahme mit hervorragenden Vertretern der verschiedenen Gebiete im Inlande und Auslande, wofür die Akademieen in dankenswerter Weise die Mittel zur Verfügung gestellt hatten. Die Redaktion der Bände V (Theoretische Physik)

und VI (Geonomie und Astronomie) konnte bald hernach hervorragenden jüngeren Kräften übertragen werden. Die Bearbeitung von Band IV aber (Mechanik) übernahm ich selbst (Herbst 1899) und dies um so lieber, als mir die Herstellung normaler Beziehungen zwischen theoretischer und angewandter Mechanik nach dem Gange meiner persönlichen Entwickelung von je Herzenssache gewesen ist.

Ein besonderes Mittel, sich in Gebiete, die ihm ferner liegen, einzuarbeiten, ist für den deutschen Universitätsdozenten, der in hohem Masse über die besondere Richtung seiner Lehrtätigkeit frei verfügen kann, die Abhaltung geeigneter Vorlesungen und Übungen. Ich habe von diesem Mittel im Interesse meiner Tätigkeit an Band IV der Encyklopädie alle die Zeit hindurch vielseitigen Gebrauch gemacht. Insbesondere las ich im Winter 1899—1900 über Hydrodynamik und verband damit Seminarübungen über Schiffstheorie; — Vorlesung und Übungen waren nicht mehr als ein erster Versuch, aber sie haben mir denjenigen Mitarbeiter zugeführt, der mir für meine Aufgabe sehr bald die allerwesentlichste Hilfe werden sollte, Hrn. *Conrad H. Müller*. Ich bezeichne den Umfang seiner Mitwirkung am einfachsten, indem ich angebe, dass er nur an den drei Referaten Voss, Schönflies-Grübler und Abraham (IV 1, 3 und 14) nicht direkt mitgearbeitet hat; bei allen anderen hat er durch eindringendes Sachstudium und sorgfältigste Kontrolle sowohl der allgemeinen Exposition als der bibliographischen und drucktechnischen Einzelheiten zur Vollendung der endgültigen Darstellung ausserordentlich viel beigetragen, was von sämtlichen beteiligten Verfassern gewiss mit Dankbarkeit bestätigt werden dürfte. Hr. Müller war, als unser Zusammenarbeiten begann, noch Student. Er ist dann später zwei Jahre lang bei mir Assistent gewesen und folgeweise in die Bibliothekarlaufbahn eingetreten. Ich habe der Verwaltung der hiesigen Universitätsbibliothek wie dem vorgesetzten Ministerium meinen besten Dank dafür auszusprechen, dass Hr. Müller seit dem 1. Juli 1906, wo er zum Hülfsbibliothekar befördert wurde, im Interesse seiner Arbeit an der Encyklopädie für längere Zeit beurlaubt worden ist. Seit Ende 1904 wird Hr. Müller auf dem Titel von Band IV neben mir ausdrücklich als Mitherausgeber genannt.

Was die *Abgrenzung* der Mechanik gegen die Nachbargebiete angeht, so ist diese dem Wesen der Sache nach in hohem Masse willkürlich. Für eine abstrakte Auffassung ist die Mechanik, wie sie hier verstanden wird, nur ein Teil der theoretischen Physik und die Lehre von der Bahnbestimmung der Gestirne hinwiederum nur eine Anwendung der Mechanik. Für den Umfang von Band IV glaubten wir uns statt dessen im ganzen an das historische Herkommen halten

zu sollen, wie es der Hauptsache nach durch Lagranges Mécanique analytique festgelegt ist. Elastizität und Akustik haben wir noch mit zur Mechanik gerechnet, dagegen Kapillarität und kinetische Gastheorie nicht mehr, ebensowenig Thermodynamik. Die astronomischen Einzelheiten bleiben dem Bande VI vorbehalten. Auch treten hier diejenigen Entwickelungen zurück, deren Schwerpunkt nach seiten der reinen Geometrie liegt; nach dem Plan der Encyklopädie gehören sie in den Band III.

Innerhalb des so umgrenzten Bereiches haben wir dann gemäss den oben genannten Grundsätzen nach möglichster *Vielseitigkeit* des Inhaltes gestrebt. Neben der analytischen Formulierung kommt die anschauungsmässige Behandlung zu ihrem Recht, neben Untersuchungen, welche die höchsten Mittel der Analysis erfordern, die elementar gehaltene Darstellung. Insbesondere aber haben wir überall die besonderen Ansätze und Approximationsmethoden zur Geltung gebracht, deren sich die Physiker und Ingenieure zur Erledigung der ihnen entgegentretenden mechanischen Aufgaben bedienen. Auf diese Weise sind aus dem ursprünglich einheitlich gedachten Band IV allmählich vier Teilbände, jeder im Umfange von etwa 40 Bogen, geworden, die selbständig paginiert sind und auf den Titelblättern der einzeln ausgegebenen Hefte als IV 1 (bezw. IV 1, I), IV 1, II, IV 2 (bezw. IV 2, I) und IV 2, II unterschieden wurden.

Die *Disposition* des Gesamtstoffes wird sich erst ganz übersehen lassen, wenn die gesamten Teilbände sämtlich vollendet vorliegen; ich behalte mir vor, in einem Schlussworte zu IV 2, II auf die hierher gehörigen Fragen zurückzukommen. Dort soll dann auch ein alphabetisch geordnetes Register für den Gesamtband gegeben werden. Vielleicht aber darf schon hier hervorgehoben werden, dass die Disposition trotz aller Verschiebungen, die sich im Laufe der Ausführung einstellten, einer gewissen Symmetrie nicht entbehrt. In der Tat stehen zu Anfang und Ende Artikel, die sich mit der Frage nach der philosophischen Begründung der Mechanik befassen (der Artikel *Voss* über die Prinzipien der rationellen Mechanik und der ursprünglich von *Boltzmann* übernommene Artikel über das Eingreifen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in die Mechanik der aus sehr zahlreichen diskreten Teile bestehenden Systeme), während die zwischengelagerten Artikel sich ziemlich zu gleichem Umfange auf die Mechanik der Systeme von endlichem Freiheitsgrad und die Mechanik der Kontinua verteilen.

Dies eine wird man uns jedenfalls zugestehen, dass eine ausserordentliche *Menge* von Stoff kritisch durchgearbeitet und nach einem

einheitlichen Plane geordnet worden ist. Dass dabei vieles noch unvollkommen und unvollständig geblieben ist, ist niemandem besser bewusst als der Redaktion. Aber immer sind die ersten wichtigen Schritte auf das im Eingang dieser Vorrede bezeichnete Ziel hin getan. Der Studierende, der sich eine Übersicht über das Gesamtgebiet der Mechanik verschaffen will, erfährt doch zum mindesten von dem Vorhandensein der verschiedenen, neben einander herlaufenden Untersuchungsrichtungen und der zugehörigen Litteratur. Mögen unsere Bibliotheken ein übriges tun und dafür sorgen, dass diese Litteratur überall zugänglich sei. Mögen namentlich auch die elementaren Lehrbücher ihre vielfach einseitig gehaltenen Darstellungen an der Fülle des gebotenen Stoffes einer Revision unterziehen.

Wir meinen also, wenn erst Band IV vollendet vorliegt, etwas Bestimmtes und Nützliches geleistet zu haben. Aber freilich ist es, vom höheren Standpunkte, nur eine Vorbereitung. Mechanik, überhaupt angewandte Mathematik, kann nur durch *intensive Beschäftigung mit den Dingen selbst* gelernt werden; die Litteratur giebt nur eine Beihilfe. Anleitung zum Beobachten mechanischer Vorgänge von früher Jugend an, und auf höherer Stufe Verbindung des mathematischen Nachdenkens mit der Arbeit im Laboratorium, das ist, was behufs gesunder Weiterbildung der Mechanik daneben und vor allen Dingen in die Wege geleitet werden muss. Die moderne Entwickelung hat ja auch in dieser Hinsicht in vielversprechender Weise eingesetzt. Möge die Wissenschaft der Mechanik, die eine Grunddisziplin aller Naturwissenschaft ist, solcherweise einer neuen Blüte entgegengeführt werden. Möge insbesondere auch das Wort *Leonardo da Vincis* sich wieder bewahrheiten, dass die Mechanik das Paradies der Mathematiker ist!

Es erübrigt, dass ich allen Denen namens der Redaktion danke, die uns mit hingebender Arbeit unterstützt haben oder weiter zu unterstützen bereit sind. Zunächst unseren geehrten Referenten, deren guten Willen wir vielfach auf eine harte Probe gestellt haben, indem wir immer wieder genauere Darlegungen oder vielseitigere Darstellung verlangten. Dann aber nicht minder der Verlagsbuchhandlung, welche die vielen weitgehenden Änderungen des Textes, die im Laufe der Arbeit notwendig schienen, immer in entgegenkommendster Weise aufgenommen und zur Ausführung gebracht hat. Mögen sie alle die Befriedigung empfinden, die aus dem Bewusstsein entsteht, an einer guten Sache in hervorragender Weise mitgewirkt zu haben.

Göttingen, Weihnachten 1907.

F. Klein.

Inhaltsverzeichnis zu Band IV, 1. Teilband.

A. Grundlegung der Mechanik (Art. 1).

Art. 1. Die Prinzipien der rationellen Mechanik. Von A. Voss in Würzburg (jetzt in München).

I. Begriff und Aufgabe der Mechanik.

II. Die allgemeinen Prinzipien der rationellen Mechanik.

A. Philosophische Prinzipien.

B. Mathematische Prinzipien.

C. Mechanisch-physikalische Prinzipien.

III. Die Grundbegriffe der rationellen Mechanik.

A. Die Grundbegriffe der Phoronomie.

B. Die Grundbegriffe der Statik.

Seite

C. Die Grundbegriffe der Dynamik.

D. Die rein kinetischen Theorieen.

IV. Die speziellen Prinzipien der rationellen Mechanik.

A. Elementare Variations- oder Differentialprinzipe.

α) Die Statik.

β) Die Dynamik.

B. Eigentliche Variations- (isoperimetrische) Prinzipe.

C. Eigentliche Integralprinzipe.

(Abgeschlossen im Juli 1901.)

Seite

B. Mechanik der Punkte und starren Systeme (Art. 2—13).

I. Behandlung elementarer Fragen in geometrischer Form (Art. 2—6).

Art. 2. Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Von H. E. Timerding in Elsfleth (Oldenburg) (jetzt in Strassburg i. E.).

Seite

B. Theorie der gebundenen Kräftesysteme und ihrer Drehung.

(Abgeschlossen im Februar 1902.)

Art. 3. Kinematik. Von A. Schoenflies in Königsberg i. Pr., (mit einem Zusatze Nr. 28—30 von M. Grübler in Dresden).

A. Endliche Bewegungen.

B. Stetige Bewegungen.

C. Die Mechanismen.

D. Anhang.

(Abgeschlossen im Juni 1902.)

Seite

Art. 4. Geometrie der Massen. Von G. Jung in Mailand.

I. Lineare Momente. Der Schwerpunkt.

II. Quadratische Momente. Das Antipolarsystem.

III. Anhang zur Theorie der linearen und quadratischen Momente.

IV. Höhere Momente.

(Abgeschlossen im März 1903.)

Seite

Art. 5. Die graphische Statik der starren Körper. Von L. Henneberg in Darmstadt.

I. Grundzüge der graphischen Statik.

A. Das ebene Kräftesystem.

B. Das ebene Kräftesystem. Anwendungen.

C. Das räumliche Kräftesystem.

II. Die bestimmten Fachwerke. Allgemeine Theorie.

A. Ebene Fachwerke.

Seite

B. Räumliche Fachwerke.

III. Spezielle Fachwerksträger.

(Abgeschlossen im Juni 1903.)

Art. 6. Elementare Dynamik der Punktsysteme und starren Körper. Von P. Stäckel in Hannover.

I. Punktdynamik.

A. Allgemeine Theorie.

a) Der einzelne Punkt.

b) Systeme diskreter Punkte.

c) Beziehungen zu Nachbargebieten.

B. Spezielle Ausführungen.

a) Der einzelne Punkt.

b) Systeme materieller Punkte.

(Abgeschlossen im Dezember 1905.)

A. GRUNDLEGUNG DER MECHANIK.



IV 1. DIE PRINZIPIEN DER RATIONELLEN MECHANIK.

VON

A. VOSS

IN WÜRZBURG.

Inhaltsübersicht.

I. Begriff und Aufgabe der Mechanik.

II. Die allgemeinen Prinzipien der rationellen Mechanik.

A) Philosophische Prinzipien.

B) Mathematische Prinzipien.

C) Mechanisch-physikalische Prinzipien.

III. Die Grundbegriffe der rationellen Mechanik.

A) Die Grundbegriffe der Phoronomie.

B) Die Grundbegriffe der Statik.

C) Die Grundbegriffe der Dynamik.

D) Die rein kinetischen Theorieen.

IV. Die speziellen Prinzipien der rationellen Mechanik.

A) Elementare Variations- oder Differentialprinzipe.

α. Die Statik.

β. Die Dynamik.

B) Eigentliche Variations- (isoperimetrische) Prinzipe.

C) Eigentliche Integralprinzipe.

Litteratur.

1) Ältere Fundamentalwerke.

J. le Rond d'Alembert, Traité de dynamique, Paris 1743, 2. éd. 1758; auch deutsch *Ostwald*'s Klassiker der exakten Wissenschaften (citiert als *Ostwald,* Klassiker-Bibliothek, *K. B.*) Nr. 106, herausgegeben von *A. Korn,* Leipzig 1899.

Jacob Bernoulli, Opera, 2 Bde., Genevae 1744.

Johann Bernoulli, Opera, 4 Bde., Lausannae et Genevae 1742.

*L. Euler, Mechanica**) sive motus scientia, analytice exposita, 2 Bde., Petropoli 1736; deutsch von *J. Wolfers,* Greifswald 1848/50.

— *Theoria motus* corporum solidorum, Gryphiswaldiae et Rostockii 1765; deutsch von *J. Wolfers,* Greifswald 1853.

— Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Lausannae et Genevae 1744.

J. B. Fourier, Oeuvres, 2 Bde., éd. *G. Darboux,* Paris 1888/90.

G. Galilei, Opere, 10 Bde., Firenze 1890—1900. Discorsi e demostrazioni intorno a due nuove scienze, Leida 1638; deutsch *Ostwald,* K. B. Nr. 11, 24, 25, herausgegeben von *A. v. Oettingen.*

J. L. Lagrange, De la Grange, Méchanique analitique, 1. éd., Paris 1788; *Mécanique* analytique 2. éd., 2 tomes, 1811/15; 3. éd. 1853 (*J. Bertrand*); 4. éd., Oeuvres complètes 11, 12, Paris 1892 (*G. Darboux*); deutsch von *F. Murhard* 1817; *A. L. Crelle,* Berlin 1853; *H. Servus,* Berlin 1887; citiert ist nach der Ausgabe v. *Darboux.*

P. S. Laplace, Mécanique céleste, Paris 1799—1825; Oeuvres complètes, 7 Bde., Paris 1843/47; desgl. Paris 1878—82; citiert ist nach der Ausgabe v. 1843.

I. Newton, Philosophiae naturalis *Principia* Mathematica, London 1687; 2. ed. London 1713; citiert ist nach der Ausgabe Amstelod. 1723.

P. Varignon, Projet de la nouvelle mécanique, Paris 1687; *Mécanique nouvelle,* 2 vols., Paris 1725.

2) Ältere Litteratur des 19. Jahrhunderts.

E. Bour, Cours de *mécanique* et machines, 3 Bde., Paris 1865/68.

L. N. M. Carnot, Principes fondamentaux de l'équilibre et des mouvements, Paris 1803.

A. L. Cauchy, Exercices de mathématiques, Paris 1826, 27, 28; auch *Oeuvres* complètes (2) 6, 7, 8, Paris 1887/99.

G. Coriolis, Traité de la *mécanique* des corps solides et du calcul de l'effet des machines (1. éd. Paris 1829); 2. éd. Paris 1844.

J. M. C. Duhamel, Cours de mécanique, 2 Bde., Paris 1845; 3. éd. 1862; deutsch von *H. Eggers,* Leipzig 1853, *W. Wagner,* Braunschweig 1853, *O. Schlömilch,* Leipzig 1861.

G. Green, Mathematical *Papers,* ed. *N. M. Ferrers,* London 1871.

---

*) In der durch kursiven Druck hervorgehobenen Abkürzung ist das betreffende Werk im folgenden citiert; Seitenzahlen beziehen sich meistens nicht auf die Stelle, wo der Titel der Abhandlung, sondern wo die betreffende Erörterung in derselben zu finden ist.

C. G. J. Jacobi, Vorlesungen über *Dynamik*, herausg. v. *A. Clebsch*, Berlin 1866; desgl. Werke, Supplementband, herausg. v. *E. Lottner*, Berlin 1884.
— Vorlesungsheft vom Winter 1847/48, ausgearbeitet von *W. Scheibner*, Abschrift in der Bibliothek d. Akademie d. Wissensch. zu Berlin.
F. Minding, Handbuch der Differential- u. Integralrechnung, Teil 2, *Mechanik*, Berlin 1838.
A. F. Möbius, Lehrbuch der *Statik*, 2 Bde., Leipzig 1837.
F. Moigno, Leçons de mécanique analytique, *statique*, Paris 1868.
L. Poinsot, Elemens de *statique*, Paris 1804; 11. éd. (*Bertrand*), 1873.
S. D. Poisson, Traité de mécanique, Paris 1811; 2. éd. 1833, übers. von *M. A. Stern*, Berlin 1835; desgl. *A. Pfannstiel*, Dortmund 1888.
J. V. Poncelet, Cours de mécanique industrielle, Metz 1829; 3. éd. (*X. Kretz*), Paris 1870; Cours de *mécanique appliquée* aux machines, Metz 1826; 2. éd. (*X. Kretz*), Paris 1874/76; deutsch von *C. Schnuse*, Darmstadt 1845; auch als Traité de mécanique appliquée aux machines, 2 Bde., Liège 1856.
F. Reech, Cours de *mécanique*, Paris 1852.

3) Neuere Litteratur.

J. Andrade, *Mécanique physique*, Paris 1896.
P. Appell, Traité de *mécanique* rationelle, 2 Bde., Paris 1893/96.
D. Bobylew, Analytische Mechanik (russisch), 3 Bde., St. Petersburg 1885/86.
L. Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipe der *Mechanik*, Leipzig 1897.
J. Boussinesq, *Leçons* synthétiques de mécanique générale, Paris 1889.
E. Budde, Allgemeine *Mechanik*, 2 Bde., Berlin 1890.
R. Clausius, Mechanische Wärmetheorie (1876), 3. Aufl. 2 Bde., Braunschweig 1887.
W. K. Clifford, Elements of dynamic, part 1, London 1878.
Th. Despeyrous, Cours de *mécanique*, 2 Bde., Paris 1884, mit Noten von *G. Darboux*.
A. Föppl, *Einführung* in die Maxwell'sche Theorie, Leipzig 1894.
— Vorlesungen über technische *Mechanik*, 2. Aufl., 4 Bde., Leipzig 1900.
J. W. Gibbs, Thermodynamische Studien, übersetzt von *W. Ostwald*, Leipzig 1892.
H. v. Helmholtz, Vorlesungen über die *Dynamik* diskreter Massenpunkte, herausg. von *O. Krigar-Menzel*, Berlin 1897.
— Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichtes, herausg. von *R. König* und *C. Runge*, Leipzig 1897.
— Wissenschaftliche *Abhandlungen*, 3 Bde., Leipzig 1892/95.
H. Hertz, Gesammelte Werke, Bd. 3, die Prinzipe der *Mechanik*, Leipzig 1894.
G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathem. Physik, Bd. 1, *Mechanik*, Berlin 1876.
L. Koenigsberger, Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig 1901.
A. E. H. Love, Theoretical *mechanics*, Cambridge 1897.
— A treatise on the mathematical theory of *elasticity*, 2 Bde., Cambridge 1892.
G. A. Maggi, *Principii* della teoria matematica del movimento dei corpi, Milano 1895.
E. Mathieu, *Dynamique* analytique, Paris 1878.
J. C. Maxwell, Matter and motion, London 1876; deutsch, Substanz und Bewegung, übersetzt von *E. Fleischl*, Wien 1879.
— Scientific Papers, ed. *W. D. Niven*, 2 vols., Cambridge 1890.
— Treatise on electricity and magnetism, 2 vols., Oxford 1873; 2. ed. 1881; deutsch, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus, übersetzt von *B. Weinstein*, Berlin 1888.

C. Neumann, Beiträge zur mathematischen Physik, Leipzig 1893.
— Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Potential, Leipzig 1896.
— Die elektrischen Kräfte, 2 Bde., Leipzig 1873 u. 1898.
P. Painlevé, *Leçons sur l'intégration* des équations différentielles de la mécanique et applications, Paris 1895, lith.
— *Leçons* sur la théorie analytique des équations différentielles, Paris 1897, lith.
J. Petersen, Lehrbuch der Statik, Kinematik und Dynamik fester Körper, 3 Bde.; deutsche Ausgabe von *R. von Fischer-Benzon*, Kopenhagen 1882/87.
H. Poincaré, *Électricité et optique*, Paris 1890, deutsch von *W. Jäger* und *E. Gumlich*, Berlin 1891; 2. éd., Paris 1893.
— Thermodynamique, redigée par *J. Blondin*, deutsch von *W. Jäger* und *E. Gumlich*, Berlin 1893.
H. Resal, Traité de *mécanique générale*, tome 1, 2, Paris 1873.
E. J. Routh, A treatise on analytical statics, 2. ed., Cambridge 1896.
— Essay on stability of a given state of motion, London 1877.
— A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, 2 vols., 6. ed., London 1897; deutsch von *A. Schepp*, die *Dynamik* der Systeme starrer Körper, 2 Bde., Leipzig 1898.
W. Schell, *Theorie der Bewegung* und der Kräfte, 2 Bde., 2. Aufl., Leipzig 1879.
J. Somoff, Theoretische *Mechanik*, 2 Bde., übersetzt von *A. Ziwet*, Leipzig 1878.
G. G. Stokes, Mathematical and Physical *Papers*, 2 vols., Cambridge 1883.
J. J. Thomson, On some applications of dynamics to physical phenomena, Cambridge 1888; auch deutsch, *Anwendungen* der Dynamik auf Physik und Chemie (ohne Angabe des Übersetzers), Leipzig 1890.
W. Thomson u. *P. G. Tait*, *Treatise* on natural philosophy, 1. ed., Oxford 1867, deutsch von *H. Helmholtz* u. *G. Wertheim*, Braunschweig 1874; 2. ed. 1, part. 1, 2, Cambridge 1879/83.
W. Thomson, Gesammelte Abhandlungen, deutsch von *L. Levy* u. *B. Weinstein*, Berlin 1890.
— Mathematical and Physical *Papers*, 3 Bde., London 1890.
W. Voigt, *Kompendium* der theoretischen Physik, 2 Bde., Leipzig 1895.
A. Ziwet, An elementary treatise on theoretical mechanics, 3 Bde., New-York 1894.

4) Historisch-kritische Litteratur.

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 3 Bde., Leipzig 1880—98.
W. K. Clifford, Lectures and essays, 2 vols., London 1879.
— The common sense of the exact sciences, London 1879; 2. ed. 1886.
E. Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik, 1. Aufl. 1872; 3. Aufl., Leipzig 1887.
J. M. C. Duhamel, Des *méthodes* dans les sciences de raisonnement, 4 Bde., 1. éd. Paris 1866/72; 2. éd. 1886; citiert ist nach der ersten Ausgabe.
C. de Freycinet, Essais sur la philosophie des sciences; analyse, mécanique, Paris 1896.
G. Helm, Die *Energetik* in ihrer geschichtlichen Entwicklung, Leipzig 1900.
H. v. Helmholtz, Vorträge und Reden, 4. Aufl., Braunschweig 1896.
A. Höfler, *Studien* zur gegenwärtigen Philosophie der Mechanik, Leipzig 1900.
I. Kant, *Metaphysische Anfangsgründe* der Naturwissenschaft, 1786 (Hartenstein, Kant's Werke, Bd. 2); citiert ist nach Bd. 3 der Veröffentl. der philosoph. Gesellschaft zu Wien, Leipzig 1900.

H. Klein, Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig 1872.
L. Lange, Die geschichtliche Entwicklung des *Bewegungsbegriffs*, Leipzig 1886.
J. Larmor, *Aether and matter*, Cambridge 1900.
K. Lasswitz, Geschichte der *Atomistik*, 2 Bde., Hamburg und Leipzig 1890.
O. Liebmann, Zur Analysis der Wirklichkeit, Strassburg 1876.
E. Mach, Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit, Prag 1872.
— Die Prinzipien der Wärmelehre, Leipzig 1896.
— Beiträge zur Analyse der Empfindungen, Jena 1886.
— Die *Mechanik* in ihrer Entwicklung historisch und kritisch dargestellt, 1. Aufl. 1883 (auch in engl. Übersetzung von *Mac Cormack*, Chicago u. London 1893); citiert ist nach der 3. Aufl., Leipzig 1897; 4. Aufl. 1901.
J. F. Montucla, *Histoire* des mathématiques, 4 Bde., Paris 1798/1802.
C. Neumann, Die *Prinzipien* der Galilei-Newton'schen Theorie, Leipzig 1870.
K. Pearson, *Grammar* of science, 2. ed., London 1900.
M. Planck, Das Prinzip der Erhaltung der *Energie*, Leipzig 1887.
E. du Bois-Reymond, *Reden*, 2 Bde., Leipzig 1872 und 1887.
P. du Bois-Reymond, Über die Grundlagen der Erkenntnis in den exakten Wissenschaften, Tübingen 1890.
F. Rosenberger, Geschichte der Physik, 3 Bde., Braunschweig 1882/90.
— Newton und seine physikalischen Prinzipien, Leipzig 1875.
H. Streintz, Die *physikalischen Grundlagen* der Mechanik, Leipzig 1883.
P. G. Tait, Properties of matter, London 1885; übers. v. *H. Siebert*, Wien 1888.
I. Todhunter, A history of the theory of elasticity, 2 Bde., Cambridge 1886/94.
— A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the earth, 2 vols., London 1873.
P. Volkmann, Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehung zum Geistesleben der Gegenwart, Leipzig 1898.
— Einführung in das Studium der *theoretischen Physik*, Leipzig 1900.
W. Whewell, History of the inductive sciences, 3. ed., London 1857, insb. vol. 2.
W. Wundt, Die *physikalischen Axiome* und ihre Beziehung zum Kausalprinzip, Erlangen 1866.
— *Logik*, Erkenntnistheorie und Methodenlehre, 2 Bde., Stuttgart 1883/84.
Th. Young, A course of lectures on natural philosophy, 2 vols., London 1807.

I. Begriff und Aufgabe der Mechanik.

1. Einleitung. Die Erscheinung, dass die Resultate mathematischer Lehrgebäude von grundlegender Wichtigkeit oft eine lange Zeit hindurch ihrer strengen wissenschaftlichen Begründung vorausgeeilt sind, hat sich in weit höherem Grade bei der *Mechanik*, wie bei der Arithmetik oder der Infinitesimalrechnung wiederholt. Man kann den Standpunkt, welchen die systematische Entwicklung der Mechanik in ihrer gegenwärtigen Gestalt einnimmt, etwa mit dem der Infinitesimalrechnung vor *Cauchy* vergleichen, auf den sich fast

wörtlich die Bemerkungen von *Hertz*[1]) in seiner Einleitung zur Mechanik anwenden lassen. Die folgende Darstellung, *welche die Prinzipien der Mechanik, wie sie sich im Laufe des 19. Jahrhunderts entwickelt haben*, darzulegen bemüht ist, erhebt nicht den Anspruch darauf, die vorliegenden logischen Schwierigkeiten überall zu *beseitigen*, sie wünscht vielmehr nur dazu *beizutragen*, dass eine befriedigende Einigung über diese Prinzipien, die ein unabweisbares Bedürfnis ist, allmählich getroffen werden könne[2]).

---

1) Siehe die Bemerkung von *Hertz*, Mechanik, p. 8, über das bei der Exposition der Grundlagen der Mechanik häufig hervortretende Bestreben, über die Schwierigkeiten und Verlegenheiten in denselben möglichst bald hinaus und zu konkreten Beispielen zu kommen.

Dass wir aus der neueren Zeit verschiedene vorzügliche Darstellungen der Mechanik besitzen, soll hier keineswegs unterschätzt werden; überhaupt liegt dem ganzen Artikel eine polemische Tendenz völlig fern. Ein Blick auf den gegenwärtigen Zustand der Werke über Mechanik, soweit sich dieselben nicht auf eine rein mathematische Behandlung, sondern auf die Entwicklung der eigentlich mechanischen Vorstellungen beziehen, dürfte indes zeigen, dass unter denselben, da wo es sich nicht um stereotype Wiederholung gewisser Wendungen handelt, die grössten Verschiedenheiten hinsichtlich der Prinzipien bestehen. Zur Gewinnung einer möglichst objektiven Prüfung ist sowohl im Text, als auch in den Fussnoten eine Übersicht über zum Teil ganz verschiedene Ansichten gegeben.

2) Die Forderung eines *einzigen* allgemein verbindlichen Lehrgebäudes soll damit nicht bedingungslos erhoben werden. Ob sich dieselbe überhaupt befriedigen lässt, kann um so mehr zweifelhaft erscheinen, als auch in der reinen Mathematik zur Zeit über grundlegende Fragen noch verschiedene theoretische Auffassungen bestehen.

Dass eine Darlegung der Prinzipien der Mechanik eine allgemeine Kenntnis der mechanischen Untersuchungen bereits *voraussetzen* muss, ist wohl selbstverständlich. Die folgende Ausführung bestrebt sich indessen, soviel wie möglich, die direkte Anknüpfung an spezielle mathematische Theorieen zu vermeiden.

Die in den letzten dreissig Jahren entstandene umfangreiche *Litteratur zur kritischen Betrachtung der Mechanik* ist bisher noch sehr wenig gesichtet. *Dühring*'s kritische Geschichte der Mechanik enthält über die älteren Perioden viele interessante Bemerkungen, die sich in schlichterer und angemessenerer Darstellung zum Teil auch schon in *Whewell*'s History of the inductive sciences finden; eine eigentliche Kritik ist indessen in *Dühring*'s Werk nicht versucht; auch fehlte dem Verfasser vollständig das Verständnis der mit *Lagrange*'s Arbeiten beginnenden Entwicklung der Mechanik. *Maxwell's* Matter and motion erscheint nicht frei von schwer zu vereinigenden Widersprüchen und bezieht sich vorzugsweise doch auf Gegenstände der physikalischen Mechanik. Die *Mechanik* von *Mach*, welche von einer einheitlichen Grundanschauung aus mit dem feinsten Verständnis der Entstehung der mechanischen Prinzipien nachgeht, wird man in vielfacher Beziehung wohl als grundlegend ansehen dürfen.

2. Prinzipe und Prinzipien der Mechanik. Der Ausdruck Prinzipe oder Prinzipien wird in der Mechanik in sehr verschiedener Weise angewendet. Unter *Prinzipien* versteht man in irgend einer Wissenschaft, hier speziell der *Mechanik*, *erstens* Aussagen, die nicht wieder auf andere demselben wissenschaftlichen Gebiete angehörige Behauptungen zurückgeführt, sondern als Ergebnis anderer Resultate der Erkenntnis angesehen werden[3]), z. B. die *Axiome oder Postulate*[4]), und die teils logischer oder methodologischer teils metaphysischer oder physikalischer Art sein können; *zweitens allgemeine aus den Grundvorstellungen der Mechanik gewonnene Sätze*, die wenn auch in ihren einfacheren Fällen auf Grund früherer deduzierbar, doch in ihrem weitesten Umfange thatsächlich nicht mehr vollständig beweisbar erscheinen (z. B. das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, das *d'Alembert*'sche resp. *Gauss*'sche Prinzip); *drittens*[5]) allgemeine *rein*

Auch hier ist aber — allerdings in Rücksicht auf den ganzen Plan des Werkes — die Ausbildung der Mechanik im 19. Jahrhundert insbesondere in ihrem Zusammenhang mit der gleichzeitigen Vertiefung der mathematischen Methoden nur an wenigen Stellen berührt, während der vorliegende Artikel den Versuch macht, diese Epoche in den Vordergrund zu rücken und mit Hülfe der gesamten Litteratur historisch und kritisch dem allgemeinen Verständnis näher zu bringen. *Hertz'* kritische Einleitung erscheint, auch wenn man von einzelnen Missverständnissen absieht, im ganzen doch zu einseitig bestimmt durch die in ihrer näheren Ausführung leider unvollendet gebliebene Absicht, aus einem einzigen Grundprinzip alles zu deduzieren. *M. Cantor* berücksichtigt in seiner Geschichte der Mathematik die Entwicklung der Mechanik nur bis zur Zeit von *Galilei*. Ausgezeichnet sind durch die Klarheit der analytischen Darstellung *C. Neumann's* über fast alle Gegenstände der Mechanik und mathematischen Physik sich erstreckende Arbeiten. Von grosser Bedeutung erscheinen für die neuere Entwicklung der physikalischen Mechanik die zusammenfassenden Gesichtspunkte von *Duhem* im Commentaire sur les principes de la thermodynamique; besonders beachtenswert sind auch die in ganz modernem Geiste abgefassten Lectures on natural philosophy von *Th. Young*. Auf eine weitere Darlegung der *Vorarbeiten* zur kritischen Untersuchung der Prinzipien der Mechanik glauben wir hier nicht eingehen zu sollen.

3) *Hertz*, Mechanik, p. 4.

4) Über den Unterschied zwischen Axiom und Postulat in physikalischer Hinsicht vgl. *P. Volkmann*, Theor. Physik, p. 11.

5) Die methodologische Stellung der Prinzipien zweiter und dritter Art zueinander wird sehr verschieden beurteilt. Auch wenn man beide, wie vielfach zu geschehen scheint, gleichsam als Beschwörungsformeln ansieht, in denen ein lange fortgesetzter Prozess induktiver Erkenntnis seinen Ausdruck gefunden hat, besteht doch ein sehr wesentlicher Unterschied in dem Grade der Abstraktion, der in beiden Fällen eintritt. — Die im Texte getroffene Unterscheidung von Prinzipien verschiedener Art kann überhaupt nur eine allgemeine sein; an welcher Stelle jede einzelne der mannigfaltigen als „Prinzipe" im Laufe

mathematische Methoden für die Behandlung der mechanischen Probleme, die an sich zunächst völlig auf Grund von Prinzipien der zweiten Art erweisbar, zur rein deduktiven Behandlung ausgedehnter Teile der Mechanik ausreichend sind, in ihrer weitesten Ausdehnung allerdings wieder einen heuristischen Charakter erhalten (*Hamilton*'sches Prinzip, Prinzip der kleinsten Aktion), *endlich* nach *C. G. J. Jacobi*[6]) *analytische Methoden,* Integralgleichungen der dynamischen Differentialgleichungen zu gewinnen. Hinsichtlich der Prinzipe der letzteren Art verweisen wir auf IV 11 a. Eine Übersicht über den *Einfluss der mathematischen Methodik* auf die gegenwärtige Darstellung und Behandlung der mechanischen Probleme gehört ihrem Wesen nach allerdings in die Lehre von den Prinzipien der Mechanik. Wir treten indes *hier* auf eine solche Erörterung nicht ein, da die speziellen mathematischen Methoden in den folgenden Artikeln des vorliegenden Bandes der Encyklopädie zum grössten Teil eine ausführliche Darstellung erfahren.

3. Begriff und Aufgabe der Mechanik. Die Mechanik[7]) ist die *Grundlage der gesamten physikalischen Wissenschaften,* d. h. der Wissenschaften, die Vorgänge in der Natur *durch nach bestimmten Gesetzen geordnete Zahlwerte*[8]), deren Abhängigkeit durch das mathematische Bild der Funktion dargestellt wird, beschreiben[9]). Seit *Aristoteles*[10]) ist die durch den metaphysischen Begriff der Identität begründete Ansicht mehr oder weniger maassgebend gewesen, dass eine solche Erklärung nur durch Zurückführung aller Erscheinungen auf Bewegungsvorgänge räumlich unveränderlicher Substanzen geliefert werden könne[11]). Diese Ansicht aber kann möglicherweise zu enge

---

der Zeit bezeichneten Aussagen einzuordnen ist, wird von den oft schwankenden Vorstellungen abhängen, die den Ausdruck Prinzip begleiten.

6) *Jacobi*, Dynamik, 1842, herausg. v. *A. Clebsch,* p. 2. Wir rechnen dahin die analytische Verwendung des Satzes von der lebendigen Kraft, die Schwerpunktsintegrale, das Prinzip der Flächen, des letzten Multiplikators, *Hamilton's* Prinzip der variierenden Wirkung, das *Poisson-Jacobi*'sche Prinzip, die mannigfachen Transformations- und Äquivalenzprinzipe etc. etc.

7) Das Wort Mechanik zuerst in den *Aristoteles* zugeschriebenen μηχανικὰ προβλήματα (Erklärung einer Reihe sinnreicher Erfindungen), übers. von *F. Th. Poselger*, Berlin, Abhandlungen d. Akademie 1829, p. 56.

8) Vgl. *J. C. Maxwell,* On *Faraday's* lines of force, 1855, Scientific Papers 1, p. 155; auch *Ostwald*, K. B. Nr. 69.

9) *E. du Bois-Reymond,* Reden, zweite Folge 1848, p. 6, Leipzig 1887.

10) Vgl. *W. Wundt,* Physikal. Axiome, p. 6 ff.; *K. Lasswitz,* Atomistik 1, p. 89; 2, p. 1.

11) So auch *Wundt* in seiner Logik, 2, p. 225 ff.; desgl. *H. Petrini,*

gefasst sein[12]); auch findet trotz der vielleicht entgegenstehenden philosophischen Bedenken, die in dem Begriff der Substanz liegen, die moderne physikalische Anschauung keine Schwierigkeit darin, von verschiedenen nicht weiter zu erklärenden *Zuständen einer Substanz*[13]) zu reden, deren funktionelle, auch in der Zeit veränderliche, Beziehung zu ermitteln lediglich eine Aufgabe der mathematischen Darstellung ist; es sei hier nur ausser der ganzen durch *Maxwell* eingeleiteten Forschungsrichtung an die Ausbildung einer chemischen Statik und Dynamik erinnert, welche z. B. Lösungs- und Reaktionsgeschwindigkeiten mit Hülfe von Formeln bestimmt.

Abgesehen von dieser sehr wesentlichen *Erweiterung* der Gesichtspunkte handelt es sich aber in *erster* Linie bei den rein physikalischen Wissenschaften um die Betrachtung derjenigen Vorgänge, die durch Vorstellung der *Bewegung* verständlich gemacht werden. Insofern ist dann die Mechanik die Lehre von der Bewegung, und ihre Aufgabe, aus einem als gegeben vorausgesetzten Bewegungszustande alle seine Folgen herzuleiten.

Da es sich lediglich um Zahlwerte handelt, ist die Mechanik ebenso wie die analytische Geometrie angewandte *Mathematik*; sie wird wie die Geometrie an gewisse Voraussetzungen gebunden sein. Während aber diese in der Geometrie *früher* in der begrifflichen Formulierung *a priori gewisser Aussagen* gesucht wurden, sind dieselben in der Mechanik von Anfang an ganz anderer Art gewesen. Die naive Ansicht der früheren Zeit wollte durch das *Wirken der Dinge aufeinander* den *realen Verlauf* der Erscheinungen begreifen und *erklären*: so vermischen sich denn von Anfang an mit den rein mathematischen Elementen der Bewegungslehre metaphysische Spekulationen. Das Wirken der Dinge besteht hiernach darin, dass sie *Kräfte* aufeinander ausüben, d. h. *Beschleunigungsursachen* für einander sind[14]).

Kritische Studien über die grundlegenden Prinzipien der Mechanik, Archiv für system. Philosophie 1 (1895), p. 204.

12) *E. Mach*, Geschichte d. Satzes v. d. Erhaltung d. Arbeit, Prag 1872, bemerkt, p. 23, dass keine Notwendigkeit vorliegt, sich alles Gedachte blos räumlich vorzustellen, so z. B. sei die Auffassung von fünfatomigen isomeren Molekülen, die nur durch Beziehung *zweier* Punkte sich unterscheiden sollen, im dreidimensionalen Raum unmöglich, ib. p. 29; desgl. *Mach,* Mechanik, p. 486: „Dass alle physikalischen Vorgänge mechanisch zu erklären seien, halten wir für ein Vorurteil.“ Vgl. auch *P. Beck,* Der Substanzbegriff in d. Naturwissenschaften, Diss. Leipzig 1896, p. 59.

13) *P. Drude,* Physik d. Äthers, Stuttgart 1894, p. 10; bei *W. Thomson* treten diese Ideen schon 1847 auf (Papers 1, p. 76); vgl. auch *P. Duhem,* Traité élementaire de mécanique chimique, 4 vols., Paris 1897/99, Bd. 1, p. 29.

14) Diese bekannte Definition der Mechanik schon bei *P. Varignon,* Nou-

Gewiss halten auch jetzt noch viele an diesem *Kausalitätsgedanken* fest, der alle Vorgänge durch das *Verhältnis von Ursache und Wirkung* „erklären“ will. Aber immer mehr macht sich die Auffassung von der *Notwendigkeit und Eindeutigkeit*[15]) *des Naturgeschehens geltend*: das einzig thatsächlich Feststellbare läuft darauf hinaus, dass gewisse vollkommen quantitativ bestimmte Erscheinungsklassen in unlöslicher und eindeutiger Verbindung mit anderen so verknüpft sind, dass die eine als zeitliche Folge der anderen *erscheint*[16]).

Lässt man die Voraussetzung einer metaphysischen *Kausalität* fallen[17]), so bleibt als Aufgabe der *reinen* Mechanik einzig und allein die, den gesetzmässigen Verlauf der Bewegungen zu bestimmen, resp. zu *beschreiben*[18]). Diese durch *Kirchhoff*'s Autorität für weite Kreise

---

velle mécanique (1687), 1725, Bd. 1, p. 1: La mécanique en général est la science du mouvement, de sa cause et de ses effets.

15) *J. Petzoldt,* Das Gesetz der Eindeutigkeit, Vierteljahrsschrift für wiss. Philosophie 19 (1895), p. 257, in Übereinstimmung mit *H. v. Helmholtz,* Wiss. Abh. 1, p. 13 u. 68: „Ich habe mir erst später klar gemacht, dass das Prinzip der Kausalität nichts anderes ist, als die *Voraussetzung der Gesetzlichkeit.*“ Auch *P. Volkmann,* Erkenntnistheor. Grundzüge der Naturwiss., Leipzig 1896, desgl. Theoretische Physik, p. 39, lehnt die Kausalitätsidee grundsätzlich ab; nach *E. Mach,* Die Prinzipien der Wärmelehre, Leipzig 1896, p. 433 ist der Kausalitätsgedanke nichts anderes, als *Fetischismus;* vgl. auch *Mach,* Das Prinzip der Vergleichung in der Physik, Leipzig 1894, p. 12: „Ich hoffe, dass die künftige Naturwissenschaft die Begriffe Ursache und Wirkung ihrer formalen Unklarheit wegen beseitigen wird.“

16) *H. Weber,* Über Kausalität in den Naturwissenschaften, Leipzig 1881, will allerdings den philosophischen Begriff der Kausalität festhalten, ihn aber mit der Vorstellung, dass der notwendige Verlauf der Erscheinungen vom thatsächlichen nicht verschieden sei, vereinigen.

17) So wie aber der Fortschritt der mathematischen Wissenschaften fast unabhängig von den allgemeinen Untersuchungen über die erkenntnistheoretischen Grundbegriffe von der Zahl gewesen ist, so zeigt auch der geschichtliche Verlauf, *dass gerade besonders erfolgreiche Erweiterungen in der Erkenntnis der Naturerscheinungen von solchen Männern ausgegangen sind* (z. B. Poncelet, Faraday, R. Mayer, auch Maxwell und Helmholtz in ihren anfänglichen Schriften), *die von besonders lebhaften und konkreten Kausalitätsideen erfüllt waren.* Die prinzipielle Unterdrückung derselben würde, wie es scheint, auch dem forschenden Physiker einen grossen Teil der lebendigen Anschauung rauben, welche man z. B. in *Kirchhoff*'s abstrakten Darstellungen vermisst. Das Ideal der Wissenschaft in ihrer vollkommensten Gestalt kann dabei ganz wohl in einer Weise gefasst werden, welche dem jeweiligen Standpunkte der Erkenntnistheorie besser zu entsprechen scheint; man wird aber stets zu beachten haben, dass unsere abstrakten Begriffe in einer beständigen Anpassung und Weiterbildung durch die Anschauung und Beobachtung sich befinden müssen.

18) *G. Kirchhoff,* Mechanik, p. III u. 1—5. Über Beschreibung und Er-

maassgebend gewordene Auffassung mag noch weiterer erkenntnistheoretischer Erläuterung bedürfen, jedenfalls ist sie allgemein genug, um in erweiterter Form auch noch der obigen allgemeinen Begriffsbestimmung der Mechanik sich anzupassen.

Sieht man von der naiven, durch *Kant* ein für allemal beseitigten Auffassung ab, dass sich über das Wirken der Dinge an sich auf einander etwas erkennen lasse, so folgt, dass die metaphysische Erklärung der Naturvorgänge überhaupt keine Aufgabe der Naturwissenschaft ist[19]), sondern dass die Mechanik ebenso wie die Geometrie mit den idealen durch Axiome der Anschauung definierten Raumvorstellungen operiert, aber auf Grund bestimmter in Axiomen und Postulaten formulierter Erfahrungsthatsachen ein *Bild* der Wirklichkeit[20]) zu entwerfen sucht, dessen Brauchbarkeit durch die Erfahrung zu bestätigen, resp. weiter zu erproben bleibt. Selbstverständlich kann sich die Aufgabe, ein solches Bild zu entwerfen, nur insoweit lösen lassen, als die betreffenden Vorgänge in ihren gegenseitigen quantitativen Beziehungen bereits als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Ob dies in Bezug auf die Erscheinungen des *organischen Lebens* in weiterem Umfange schon zutrifft, kann hier nicht untersucht werden[20a]).

---

klärung vgl. *Wundt,* Logik 2, p. 282; *Mach,* Wärmelehre, p. 430 ff.; *C. Neumann,* Prinzipien der Galilei'schen Theorie, p. 13 u. 22.

19) Vgl. *H. Burkhardt,* Mathematisches u. naturwissenschaftliches Denken, Beilage Münch. Allg. Zeitung 1897, Nr. 264.

20) Dies ist die wesentlich durch *Maxwell,* On Faraday's lines of force, Papers 1, p. 155 und On the math. classification of physical quantities, Lond. Math. Soc. Proc. 3 (1871) = Scientific Papers 2, p. 257, eingeleitete Vorstellung; vgl. auch *Maxwell,* p. 68 in *Ostwald's* K. B. Nr. 69. Vgl. auch *L. Boltzmann,* Über die Entwicklung der theoret. Physik in neuerer Zeit, Deutsche Math.-Ver. 8 (1900), p. 71. Ähnlich auch *C. Neumann,* Prinzip. d. Galil. Theorie, 1870. Die Existenz der *Green*'schen und ähnlicher Funktionen, die Eindeutigkeit gewisser Lösungen in anderen Problemen hat man geradezu daraus geschlossen, *dass in der Wirklichkeit* der durch jene Funktionen bezeichnete Zustand vorhanden sein müsse. Dieser metaphysische Grund wird hinfällig, wenn man die Theorieen der Mechanik nur als Bilder ansieht, deren Übereinstimmung mit den Erscheinungen keineswegs *a priori* feststeht. Damit soll natürlich der *heuristische* Wert solcher Vorstellungen nicht bestritten werden.

20a) Vgl. *J. Larmor,* Aether and matter, p. 288, *Hertz,* Mechanik, p. 165. — Gegenüber der ganz abstrakten Auffassung moderner Theorieen mag hier noch darauf hingewiesen werden, dass die Untersuchungen von *G. G. Stokes, Helmholtz,* namentlich aber von *W. Thomson* doch im allgemeinen von der Voraussetzung einer durch mechanische Konstruktionen begründeten Einführung der allgemeinen Koordinaten ausgehen, von der erst *Maxwell* in seiner Herleitung der Elek-

Die Mechanik geht dabei allerdings *zunächst* von den *körperlichen Dingen* aus, welche Eindruck auf unsere Sinne machen. Aber schon die einfachsten Vorgänge haben von jeher dazu geführt, über dieses rein sinnliche Erfahrungsgebiet *hinauszugehen*, von Atomen, Molekülen, materiellen Punkten zu reden, neben den ponderablen alsbald auch imponderable Substanzen einzuführen. Sehen doch manche gegenwärtig das vollendete Bild der Naturwissenschaft in einer Lehre, welche alle Vorgänge als *Zustandsänderungen des Äthers* auffassen will.

Als Gesichtspunkte, nach denen man den Wert der Darstellung physikalischer Theorieen in diesem Sinne zu beurteilen hat, bezeichnet *Hertz*[20b]) „diese Bilder müssen so beschaffen sein, dass die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände“; sie müssen logisch zulässig, einfach und zweckmässig und möglichst umfassend sein.

Diese Anschauung befreit uns zugleich von der Verpflichtung, *in der Mechanik selbst den psychologischen Ursprung dieser Bilder zu entwickeln*, so wichtig das auch in anderer Beziehung, z. B. bei einer pädagogischen Behandlung sein mag[21]). Denn eine innere Wahrheit an sich, welche sich durch psychologische Analyse erweisen liesse, besitzen dann diese Bilder überhaupt nicht; ihre einzige Berechtigung liegt in ihrer Zweckmässigkeit. Und wir glauben daher *hier* die Frage, woher diese besonderen Formen der mechanischen Grundvorstellungen stammen, dem Gebiet der philosophischen Analyse überlassen zu sollen, in demselben Sinne wie wir etwa in den Grundlehren der Arithmetik darauf verzichten können, die primitiven Verknüpfungsgesetze des Zählens selbst noch psychologisch besonders zu rechtfertigen.

4. Verschiedene Zweige der Mechanik[21a]). Man pflegt *theoretische, reine, rationelle, allgemeine* (mécanique générale, rationelle, theoretical

---

trizitätsbewegung aus den *Lagrange*'schen Gleichungen den letzten Rest abgestreift hat.

20b) *Hertz*, Mechanik, Einl. p. I; vgl. auch *H. Kleinpeter*, Entwicklung des Raum- und Zeitbegriffs in der neueren Mathematik u. Mechanik und seine Bedeutung für die Erkenntnistheorie, Archiv für system. Philosophie 4, p. 32 (1898).

21) Man vgl. in dieser Hinsicht *Mach*, Beiträge zur Analyse der Empfindungen, Jena 1886; Wärmelehre, p. 422 ff.; *Föppl*, Mechanik 1, p. 21; *Klein* u. *Sommerfeld*, Theorie d. Kreisels, p. 70, Leipzig 1897; *Budde*, Mechanik 1, p. 111; *Lasswitz*, Atomistik 2, p. 23.

21a) Vgl. *Newton*, Principia, praefatio ad lectorem: Mechanicam vero duplicem *veteres* constituerunt: *rationalem*, quae per demonstrationes accurate procedit, et *practicam*. Quo sensu mechanica rationalis erit scientia motuum qui ex viribus quibuscunque resultant. *Newton*'s mechanica practica ist indes Technik.

mechanics) Mechanik von der *angewandten* zu unterscheiden und letztere als *astronomische Mechanik*, *mathematische Physik* und *angewandte Mechanik* (mécanique appliquée, applied mechanics) zu charakterisieren.

Eine völlig scharf definierte Grenze lässt sich zwischen diesen Disziplinen nicht ziehen [21b]). Von jeher sind einzelne Teile der astronomischen Mechanik (z. B. Planetenbewegung) und mathematischen Physik (z. B. Hydrodynamik, Elastizitätstheorie) in den rein theoretischen Werken über Mechanik behandelt. Sieht man es als die Aufgabe der Mechanik an, vollständig klare Bilder der Erscheinungen in mathematischer Darstellung zu liefern, so ist insbesondere der Charakter der *rationellen* Mechanik durch die Forderung bestimmt. *dass diese Bilder ausschliesslich auf der Vorstellung reiner Bewegungsverhältnisse beruhen sollen.* Dem entspricht freilich die astronomische Mechanik in hohem Maasse; während aber die reine Mechanik ihre Probleme selbst insoweit auswählt, als die mathematische Bearbeitung derselben mit den Mitteln der Analyse sich vollständig wenigstens im Prinzip *durchführen* lässt — wobei die Gewinnung numerischer Endresultate oft als Nebensache erscheint — sah man sich in der Astronomie bestimmten Aufgaben gegenüber, die nur mit Hülfe von *Näherungsprozessen* zu erledigen waren, deren Grenzen sich durch die sich verfeinernde Beobachtungskunst stets *verschieben.* — Anders liegen wieder die Verhältnisse in der *mathematischen Physik*; hier sind es vorzugsweise *eigentümliche mathematische Methoden*, die, mit der Potentialtheorie beginnend, vermöge der *Green*'schen Sätze *sowie der vollständig ausgesprochenen Verzichtleistung auf die Erklärung der physikalischen Erscheinungen im alten Sinne* den Untersuchungen ihr besonderes Gepräge verleihen.

Die *angewandte Mechanik* endlich hat im weitesten Sinne zur Aufgabe die statische und dynamische Untersuchung der Baukonstruktionen und Maschinen (siehe IV 8 u. 23), sowie die Lehre von den mechanischen Theorieen derjenigen physikalischen Vorgänge, die bei der Durchführung der Präzisionsmessungen in der Physik in Betracht kommen (IV 7 u. 25). Da hier schon die aus der Erfahrung zu entnehmenden Voraussetzungen vorzugsweise durch *Mittelwerte* ausgedrückt sind, welche durch die *veränderliche* Natur der Materialien bedingt sind, so hat die rein mathematische Durchführung, selbst wenn sie möglich wäre, überhaupt keinen eigentlichen Zweck mehr und muss durch besondere, stets durch die Erfahrung zu kontrollierende

---

21b) Auch die folgenden Erörterungen sind nur als ein Versuch zu betrachten, diese Gebiete in angemessener Weise gegen einander abzugrenzen.

Mittelwertschätzungen ersetzt werden, durch welche zugleich eine Bewältigung der mathematischen Schwierigkeiten überhaupt erst möglich wird. Zudem verlangen die Aufgaben der angewandten Mechanik fast immer die Berücksichtigung solcher Erscheinungen, bei denen infolge der unbekannten Natur der Kräfte (insbesondere derjenigen der Reibung, Zähigkeit und unvollkommenen Elasticität) Energieänderungen im *dissipativen Sinne* eintreten, für die die rationelle Mechanik nur die allgemeinen Schemata zu entwickeln pflegt (siehe IV 8). Selbstverständlich sind ihrem allgemeinen Ansatz nach auch hier die Probleme im Sinne einer rein mathematischen Behandlung zu fassen.

In Rücksicht auf diese Erörterungen rechnen wir im folgenden zur rationellen Mechanik alle Untersuchungen, welche bei der Zurückführung der Naturvorgänge auf Bewegungen keine andern als mathematisch scharf definierte Bilder verwenden und ohne Rücksicht auf eine unmittelbare praktische Verwendung die Lösung der Probleme mit derjenigen Genauigkeit anstreben, welche der jeweilige Zustand der mathematischen Analyse gestattet.

5. Historische Bemerkungen. *Galilei's* Untersuchungen in den Discorsi und der Scienza meccanica enthalten neben der Dynamik der fallenden Körper die Theorie der einfachen Maschinen, die Anfänge der Festigkeitslehre etc. *Varignon* fasst in seiner Nouvelle mécanique die Mechanik als *Statik*, *Euler* in seiner Mechanica sive motus scientia ausschliesslich als *Dynamik* auf. *Newton* kann man als Begründer, *Laplace* als eigentlichen Vollender der mit *Clairaut*, *d'Alembert*, *Lagrange* und anderen beginnenden klassischen Epoche der astronomischen Mechanik ansehen; *Lagrange* gab der rationellen Mechanik ihre charakteristische Form in der Mécanique analytique. Daneben entwickelt sich unter den *Bernoulli* auch die technische Mechanik sowie die mathematische Physik als Hydrostatik und Hydrodynamik. Mit *Poncelet* und *Coriolis* beginnt die eigentliche schöpferische Zeit der technischen Mechanik, allerdings mit vorwiegend dynamischer Färbung; sie wird später durch *Culmann* namentlich in Rücksicht auf die statischen Fragen ausgebaut, während die Ausbildung der mathematischen Physik vorzugsweise durch *Fourier*, *Cauchy*, *Poisson*, *Green*, *Gauss*, *Lamé*, *B. de Saint-Venant*, *F. E. Neumann*, *Stokes*, *Maxwell*, *W. Thomson*, *Kirchhoff*, *v. Helmholtz* und andere erfolgte.

II. Die allgemeinen Prinzipien der Mechanik.

A) Philosophische Prinzipien.

6. Das Kausalitätsprinzip und der Satz vom zureichenden Grunde. Die allgemeinen, d. h. nicht erst auf dem speziellen Gebiete der mathematischen Analyse entstandenen Prinzipien der Mechanik kann man einteilen in *philosophische, rein mathematische* und *mechanisch-physikalische.*

Von den philosophischen Prinzipien muss hier neben dem schon oben erwähnten *Kausalitätsprinzip* der *Satz vom zureichenden Grunde* hervorgehoben werden. Man schloss aus dem letzteren, dass der in Bewegung unabhängig von allen anderen Dingen vorgestellte materielle Punkt seine *Richtung* nicht ändern könne[22]), während ein Gleiches auch von der *Grösse* der Geschwindigkeit zu behaupten erst durch die *dialektische Unterscheidung* von Ursache und Wirkung möglich wird, welche die Ursache *ausserhalb* des Bewegten verlegt[23]). Auch bei der Entwicklung des Kraftbegriffes, den Beweisen für das Parallelogramm der Kräfte, der Betrachtung der Fernewirkung zwischen zwei materiellen Punkten etc., spielt dieser Satz eine historische Rolle[24]).

Dass man aus *bloss logischen* Prämissen keine Entscheidung über *reale* Verhältnisse treffen kann, wird gegenwärtig wohl nicht bezweifelt[25]). Anders aber steht es, wenn der Satz vom zureichenden Grunde in der Form eines logischen Schlusses auftritt, *dessen Prämissen vollständig als aus der Erfahrung bekannt vorausgesetzt werden.* Nimmt man z. B. an, dass die Resultante von auf einen materiellen

---

22) *Euler,* Mechanica, § 56, Theoria motus, § 83, auch Recherches sur l'origine des forces, Berlin, Mém. de l'Acad. 1750, p. 419; *Laplace,* Méc. céleste (Oeuvres 1, p. 15); desgl. *S. D. Poisson,* Mécanique, éd. 2 (übers. v. *Stern*), p. 167. Siehe auch Fussn. 142.

23) So z. B. *Wundt,* Axiome, p. 121.

24) Zu einer systematischen Deduktion der physikalischen Axiome benutzte *Wundt* diese Überlegungen (Axiome, p. 115 ff.)

25) Treffend bemerkt *Mach,* Mechanik, p. 135, der Satz „cessante causa cessat effectus" sei ebenso richtig wie sein Gegenteil, jenachdem man ihn für den Begriff der Geschwindigkeit oder Beschleunigung zur Anwendung bringt. Ähnlich *Helmholtz,* Erhaltung der Kraft, *Ostwald,* K. B. p. 58: „Was viele als Gipfel von *Mayer's* Leistungen ansehen, nämlich die metaphysischen Scheinbeweise für die apriorische Notwendigkeit dieses Gesetzes, wird jedem an strenge wissenschaftliche Methodik gewöhnten Naturforscher gerade als die schwächste Seite seiner Anschauungen erscheinen."

Punkt wirkenden Kräften eindeutig und vollständig durch die Lage und Grösse der letzteren *bestimmt* sei, so *folgt* daraus, dass die Resultante zweier entgegengesetzt gleicher Kräfte oder dreier gleicher unter Neigungswinkeln von 120° gleich Null ist; unter der Voraussetzung, dass für das Gleichgewicht des Hebels *allein* die relative Lage der Kräfte zu demselben maassgebend ist, folgt, dass der beharrliche Ruhezustand der einzig mögliche für den in der „Ruhelage" gleichförmig belasteten gleicharmigen Hebel ist.

7. Teleologische Prinzipien. Von ganz wesentlichem Einflusse sind für die Entwicklung der Mechanik *teleologische* Prinzipien gewesen. Das Prinzip der kleinsten Wirkung ist geradezu von *Euler* [25a]) aus einem solchen Gesichtspunkte abgeleitet; *Gauss'* Prinzip des kleinsten Zwanges, sowie gewisse Prinzipe der Elastizitätstheorie [25b]) knüpfen ebenfalls an solche Vorstellungen an. — Die Frage, ob in der Natur wirklich Thatsachen vorliegen, welche den Gedanken bestätigen, dass mit dem kleinsten Aufwande von Mitteln der grösste Effekt erreicht werde, braucht man indessen hier nicht zu berühren. Bei Überlegungen dieser Art dürfte meistens ein sicheres *Maass* weder der aufgewandten Mittel noch des erreichten Effektes zugrunde gelegt sein, *sodass die Behauptung einen klaren Sinn überhaupt nicht besitzt.* Was aber die Anwendung desselben in der *Mechanik* betrifft, so sind diese teleologischen Gesichtspunkte im *eigentlichen Sinne* schon um deswillen ganz unzutreffend [26]), weil keineswegs — weder beim Prinzip der kleinsten Aktion, noch beim *Gauss*'schen Prinzip — die *wirkliche* Bewegung durch eine Minimumeigenschaft vor allen andern ebenfalls *möglichen* ausgezeichnet ist, sondern nur gegenüber gewissen rein fingierten, im allgemeinen aber *unmöglichen* Bewegungen. Thatsächlich haben sich allerdings diese teleologischen Gesichtspunkte für den Ausbau der Wissenschaft als sehr förderlich erwiesen, und

---

25a) Siehe Fussn. 257.

25b) Siehe Nr. 39 und Fussn. 224.

26) Vgl. *O. Hölder,* Die Prinzipien von *Hamilton* und *Maupertuis,* Gött. Nachr. 1896. Nach *J. Petzoldt,* Maxima, Minima und Ökonomie (Diss. Göttingen, Altenburg 1891) *beseitigen* diese mechanischen Maximum-Minimum-Prinzipien gerade die teleologischen Vorurteile. Vgl. auch *R. Henke,* Über den Zusammenhang der Naturerscheinungen mit der Methode der kleinsten Quadrate (Dresden 1868, 2. Aufl. Leipzig 1894).

Ähnliche Vorstellungen entwickelt in einer weit bestimmteren mathematischen Form, welche als ganz speziellen Fall das Prinzip der kleinsten Wirkung umfasst, *W. Gosiewski* in Prace mat. fis., 3, Warschau 1892 (vgl. das Referat in den Fortschr. d. Math. 24, p. 73 [1892]).

es erscheint in mehrfacher Beziehung von Interesse, die allgemeinen Gründe hierfür aufzusuchen [27]).

8. Mach's formale Prinzipien. *Mach* [28]) hat dagegen auf andere Prinzipien aufmerksam gemacht, welche aller Naturauffassung zugrunde liegen sollen, die der *Ökonomie* und *Einfachheit.* Nach ihm ist es das Ziel aller Wissenschaft, das Gebiet der einzelnen Erfahrungen durch zusammenfassende Beschreibung derart zu ersetzen, dass durch den geringsten Aufwand an Gedankenarbeit dasselbe übersehen werden kann. Dies ist natürlich nur dadurch möglich, dass man die den einzelnen Erfahrungen zugrunde liegenden *Elemente* aufsucht und durch deren gesetzmässige Konstruktion eine Erklärung der Vorgänge liefert, für deren fortschreitende Ausbildung dann wieder rein formale Prinzipien, wie das der *Kontinuität* und *Stetigkeit,* — dem *Hankel*'schen [29]) Prinzip der *Permanenz der formalen Gesetze* vergleichbar —, vor allem aber *die Prinzipien der Analogie* [30]), d. h. die Übertragung gewisser Gedankenreihen, welche für ein Gebiet vollständig entwickelt sind, auf *neue* Gebiete, maassgebend werden.

B) Mathematische Prinzipien.

9. Mathematische Voraussetzungen über die Natur der Funktionen. Insbesondere ergeben sich aus dem Prinzip der Einfachheit gewisse *allgemeine Gesichtspunkte rein mathematischer Art.* Solche liegen

---

27) Siehe *Mach,* Mechanik, p. 443 ff. Auch *Petzoldt* sucht a. a. O. p. 11 einen logischen Grund für das häufige Auftreten dieser Max.-Min.-Sätze anzuführen; man vgl. das von *W. Ostwald* (Leipz. Ber. 45 (1893), p. 599; 47 (1895), p. 37) später ausgesprochene *Prinzip des ausgezeichneten Falls,* das allerdings in seiner Allgemeinheit sehr unklar ausgedrückt zu sein scheint.

28) *E. Mach,* Almanach d. Wiener Akad. 1882, p. 293, Mechanik, p. 471, 481, Wärmelehre, p. 372, 494; vgl. *Petzold,* Max., Min. u. Ökonomie, p. 54; desgl. auch *Mach,* Populär-wiss. Vorlesungen, Leipzig 1896, p. 203 ff. Selbstverständlich lassen sich hier noch viele Betrachtungen heranziehen, z. B. *Newton's* regulae philosophandi; in der klarsten Weise finden sich diese Ideen schon von *Galilei* ausgesprochen; vgl. *Wundt,* Axiome, p. 38; *P. Natorp,* Galilei als Philosoph, Phil. Monatshefte 18, p. 193 (1882). Ähnliche Gesichtspunkte auch häufig in metaphysischem Sinne, z. B. *P. de Fermat,* Opera 1, Paris 1891, p. 173 (1662); Naturam operari per modos faciliores et expeditiores . ., non ut plerique: naturam per lineas brevissimas operari.

29) *H. Hankel,* Theorie d. komplexen Zahlensysteme, Leipzig 1867, p. 11.

30) Über Prinzipien der Analogie vgl. *Mach,* Mechanik, p. 131, *P. Volkmann,* Theoretische Physik, p. 32. Eine Aufzählung der bemerkenswertesten Analogien bei *L. Boltzmann,* Über Faraday's Kraftlinien, *Ostwald* K. B. Nr. 69; vgl. auch *W. Dyck,* Über die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen u. angewandten Mathematik, München 1897, p. 25.

vor, wenn wir den Bewegungsraum als *Euklidischen* mit seiner unendlichen Theilbarkeit[31]), die Koordinaten der Bahnen der Punkte als *stetige*, beliebig oft differentiierbare Funktionen der Zeit[32]), wenigstens insoweit von einzelnen singulären Stellen abgesehen wird, ansehen, wenn wir demgemäss von den Grenzwerten $\dot{s}$, $\ddot{s}$[33]) d. h. den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen reden[34]), wenn wir voraussetzen, dass das Verhältnis von Masse zum Volum bei kontinuierlicher Raumerfüllung bei stets abnehmender Grösse des letzteren sich einem bestimmten, überdies wieder differentiierbarem Grenzwerte, der Dichtigkeit nähere. Die Mathematik ist freilich gegenwärtig so weit entwickelt, dass auch bei Zugrundelegung des allgemeinen Begriffes der stetigen Funktion noch bestimmte Aussagen möglich sind, doch hat sich bisher kein Bedürfnis gezeigt, in die Mechanik diese von der anschaulichen Form der Bewegungsvorgänge weit abliegenden Abstraktionen aufzunehmen[34a]). Man betrachtet es ferner als ein allgemeines Prinzip, dass eine durch Kräfte definierte Bewegung durch ihren Anfangszustand vollkommen bestimmt sei[35]); ausreichend ist dafür, die

31) Vgl. *H. Hertz,* Mechanik, p. 53. Die nicht-euklidische Auffassung ist bereits in umfangreicher Weise und zahlreichen Arbeiten auch in die Kinematik, Statik und Dynamik eingeführt. Wir gehen hierauf nicht weiter ein, da sich bisher keine Veranlassung gezeigt hat, durch die Erscheinungen einer nichteuklidischen Mechanik über die Möglichkeit eines von Null verschiedenen Krümmungsmaasses Aufschluss zu gewinnen. Man vgl. auch die Bemerkung von *O. Heaviside* (Electromagnetic theory, 2 vols., London 1883/99, Bd. 1, p. 2): Now the real object of true naturalists, when they employ mathematics to assist them, is not to make mathematical exercises (though that may be necessary) but to find out the connection of the phenomena.

32) Diese Voraussetzung bei *Helmholtz,* Dynamik, p. 7; ausführlicher *Boltzmann,* Mechanik, p. 10.

33) Die Differentialquotienten nach der Zeit sollen hier der Kürze halber und in Rücksicht auf den historischen Charakter dieses Artikels nach *Newton*'s (Tractatus de quadratura curvarum (1706), Opuscula, Lausannae 1744, Bd. 1, p. 203), namentlich bei englischen Schriftstellern (*Thomson* und *Tait*) gebräuchlicher, Schreibart durch $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ etc. bezeichnet werden.

34) *F. A. Müller,* Das Problem der Kontinuität in der Mathematik und Mechanik, Diss. Marburg 1886, schreibt *Leibniz* (Mathem. Schriften 3, ed. *Gerhardt,* p. 538 ff.) das Prinzip der Kontinuität von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zu.

34a) *P. Appell* u. *Jannaud,* Remarques sur l'introduction de fonctions continues n'ayant pas de dérivée dans les éléments de la dynamique, Paris C. R. 93 (1881), p. 1005; auch Archiv f. Math. u. Physik 67 (1882), p. 160. — In Bezug auf die Anwendung stetiger Funktionen in der Potentialtheorie vgl. *O. Hölder,* Potentialtheorie, Diss. Tübingen 1882.

35) Bei anderen Annahmen kann die Bewegung sehr wohl mehrdeutig

Kräfte als eindeutige beliebig oft differentiierbare, insbesondere als reguläre Funktionen der Koordinaten und Geschwindigkeiten vorauszusetzen.

Die hiermit berührte moderne Entwicklung der Mathematik nach der kritischen Seite hin, welche *F. Klein* als Arithmetisierung der Mathematik[35a]) bezeichnet, insofern als einzige Grundlage derselben der strenge Zahlbegriff erscheint, hat bisher nur in geringerem Grade Einfluss auf die Mechanik gehabt; ja man kann in letzterer gegenwärtig hie und da ein geringeres Maass von Strenge und Systematik bemerken, als früher üblich war. Trotzdem wird man nicht bezweifeln, dass die arithmetisierte Mathematik wenigstens als *Ausgangspunkt* für alle Fragen der Anwendung festzuhalten sein wird. Zunächst würde in der Mechanik die sorglose Verwendung der unendlich kleinen Grössen *wenigstens prinzipiell* zu beseitigen sein, wie dies neuerdings z. B. von *Maggi*[35b]) versucht ist; von Bedeutung erscheinen hier ferner die Untersuchungen von *Poincaré*[35c]) über die exakte Feststellung der Konvergenz der Reihen in den Problemen der Astronomie, sowie der ganze Kreis der Fragen, die sich um die Existenz der Lösungen von Systemen von Differentialgleichungen, namentlich mit Bezug auf das *Dirichlet*'sche Prinzip drehen. Daneben treten aber auch andere Fragen auf, welche sich auf die praktische Verwendung, insbesondere *Vereinfachung* der mathematischen Methoden beziehen, als deren letztes Ziel *hier* doch nicht die abstrakt formulierten Zahlgrössen, sondern nur solche Abschätzungen derselben verlangt werden, welche in Rücksicht auf die Ungenauigkeit aller durch die Erfahrung

---

werden, vgl. *Poisson,* J. éc. polyt., cah. 13, p. 63 u. 106 (1806); desgl. *P. Painlevé,* Leçons, p. 549 ff., der *Poisson*'s Beispiel $\ddot{x} = k^2 x^{1/3}$, welches für $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$ die Lösungen $x = 0$ und $x = ct^3$ hat, durch eine ganze Reihe komplizierterer vermehrt. Auf die Betrachtungen von *J. Boussinesq* (Paris C. R. 74, p. 362 [1877]), der so die Notwendigkeit eines principe directeur, das in die mechanische Unbestimmtheit nach den Gesetzen der Freiheit eingreife, beweisen und dadurch den absoluten Determinismus in einer sonst streng mechanistischen Weltanschauung vermeiden will (vgl. *J. Boussinesq*, Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et la liberté morale, Paris 1878), gehen wir hier nicht ein; über die mathematische Untersuchung solcher singulärer Lagen eines Systems siehe *Painlevé,* Leçons, p. 562.

35a) *F. Klein,* Über Arithmetisierung der Mathematik, Gött. Nachr. 1895, p. 82.

35b) *G. A. Maggi* in den Principii del movimento; in kinematischer Hinsicht vgl. man *J. Tannery*, Deux leçons de cinématique, Ann. éc. norm. (3) 3 (1886), p. 43.

35c) *H. Poincaré*, Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 2 Bde., Paris 1892/93; sur les équations aux dérivées de la physique mathématique, Amer. J. of math. 12 (1896), p. 220.

kontrollierbarer Vorgänge eine hinreichend begrenzte Genauigkeit besitzen[35d]); Fragen, welche gegenüber der gegenwärtigen Neigung der mathematischen Analyse zu möglich abstraktester Vertiefung wichtig genug sind, um eine besondere Behandlung zu verdienen, und in umfassender Weise bisher nicht erörtert zu sein scheinen.

10. Das Homogeneitätsprinzip. Hierher gehört auch das *Homogeneitätsprinzip*. Die Begriffe der Mechanik erfordern die Festsetzung einer Reihe *fundamentaler Einheiten* (z. B. für Länge, Zeit, Masse in der reinen Kinetik), aus denen weitere Begriffe (wie z. B. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft etc.) abgeleitet werden. Es liegt nun in der Natur der Sache, dass bei vielen Betrachtungen *Beziehungen zwischen diesen Begriffen von der Wahl dieser Grundeinheiten unabhängig* sein müssen. Solche Gleichungen bleiben daher invariant, wenn die Fundamentaleinheiten der Maassbestimmung durch irgend welche andere unabhängig von einander ersetzt werden. In diesem Charakter der Invarianz besteht das *Prinzip der Homogeneität*[36]); durch dasselbe wird denjenigen Gleichungen der Mechanik, welche zur Beschreibung von den gewählten Einheiten unabhängiger Vorgänge dienen sollen, ein *formeller Charakter* zugeschrieben, der sich zur Prüfung solcher Gesetze selbst nützlich erweist[37]); siehe den Artikel Maass und Messen, Band V. In einer etwas anderen Form kommt das Prinzip bei der Untersuchung dynamischer Verhältnisse als *Prinzip der Ähnlichkeit* (principe de similitude) zur Verwendung[37a]). — Endlich sei noch an das *Superpositionsprinzip*, als einer unmittelbaren Folgerung aus den Eigenschaften der Lösungen linearer homogener Differentialgleichungen, erinnert.

35[d]) Man vgl. das Gutachten der Philosoph. Fakultät zu Göttingen über die zur Erlangung des *Beneke*-Preises für 1898 eingelaufenen Arbeiten, Gött. Nachr. 1901 und Math. Ann. 55 (1901), p. 143.

36) Die von *J. B. Fourier*, 1822 (Oeuvres 1, p. 137) stammende Lehre von den *Dimensionen* hat *Poisson* zuerst in seinen traité aufgenommen (Mechanik 1, p. 23); man sehe auch *Maxwell*, Elektricität u. Magnetismus 1, § 3; in *W. Voigt*'s Kompendium in besonders ausführlicher physikalischer Durchführung.

37) Über die Verwendung des Prinzipes in methodologischer Hinsicht scheinen auch gegenwärtig noch Unklarheiten zu bestehen, vgl. z. B. die Artikel von *F. Pietzker* und anderen, Unterrichtsblätter f. Mathem. u. Naturwiss. 4 (1898), p. 64 ff.; 5 (1899), p. 31.

37[a]) Dasselbe ist von *Newton* zuerst, Principia, p. 294, aufgestellt; man vgl. *J. Bertrand*, J. éc. polyt., cah. 32 (1848), sowie *F. Reech*, Cours de mécanique, p. 265.

C) Mechanisch-physikalische Prinzipien.

11. Das Kontinuitätsprinzip. In naher Beziehung stehen zu den mathematischen Prinzipien die *mechanisch-physikalischen*, insbesondere die *Kontinuitätshypothese*, die man über die *Materie* [38]), *die bewegliche Substanz*, zugrunde legt. Es erscheint nicht angebracht, hier zu erörtern, ob die Mechanik ein Interesse daran hat, den Begriff der Materie neben dem für sie allein maassgebenden der *Masse* beizubehalten. Die Mechanik geht zunächst von dem Begriff des *materiellen Punktes* [39]) d. h. eines geometrischen aber vermöge seiner Masse unserer Beobachtung zugänglichen Punktes, dann von dem System n solcher Punkte aus, und man wird geneigt sein, die Vorgänge bei einem beliebig grossen n, wenigstens soweit allgemeine Theoreme in Frage kommen, hiernach zu beurteilen. Es ist aber leicht zu sehen, dass man auf

---

38) Dieser nach *K. Pearson,* Grammar, p. 251, für die Naturwissenschaft ganz nutzlose Begriff ist durch *Descartes* eingeführt (vgl. *P. Beck,* Substanz etc. Fussn. 12, p. 25). Über verschiedene Auffassungen des Begriffs der Materie vgl. z. B. *P. G. Tait,* Properties of matter, Edinburgh 1885, deutsch von *G. Siebert,* Wien 1888, p. 13 u. 288.

39) *Lagrange* kennt die Bezeichnung „materieller Punkt" noch nicht, sondern gebraucht dafür, wie *Euler,* der in seiner *Mechanica,* dem *ersten Lehrbuch der analytischen Mechanik,* den *Punkt* als *Element* aller dynamischen Betrachtungen einführt, und *d'Alembert* das Wort (petit) corps, das an die Korpuskulartheorieen des 18. Jahrhunderts (*Hobbes*) erinnert; *Laplace* beginnt ohne nähere Angabe die Mécanique céleste mit dem équilibre du point matériel. Mit Recht bemerkt *É. Bour* (Mécanique 2, p. 6), dass die prinzipiellen Aussagen der Mechanik einen deutlichen Sinn nur für den geometrischen mit Masse behafteten Punkt haben, den er als être de raison bezeichnet, so auch *Th. Despeyrous,* Mécanique 1, p. 5; daneben wird man natürlich gern daran festhalten, dass in Bezug auf mittlere Abschätzungen auch kleine Systeme (Körper) als materielle Punkte angesehen werden können, so lange es sich nicht um rotatorische Erscheinungen an denselben handelt (so z. B. *F. Reech,* Cours de mécanique, p. 39; *A. Föppl,* Mechanik 1, p. 17). *Boltzmann* versteht unter materiellen Punkten „einzelne aus einem Körper herausgegriffene Punkte" (Mechanik, p. 7); bei *Poisson* (Mechanik 1, § 1), *Kirchhoff* (Mechanik, p. 2) ist der materielle Punkt von unendlich kleiner Dimension (so auch *C. Neumann,* Leipz. Ber. 39 [1887], p. 135), eine Bezeichnung, die nur dann Sinn zu haben scheint, wenn man das Unendlich-kleine, das doch nur ein mathematischer Hülfsbegriff ist, als existierend ansieht. Bei *H. Resal* (Mécanique générale, 2. éd. 1, p. 71) heisst es: „on regarde une molécule comme un point géométrique dit matériel. La matière étant indéstructible, elle ne peut se diviser indéfiniment, son dernier état de division est la molécule." Völlig einwurfsfrei ist die auf dem Begriffe der figura materiale gegründete Auffassung bei *Maggi* (Principii, p. 149), der auch *Love* (Mechanics, p. 85) sich anschliesst.

diesem Wege nicht unmittelbar zu der Vorstellung der Bewegung eines kontinuierlich mit Masse erfüllten Raumes kommt[40]).

Übrigens ist es für die mechanische Auffassung nicht wesentlich, ob bei der Vorstellung der Kontinuität die Masse so, wie die naive Ansicht es sich von einer Flüssigkeit vorstellt, den Raum erfüllt, sondern *dass alle bewegungsbestimmenden Merkmale stetige Funktionen des Ortes sind*, wobei auch an beliebig vielen Stellen noch leere Räume bleiben können[41]). Die Mechanik der Kontinua[42]) beruht demnach gegenüber der Mechanik n-gliedriger Systeme auf weit *engeren* mathematischen Voraussetzungen, wie z. B. erhellt, wenn man die Untersuchungen über das Problem der n Körper mit denen der Hydrodynamik vergleicht; sie werden im wesentlichen durch *Euler*'s Kontinuitätsgleichung und durch den Übergang von gewöhnlichen zu partiellen Differentialgleichungen ausgedrückt.

Diese Kontinuitätsfragen spielen auch eine wesentliche Rolle in der Entwicklung der Elastizitätstheorie[43]) und der Kapillarität. Die alte Theorie *Navier*'s erhielt für die Druckkomponenten sechsfache Summen, die *Navier* durch Integrationen bestimmte[44]), hierbei wird aber vorausgesetzt, dass die Wirkung unmittelbar benachbarter Teilchen ebenso verschwindet, wie ein über ein beliebig kleines Gebiet erstrecktes (uneigentliches) Integral, eine Voraussetzung, die sich wenigstens bisher nicht vollständig hat rechtfertigen lassen[45]).

---

40) Die Mathematik entwickelt nach *Weierstrass* in strenger Weise den Begriff des Kontinuums; vgl. *G. Cantor,* Math. Ann. 21 (1883), p. 575, vgl. auch I A 5, p. 201.

41) Über die Frage, ob zur Beurteilung der Eigenschaften *scheinbarer Kontinua* notwendig die Vorstellung der bis ins Unendliche gehenden Theilbarkeit des idealen Raumes herangezogen werden müsse, vgl. *Mach,* Wärmelehre, p. 71.

42) Über die Vorstellung des Kontinuums vgl. *Pearson,* Grammar, p. 171. *H. Poincaré* zeigt (Amer. J. of math. 12 [1896], p. 283), wie sich beim Übergang vom molekularen zum kontinuierlichen Medium die gewöhnlichen Differentialgleichungen in partielle verwandeln: „C'est par un véritable passage à la limite, qu'on passe en suite de l'hypothèse moléculaire à celle de la matière continue.“

Unstetige Funktionen treten dann nur noch vermöge der Anfangszustände und Grenzbedingungen auf; vgl. *Cauchy,* Mémoire sur les fonctions discontinues, Paris C. R. 28 (1849); p. 27 = Oeuvres (1) 9, p. 120.

43) *Poincaré*, Amer. J. of math. 12 (1896), p. 290.

44) *C. L. Navier* (1821), Paris, Mém. de l'Acad. 7 (1827), p. 381.

45) Siehe *Cauchy,* Exerc. 1828 = Oeuvres (2) 8, p. 236; *Boltzmann* erhebt denselben Einwand gegen *Gauss*' Molekulartheorie der Kapillarität, Ann. Phys. Chem. 141 (1870), p. 582.

12. Fernewirkung und Feldwirkung. Ausgehend von *Galilei*'s einfacher Beschreibung der Fallbewegungen erweitert sich in *Newton*'s Prinzipien die Aufgabe dahin, vermöge der beschleunigenden Kräfte, die das Gravitationsgesetz liefert, die Bewegungen der Himmelskörper als notwendige Folge der allgemeinen Mechanik zu *erklären*. Diese *Mechanik der Fernkräfte*, die in *Laplace*'s Mécanique céleste sich geradezu die Aufgabe stellt, *alle* Vorgänge der Natur auf Wirkungen materieller Punkte auf einander, wie sie nach dem Schema des Gravitationsgesetzes erfolgen, zurückzuführen[46]), und deren mathematische Form durch *Lagrange* ein einheitliches Gepräge erhalten hatte, das kaum noch einer weiteren Vollendung zu bedürfen schien, feiert ihre grössten Erfolge in den theoretischen Resultaten, welche bis in die fernsten Zeiten den Lauf der himmlischen Körper, wie es scheint, voraussagen, ja selbst die Entdeckung bisher unbekannter veranlassen.

Neue Impulse erhielt die Mechanik der Fernkräfte durch die erfolgreiche Anwendung auf die Theorieen des Magnetismus und der Elektrizität, welche, durch *Laplace* und *Poisson* begonnen, zuletzt in dem *Weber*'schen Gesetze[47]) gipfeln, das alle Erscheinungen auf diesem Gebiete durch *eine* fundamentale Formel begreifen will.

Es ist interessant, die Wandlungen zu verfolgen, welche die Vorstellung der Fernkräfte im Laufe der Zeit erfahren hat. *Galilei* steht in seinen Anschauungen völlig auf dem Boden der Erkenntnislehre *Maxwell*'s, welche überhaupt keine physikalischen Theorieen, sondern nur eine Beschreibung der Vorgänge auf Grund der notwendigen mathematischen Relationen geben will[48]). Die Theorie der Fernkräfte fand zuerst lebhaften Widerspruch[49]). Erst durch die Erfolge der

---

46) *Laplace,* Méc. cél. 1, p. 1: „Je me propose de présenter, sous un même point de vue ces théories, dont l'ensemble, embrassant tous les resultats de la gravitation universelle sur l'équilibre et sur les mouvements des corps . . . forme la mécanique céleste. Il importe extrêmement d'en bannir tout empirique . . ."

47) *W. Weber,* Elektrodynamische Maassbestimmungen, Leipzig 1846. Werke, 6 Bde., Berlin 1891/94, Bd. 3, p. 132.

48) *Galilei,* Il saggiatore (Opere 6, p. 232): La filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (jo dico l'universo), mai non si puo intendere, se primo non s'impara a intender la lingua è conoscer i caratteri, nei quali è scritto. *Egli è scritto in lingua matematica è i caratteri sono triangoli cerchi ed altre figure matematiche.*

49) *Leibniz,* Mathem. Schriften, ed. *Gerhardt,* 3, p. 964: Ita quidquid ex naturis rerum inexplicabile est, quemadmodum attractio generalis materiae Neutoniana aliaque hujus modi vel miraculosum est vel absurdum. Übrigens sagt *Newton* selbst in dem bekannten Brief an *Bentley:* Dass ein Körper aus der Ferne durch ein Vakuum hindurch . . . einen Körper beeinflussen könne,

astronomischen Mechanik gewöhnte sich das Denken an das bis über die Mitte des 19. Jahrhunderts herrschende Dogma derselben[50]).

Indessen ergab sich auch, dass keineswegs zur Untersuchung der Verhältnisse kontinuierlich ausgedehnter Körper *immer* die Theorie der punktuellen Fernkräfte erforderlich ist. Die Theorieen über das Gleichgewicht und die Bewegung der Flüssigkeiten sind kaum je durch solche Vorstellungen beeinflusst worden; sie zeigen, dass hierbei derartige Ansichten ganz überflüssig sind, und dass es sich nur um Differentialgleichungen handelt, welche für die unmittelbar benachbarten Teilchen die Veränderung der Lage charakterisieren. Allerdings verwendet die Theorie der Flüssigkeiten den Begriff des inneren Druckes, über den auch wohl oft solche Spekulationen angestellt werden, doch tritt derselbe schon bei *Lagrange* in Form des analytischen im Variationsproblem anzuwendenden Faktors λ auf, der ein völlig abstraktes Element der Beschreibung wird. Auch die Kapillaritätserscheinungen, welche von *Laplace* und *Gauss*[51]) nach dem Prinzip der Fernkraftwirkungen erklärt werden, lassen sich einfacher durch solche Differentialformeln darstellen.

Von entscheidender Bedeutung aber wurde die Elastizitätstheorie. Freilich gewinnt auch hier *Navier*[51a]) die Gleichungen der elastischen Medien auf Grund von molekularen Anschauungen, aber *Cauchy*'s Arbeiten zeigen, dass es sich hier nur im Sinne *Faraday*'s um *Feldwirkungen* handelt, durch welche die Vorgänge in der Nähe eines jeden Punktes ganz unabhängig von solchen Hypothesen beschrieben

---

ist für mich eine so grosse Absurdität, dass ich glaube, niemand, der in philosophischen Dingen hinlängliche Denkfähigkeit besitzt, kann jemals darauf verfallen. (Vierter Brief an *R. Bentley*, 25. Febr. 1693, vgl. *F. Rosenberger*, Newton, p. 267.) Über die Lehre von der Fernewirkung in historischer Beziehung vgl. auch *J. C. F. Zöllner*, Wissenschaftliche Abhandlungen, 4 Bde., Leipzig 1878, insbes. Bd. 1, p. 16; 2, p. 1 u. 181.

50) *E. du Bois-Reymond*, Über die Grenzen des Naturerkennens, Reden 1, p. 105, bezeichnet noch 1872 als Erkenntnis der Natur die Auflösung aller Vorgänge in mit Zentralkräften begabte Atome, wie sie systematisch zuerst *R. G. Boscovich*, Theoria philosophiae naturalis, Venet. 1758 gelehrt hatte (vgl. auch *G. Th. Fechner*, die physikalische und philosophische Atomenlehre, Leipzig 1864, p. 153 u. 239). Von diesem Ideal des *Laplace*'schen Geistes (Essai philosophique sur les probabilités 1814 = Oeuvres 7, p. VI) sind wir gegenwärtig weiter entfernt, wie je zuvor. Vgl. *J. Larmor*, Aether and matter, p. 272.

51) *Laplace*, Théorie de l'action capillaire, Méc. céleste 4; *Gauss*, Principia generalia theoriae figurae fluidorum 1829 = Werke 5, p. 29. Vgl. *Volkmann*, Theoret. Physik, p. 240; desgl. Fussn. 45.

51a) Siehe Fussn. 44, dann die Historical introduction der theory of elasticity von *Love*, 1, p. 1—34; 2, p. 1—24.

werden können. So gewinnt *Cauchy* neben den Druckkomponenten, die thatsächlich nur noch an das *Vorhandensein* eines schief zur Trennungsfläche gerichteten Druckes[52]) anknüpfen, und die gegenwärtig als *stress* oder *Spannung* bezeichnet werden, mittelst des Deformationsellipsoides die Komponenten der Deformation, des *strain* oder der elastischen Formänderung. So wird die Mechanik der physikalischen Körper zur *Analysis* von *stress* und *strain*[53]) bezw. der Beziehung zwischen beiden Grössensystemen; damit gelang es auch, die irrtümlichen Folgerungen der alten *Navier-Poisson*'schen Theorie zu beseitigen und eine viel allgemeinere und zutreffendere Ansicht über das Wesen der elastischen Konstanten zu gewinnen[54]).

Der mathematisch physikalische Takt, der offenbar bei der Handhabung der Feldwirkung erforderlich wird, hat sich freilich an den Leitmotiven der Molekulartheorieen herangebildet, und erscheint noch weit mehr in Anspruch genommen bei den durch *Faraday*'s Ideen veranlassten Theorieen *Maxwell*'s, die in den letzten 30 Jahren der Lehre von der Feldwirkung[55]) die entscheidende Stellung, welche sie gegenwärtig einnimmt, verliehen haben. In prägnanter Weise kommt diese Darstellung zum Ausdruck in der Mechanik der deformierbaren Körper des Treatise von *Thomson* und *Tait*, sowie in der *Hertz*'schen[56]) Entwicklung von *Maxwell*'s Grundgleichungen.

Die allgemeinen Ansichten über den *erkenntnistheoretischen Wert der atomistischen Vorstellung*, die durch Fernkräfte verbundene materielle Punkte annimmt, und der *phänomenologischen Auffassung des Kontinuums* werden dadurch auch gegenwärtig nur *mittelbar* beeinflusst. Es ist hier nicht der Ort, auf diese zum Teil von der Individualität des einzelnen Forschers abhängigen Fragen einzugehen[57]). Entscheidend

---

52) So *Cauchy* schon 1823 im Paris, Soc. Philom. Bull. = Oeuvres (2) 3 (noch nicht erschienen); vgl. Exercices 1827 = Oeuvres (2) 7, p. 61.

53) Diese Bezeichnungen von *Rankine* (Cambr. and Dubl. Math. J. 1851 = Misc. scientific papers, London 1881, p. 68; Lond. Roy. Soc. Proc. 1855, p. 119).

54) *Poisson*, Paris, Mém. de l'Acad. 18 (1842), p. 3, hat freilich allgemeinere Annahmen gemacht, welche diese Mängel beseitigen sollen; durch *W. Voigt*'s Annahme von molekularen Drehungsmomenten wird dies allerdings erreicht, Gött. Abh. 34 (1887), p. 11.

55) So *Maxwell* seit 1864 in der Dynamical theory of the electromagnetic field = Papers 1, p. 256. *W. Thomson*, Phil. Mag. (4) 1 (1851), p. 179.

56) *Hertz*, Gött. Nachr. 1890, p. 106.

57) *H. Poincaré*, Électricité et optique, introd. p. VI: „Les anciennes théories de la physique nous donnaient une satisfaction complète; ils semblent vouloir donner à chacune des branches de la physique la même précision, qu'à la mécanique céleste.“ Nach *Boltzmann* (Verhandl. deutscher Naturf., Leipzig

wird diejenige Ansicht sein, welche die grössten Erfolge aufzuweisen hat. Der Physiker wird nicht im Zweifel sein, wo dieselben liegen; doch ist zu bemerken, dass gerade für das klassische Beispiel der Fernewirkung, die Gravitation, sich bisher keine *allgemein* befriedigende Ableitung aus der Vorstellung einer kontinuierlich verbreiteten Materie ergeben hat. Wer vermag überhaupt zu sagen, ob die phänomenologische Auffassung sich nicht zu einer psychologischen umgestalten kann, welche an Stelle scheinbar kontinuierlicher Vorgänge *Mittelwerte aus diskontinuierlichen Prozessen* setzt; Vorstellungen, welche in der mechanischen Theorie der Gase bereits weitläufig ausgebildet vorliegen, und auch in anderen allgemeinen Ideen der Gegenwart verbreitet erscheinen. Bei einer exakten Verfolgung derselben gewinnen die Untersuchungen der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* eine hervorragende Bedeutung, die auch für die prinzipielle Auffassung der rationellen Mechanik in Betracht kommen kann. Wir treten indes auf dieselben hier nicht ein, da sie in systematischer Weise in der letzteren bisher nicht aufgenommen sind, und verweisen auf IV 26, sowie auf Band V.

Auf die eigentlich *energetische* Phänomenologie *hier* schon näher einzugehen, ist nicht unsere Absicht. Während die alte Fernewirkung auf Grund expliciter Kraftformeln, die meist mit Hilfe von dreifachen *Integralen* gewonnen werden, die Bewegung der kleinsten Teilchen der Materie zu erforschen sucht[58]), setzt die Feldwirkung an die Stelle Relationen zwischen *Differentialausdrücken*, welche die Beziehungen zwischen den benachbarten Teilchen regeln, ohne dass solche zu den anderen Teilen des Raumes bekannt zu sein brauchen. Noch ein *dritter*

1900, p. 112) ist die „alte“ Mechanik die einzige, welche klare Vorstellungen enthält; derselbe macht (Über die Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft, Ann. Phys. Chem. (2) 60 [1897], p. 231) das Argument geltend, dass die Beschreibung des kontinuierlichen Mediums durch Differentialgleichungen einen Sinn nur vermöge des Grenzüberganges von atomistischen Vorstellungen aus hat.

Das Entgegengesetzte behauptet *Volkmann* (Über die notwendige und nicht notwendige Verwertung der Atomistik in den Naturwiss., Ann. Phys. Chem. (2) 61 (1897), p. 196), obwohl (Theor. Physik, p. 242) für gewisse physikalische Vorgänge atomistische Bilder bis jetzt noch wesentlich erscheinen.

Nach *Mach*, Wärmelehre, p. 428, ist der Atomismus der Versuch, die Substanzvorstellung in ihrer naivsten und rohesten Gestalt zur Grundlage der Physik zu machen. Über die gegenwärtigen, vielfach zwischen atomistischen Vorstellungen und der Voraussetzung des Kontinuums schwankenden physikalischen Theorieen vgl. das *Beneke*-Preis Gutachten der Göttinger Philos. Fakultät, Gött. Nachr. 1901 und Math. Ann. 55 (1901), p. 143.

58) *Hertz*, Mechanik, p. 15, beschreibt sehr anschaulich den nicht nur mathematisch komplizierten Charakter dieser Anschauung.

Standpunkt ist möglich: der, mit Hilfe von *Integralformeln* die bestimmenden Verhältnisse ganzer Systeme zu anderen auszudrücken, *ohne dabei auf die Zwischenzustände achten zu müssen,* welche dabei jene Systeme durchlaufen haben. Dies ist die Richtung, nach der sich die *energetische Behandlungsweise der Mechanik*[58a]), wenigstens in ihrer methodologischen Form, entwickelt hat.

III. Die Grundbegriffe der Mechanik.

A) Phoronomische Grundbegriffe.

13. Die Anschauungen von Raum und Zeit. Die Grundbegriffe der Mechanik sind zunächst rein *phoronomischer Art,* insoweit sie den blossen Bewegungsvorgang[59]) in Raum und Zeit betreffen; man kann es als ein *Axiom* ansehen, dass jede Ortsveränderung *nur in der Zeit* vor sich geht[60]). Dass alle Bewegungen *stetige* Ortsveränderungen sind, denen stetig sich ändernde Zeitwerte entsprechen, scheint zu unseren fundamentalsten Anschauungen zu gehören[60a]). Die Zeit erscheint dabei zunächst als eine stets wachsende Variabele, doch findet die Betrachtung *negativer* Zeitgrössen, besonders in der Mechanik umkehrbarer Prozesse, fortwährend Anwendung[60b]). Es lässt sich natürlich eine *reine Bewegungslehre* denken, welche der Geometrie völlig an die Seite zu stellen ist und mit dem abstrakten Raum, als dem Substrat aller geometrischen Konstruktion und den abstrakten Zeitgrössen, welche dann die Rolle einer vierten Variabeln spielen, operiert[61]). *Aber*

58a) Siehe Nr. 47.

59) Vgl. im folgenden namentlich *L. Lange,* Bewegungsbegriff, Leipzig 1886.

60) So schon *Jak. Hermann* in seiner Phoronomia, Amstelod. 1716, p. 1, einer im Anschluss an *Newton's* Principia abgefassten Dynamik der festen und flüssigen Körper.

60a) *W. K. Clifford* entwickelt gelegentlich, Lectures and essays 1, p. 112, auf Grund bekannter optisch-physiologischer Erscheinungen die Vorstellung, dass die Zeit aus diskreten Momenten besteht, denen ebenso diskrete Positionen der „bewegten" Körper entsprechen.

60b) Übrigens kann auch die Anwendung *imaginärer* Zeitgrössen als spezieller Fall von projektiven Transformationen nützlich werden, vgl. z. B. *P. Appell,* Sur une interprétation des valeurs imaginaires du temps en mécanique, Paris C. R. 87 (1878), p. 1074, auch *L. Lecornu,* ibid. 110, p. 1244; *P. Painlevé,* Leçons sur l'intégrat., p. 226. Die Einführung imaginärer Zeiten wird vom rein mathematischen Gesichtspunkt aus schon bei ganz einfachen Problemen nötig, wenn man die Koordinaten als *eindeutige* analytische Funktionen allgemein darzustellen wünscht; vgl. z. B. *F. Klein,* The mathematical theory of the top, Princeton lectures, New-York 1897, p. 33, 52.

61) Die Idee einer solchen Bewegungslehre (Phoronomie, Kinematik), welche

dann fehlt der prinzipielle Zusammenhang mit der Mechanik der Wirklichkeit, in der doch die Bewegungen ihrem zeitlichen Verlaufe nach erkannt werden sollen[61a]).

Newton sah sich daher veranlasst, sowohl dem *Raume* als der *Zeit* eine allerdings transcendente *Realität* beizulegen[62]). Der *Newton*'sche absolute Raum ist ein immaterielles Medium, an sich unbeweglich und unerkennbar[63]), das gleichwohl das feste Bezugsystem für alle Bewegungen abgeben soll, und die absolute Zeit ist einer Normaluhr zu vergleichen, die alle Vorgänge mit ihrem Pendelschlag begleitet. Die in dieser Vorstellung liegenden Schwierigkeiten wurden schon von *Euler* sehr deutlich ausgesprochen, während man sich später daran gewöhnte, über sie als unvermeidliche hinwegzusehen; so wird es zur stehenden Redensart in der Mechanik[64]) „on ne définit ni le

---

man oft auf *A. M. Ampère,* Essai sur la classification des sciences, 2 Bde., Paris 1834—43; 1, p. 50, zurückführt, ist schon in *Kant's* metaphysischen Anfangsgründen, 1786, ausgesprochen. — Vom Standpunkt des reinen Analysten sagt z. B. *Lagrange,* Théorie des fonctions, éd. 2 (1813), p. 311: Ainsi on peut regarder la mécanique comme une géométrie à quatre dimensions et l'analyse mécanique comme une extension de l'analyse géométrique. Derartige Ansichten bestehen auch noch gegenwärtig, vgl. z. B. *O. Rausenberger,* Analyt. Mechanik, p. 1. Man kann natürlich auch den Weg einschlagen, *zuerst* ein widerspruchsloses, völlig abstraktes Bild der Erscheinungen vermöge der geometrisch-mechanischen Fundamentalbegriffe zu entwickeln, und *dann* die weiteren Bestimmungsweisen einzuführen, welchen letztere in Rücksicht auf die Möglichkeit einer Beziehung auf die Wirklichkeit unterworfen werden müssen; bei dieser Anordnung würde die reine Bewegungslehre z. B. eine andere systematische Stellung einnehmen. Dies ist die von *Hertz,* Mechanik, p. 53 und 157 scharf festgehaltene Anschauung.

61a) Die Disziplin der *Kinematik,* vgl. IV 4, kann sich natürlich auf diesen abstrakten Zeitbegriff als methodisches Hülfsmittel bei ihren Beweisen stützen. Sie bildet einen wichtigen Teil der descriptiven Mechanik, die seit *Poncelet's* Vorlesungen (1836) sich zur graphischen Darstellung von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen (in Bezug auf letztere bei *R. Proell,* Versuch einer graphischen Dynamik, Leipzig 1874) und damit zu der Idee einer *graphischen Dynamik* sich fortbildet, deren allgemeine Ziele freilich erst neuerdings durch *K. Heun* skizziert sind (*K. Heun,* Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik, Deutsche Math.-Ver. 9 (1900), p. 112). *A. Schönflies* entwickelt den Begriff einer reinen Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung, Leipzig 1886, welche die Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung in den Beweisen vermeidet.

62) *Newton,* Principia, p. 5—7; vgl. *Lange,* p. 47—72; *Laplace* beginnt die Mécanique cél. p. 4 mit den Worten: On s'imagine un espace, sans bornes, immobile et pénétrable pour la matière, c'est aux partiees de cet espace *réel* ou *idéal* que nous rapportons par la *pensée* la position des corps.

63) *Newton,* Princ. p. 7: Verum quoniam hae spatii partes videri nequeunt.

64) *Newton,* Princ. p. 5: Nam tempus spatium locum et motum ut omni-

temps ni l'espace"; höchstens hielt man es für nötig, den Begriff gleicher Zeiten zu erörtern.

Aber seit *Kant*[64a]) ist die Erkenntnis allgemein durchgedrungen, dass Raum und Zeit Formen unserer Anschauung sind, denen nur transcendentale Realität zukommt, und an dieser Einsicht werden auch alle tiefern psychologisch-physiologischen Erkenntnisse über den *Prozess* der Entstehung und weiteren Ausbildung dieser Anschauungsformen nichts ändern[65]). Damit ist aber zugleich ausgesprochen, dass man von Bewegung im mechanisch mathematischen Sinne nur reden kann, wenn man ein Koordinatensystem angiebt, in Bezug auf das die Lage des sich bewegenden Punktes definiert ist[66]).

Schon *Euler*[67]) spricht es vollkommen klar aus, dass alle Bewegung, d. h. Ortsveränderung, nur *relativ* sei, freilich nicht ohne hinzuzufügen, dass man doch an der absoluten Bewegung festhalten

---

bus notissima non definio; *Poisson,* Mécanique 1, § 112: *Duhamel,* Mécanique 1, p. 3: „La notion de temps est une de celles, qui ne sont pas susceptibles de définition, mais ce qu'il faut définir, c'est l'égalité des temps."

Allerdings ist es ein naives, des wissenschaftlichen Betriebes unkundiges Verlangen, alles definieren zu wollen (*Boltzmann,* Wien. Ber. 106 (1897), p. 83). Wenn es aber auch nicht die Aufgabe der einzelnen Wissenschaft ist, durch psychologische Analyse ihre Begriffe vollständig zu definieren, so muss sie doch jedenfalls den *ihr* eigentümlichen *Sinn* derselben genau bezeichnen.

64a) Die Ansicht, dass Raum und Zeit keine objektive Realität besitzen, ist natürlich weit älter, als *Kant's* Kritik der reinen Vernunft (1781). Schon *Euler* polemisiert (Reflexions sur l'espace et le tems, Berlin, Mém. de l'Acad. 1748, p. 324), gegen die „Metaphysiker", welche dieser Ansicht waren, die ihm für die Mechanik unannehmbar erschien. Nach dem auf *Kant's* Terminologie zurückgehenden Gebrauche bezeichnet man als *transcendent* Gegenstände, die jenseits der Grenzen der Erfahrung liegen, dann auch Behauptungen, die sich auf solche Gegenstände beziehen. *Transcendental*, d. h. die Voraussetzungen der Erkenntnis betreffend, heissen dagegen Untersuchungen, die sich auf solche Voraussetzungen beziehen, sowie diese letzteren selbst. Die Lehre von dem Vorhandensein eines absoluten Raumes, einer absoluten Zeit, ist hiernach eine transcendente; die Lehre von der Idealität von Zeit und Raum eine transcendentale.

65) Dagegen fällt mit der Beseitigung der *Kant'*schen Lehre von der Apriorität des Raumes und der Zeit in *dem* Sinne, wie ihn *Kant* selbst gewollt hat, auch das Dogma, dass in der Mechanik nur das als zeitlich und räumlich Aufgefasste als objektiv wahr anzusehen sei; vgl. *P. Beck,* Diss. p. 37.

66) Vgl. *Pearson,* Grammar, p. 233. Die Frage nach dem transcendentalen Charakter der Bewegung überhaupt (vgl. z. B. *A. Höfler,* Studien, p. 127, 133) berühren wir nicht; sie gehört nicht in die Mechanik.

67) *Euler*, Theoria motus (1765); desgl. Reflexions sur l'espace et le tems, Berlin, Mém. de l'Acad. 1748, p. 324 Über *Euler's* Ansichten vgl. *Lange,* Bewegungsbegriff, p. 87—97.

müsse[68]). Weit schärfer sagt *Kant*[69]): „Der absolute Raum ist an sich nichts und gar kein Objekt,... sondern bedeutet nur einen jeden einzelnen relativen Raum..., den ich mir über jeden gegebenen.. hinausrücke. *Ihn zum wirklichen Dinge zu machen.., heisst die Vernunft in ihrer Idee missverstehen*", will aber gleichwohl die Rotationsbewegung als etwas Wirkliches ansehen. Obwohl sich von seiten der Mathematik die Lehre von der relativen Bewegung[70]) zu grösster Vollkommenheit ausbildete, blieb doch für die Mechanik die Voraussetzung des *absolut festen Koordinatensystems*[71]) (sowie auch der *absoluten Zeit*, in die noch dazu astronomische Erörterungen über das Maass der Zeit in unklarer Weise eingemischt werden) bestehen.

Duhamel und *C. Neumann* haben[72]) in nachdrücklicher Weise auf diese Mängel aufs neue aufmerksam gemacht. Nach *Neumann* ist das Prinzip der Trägheit völlig unverständlich[73]), wenn nicht hinzugefügt wird, in Bezug auf welches Koordinatensystem sich der „sich selbst überlassene" materielle Punkt geradlinig bewegt und was gleichförmige Bewegung ist; man muss, um diese Aussagen verstehen zu können, einen hypostasierten unbeweglichen Raum[74]), „den starren Körper A"

---

68) Theoria motus, § 81.

69) *Kant*, Metaph. Anfangsgründe, Wiener Ausgabe, p. 16; bei *Lange*, p. 97—108.

70) *G. Coriolis*, J. éc. polyt. cah. 24 (1835), p. 142.

71) So z. B. *F. Minding*, Mechanik, p. 1: „Es ist klar, dass jedem Körper eine absolute Bewegung zukommt." Dagegen kann man sich mit der Äusserung von *R. Hoppe* (Archiv f. Math. (2) 16 [1898], p. 8) die Auffassung der Bewegung als absolute sei eine Bedingung der Erkenntnis, noch immer einverstanden erklären, auch wenn man die Relativität der Bewegung völlig zugiebt.

72) *J. M. C. Duhamel*, Sur les principes de la science des forces, Paris, C. R. 69 (1869), p. 773 und ausführlicher in den Méthodes 4 (1870), p. 454 sagt: Le mouvement absolu généralement admis jusqu'ici est une *pure chimère*, fondée sur une autre chimère, celle d'un espace éternel et absolu. Nous avons encore à combattre une conception aussi chimérique que celle de l'espace, qui fait du temps un être réel nécessaire indépendant de toute création; vgl. auch daselbst p. 224 und XVI im avant-propos. Die Ansichten *Duhamel*'s scheinen weniger beachtet zu sein. *F. Reech*, Cours de mécanique, Paris 1852, äussert sich schon früher folgendermassen: Cette loi d'inertie ne sera plus un principe ni un fait d'expérience, mais une pure convention, und will die Statik begründen, sans qu'il jamais il faille invoquer ni l'hypothèse de la rigidité des corps, ni celle d'un état absolu de repos, ni celle d'un état absolu de mouvement rectiligne uniforme dans l'espace. Übrigens entwickelt *Th. Young* in seinen Lectures 1, p. 18 und 2, p. 27 ausführlich ganz ähnliche Gesichtspunkte wie *Duhamel*. — *C. Neumann*, Die Prinzipien der Galilei-Newton'schen Theorie, Leipzig 1870.

73) *Neumann*, Prinzipien, p. 14.

74) *Neumann*, Prinzipien, p. 15.

als existierend annehmen, dessen drei Hauptträgheitsaxen die Koordinatenaxen liefern. Dagegen schien ihm im Zusammenhange *dieser* Auffassung eine neue Wendung für das Zeitmaass zu gelingen: *Je zwei* sich selbst überlassene materielle Punkte bewegen sich so, dass gleichen Wegstrecken des einen stets gleiche des anderen korrespondieren[75]). Bezeichnet man dann die Zeiten, in denen der eine gleiche Strecken zurücklegt, als *gleich*, so spricht das Trägheitsgesetz die *Behauptung* aus, dass *jeder* sich selbst überlassene Punkt gleichförmig und geradlinig fortschreitet[76]).

14. Die Zeitmessung. *D'Alembert*[77]) suchte eine metaphysische Definition gleicher Zeiten zu gewinnen: Gleiche Zeiten sind solche, in denen identische Körper identische Bewegungsvorgänge unter identischen Umständen ausführen. So anschaulich diese Definition zu sein scheint — man denkt dabei etwa an ein mathematisches Pendel, das in gleichen Elongationen schwingt —, so muss dabei doch schon die *erkennbare Identität* der Wirkungen *vorausgesetzt* werden.

Diese Schwierigkeit hängt eng zusammen mit der Voraussetzung des *unbeeinflussten Bezugsystems*, die sowohl der *Neumann*'schen, als auch späteren Auffassungen (*Lange, Streintz*) zugrunde liegt, bezw. des materiellen Punktes. Man wird vielleicht sagen, ein Punkt sei dann unbeeinflusst, wenn er durch keine Lagenveränderung der ausser ihm vorhandenen Körper irgend welche Änderungen seines Bewegungszustandes erfährt[78]). Aber der letztere kann doch schliesslich nur durch das Fehlen von Unterschieden in den Koordinaten und Geschwindigkeiten, d. h. durch zeitliche Bestimmungen erkannt werden, setzt also schon das Zeitmaass *voraus*.

So scheint man sich in der That immer weiter in unauflösliche Widersprüche zu verlieren. Ein Ausweg scheint hier nur möglich, wenn

---

75) *Neumann*, Prinzipien, p. 18.

76) *Neumann's* Zeitvorstellung auch bei *Maxwell*, Substanz und Bewegung, p. 35.

77) *d'Alembert*, Traité 2. éd. (1758); in der Übers. v. *A. Korn*, *Ostwald* K. B., Nr. 106, findet sich diese Stelle *nicht;* ähnlich auch *Poisson*, Mécanique 2, § 111, von dessen Auffassung sich *H. Streintz* (Grundlagen, p. 85) befriedigt erklärt. *Euler* sagt einfach, Theoria motus, § 18: Was gleiche Zeiten sind, sieht ein jeder ein, auch wenn vielleicht nie in beiden gleiche Änderungen eintreten, aus denen auf jene Gleichheit geschlossen werden könnte. Die *d'Alembert*'sche Auffassung findet sich weit vollständiger schon von *J. Locke* (1690) entwickelt.

78) *P. Duhem* (Commentaire 1892, p. 274) spricht von dem Begriff unabhängiger Systeme, falls die Parameter derselben unabhängig von den Parametern anderer Systeme sich ändern können, wogegen sich vom abstrakten Standpunkt aus nichts einwenden lässt.

man *entweder* von der ganz abstrakten Auffassung der Voraussetzung des *absoluten Determinismus* ausgeht, bei der alle variabeln Grössen, welche die Natur der Körper bestimmen, nur von einer *Grundvariabeln* abhängen, die nun t genannt wird[79]), oder, *was der Rückkehr zu einer natürlichen Auffassung mehr zu entsprechen scheint*, sich durch den *praktischen Hinweis* auf das thatsächliche Zeitmaass befriedigt erklärt, welches durch die Dauer der Erdrotation resp. durch die besten Chronometer, welche sich anfertigen lassen, gegeben wird[80]).

Dabei ist es denn unwesentlich, ob wegen der an einem Chronometer von idealer Vollendung in längeren Zeiträumen nachweisbaren Ungleichförmigkeit der Erdrotation das Zeitmaass etwa durch die Schwingungsdauer des Lichtes einer bestimmten Farbe, etwa einer der Natriumlinien[81]), oder die durch *Maxwell*, *Helmholtz* u. a. vorgeschlagene Umlaufszeit eines idealen Planeten um einen Centralkörper ersetzt wird.

15. Philosophische Ansichten der Gegenwart. Man sieht hieraus, dass eine allgemeine *Einigung* über diese dem Grenzgebiet der Philosophie und Mechanik angehörenden Fragen bisher trotz mancher Versuche nicht erreicht ist. Auch die philosophischen Ansichten gehen noch diametral auseinander. *Volkmann* bezeichnet die Existenz einer absolut gleichförmig dahinfliessenden Zeit als ein notwendiges Postulat[82]), ganz ebenso äussert sich auch *Liebmann*[83]); andere geben rückhaltlos die Relativität von Zeit und Raum zu. Alle diese Schwierigkeiten sind schon ausführlich von *Locke* hervorgehoben[84]), aber auch in den neuesten Arbeiten nicht beseitigt.

J. Epstein[85]) will analog mit den *Helmholtz*'schen Axiomen der

79) Vermöge dieser Auffassung kommt man dann wieder zu *Lagrange*'s Standpunkt, Fussn. 61.

80) So *Hertz*, Mechanik, p. 158; *Boltzmann*, Mechanik, p. 8; *Love*, Mechanics, p. 3 ff.

81) *Thomson* u. *Tait*, Treatise 1, part 1, p. 226. Für die Längeneinheit derartige Untersuchungen bei *A. A. Michelson*, Les méthodes interférentielles en métrologie, J. de phys. (3) 3 (1894), p. 1. — Die auf der *gegenwärtigen* Dauer der Erdrotation gegründete Bestimmung der Zeitmessung steht mit der Vorstellung, dass diese an ein und demselben idealen Chronometer gemessene Dauer im Lauf der Zeit wechseln könne, nicht im Widerspruch.

82) *Volkmann*, Theor. Physik, p. 51 u. 71.

83) *O. Liebmann*, Zur Analysis der Wirklichkeit, p. 70 ff., 87, 93—95; *Wundt*, Logik 1, p. 430, scheint der entgegengesetzten Ansicht zu sein.

84) *J. Locke*, An essay concerning human understanding, book 2, chapt. 14, § 3 (1690); vgl. die Ausg. Oxford 1894, vol. 1, p. 249; siehe Fussn. 77.

85) *J. Epstein*, Die logischen Prinzipien der Zeitmessung, Diss. Leipzig 1887 (Berlin 1887).

Geometrie als Axiome der Zeitmessung ansehen, dass die *Dauer* eines Vorgangs unabhängig von der Zeit und dem Orte seines Stattfindens ist[86]. Ob sich mit dieser Aussage ein klarer Sinn verbinden lässt, mag dahinstehen; jedenfalls besteht ein *Unterschied* zwischen der Raum- und Zeitanschauung, der eine so analoge Behandlung unmöglich macht.

Dass wir in unserer Raumanschauung das Vermögen besitzen, auf Grund der axiomatischen Aussagen völlig definierte Konstruktionen vorzunehmen, insbesondere die Gleichheit zweier Strecken durch „Aufeinanderlegen" definieren zu können, scheint ebenso unzweifelhaft, als dass diese Konstruktionen sich auf unser räumliches Bild von der Wirklichkeit anwenden lassen. Aber von dieser Dogmatik grundverschieden ist die andere, welche ein ähnliches für die Vorstellung der Zeit behaupten will. In uns finden wir zunächst nur die Vorstellung des *Nacheinander*, dann die der *Dauer*, welche aber sobald nicht *gleichzeitige* Ereignisse verglichen werden, sondern solche, von denen das eine früher endet wie das andere, nur auf den unbestimmten Empfindungen der Ermüdung und Erholung beruht[87]. Auf keine Weise aber können wir in unserer *innern* Anschauung zu *verschiedenen* Zeiten stattfindende Ereignisse hinsichtlich ihrer Dauer vergleichen, was erforderlich ist, wenn man mit *Epstein* eine auf Axiome der Anschauung gegründete Zeitmessung analog zu dem Verfahren der Geometrie einführen will[88].

16. Das Bezugsystem der Mechanik. Hatte *C. Neumann* durch die Forderung des existierenden Körpers A drastisch das Fehlen eines Bezugsystems bezeichnet, so suchte nun *Streintz*[89] dasselbe zu liefern. Absolute Translation ist ihm selbstverständlich etwas Unerkennbares; die Aussage, dass das Bezugsystem keine absolute Translations*beschleunigung* besitzen darf, ersetzt er daher durch die Forderung, dass dasselbe *unbeeinflusst* sein soll. Dagegen hält *Streintz* fest an der Möglichkeit einer absoluten Rotationsbewegung[90]; diese kann dann natür-

---

86) So auch *Maxwell*, Substanz und Bewegung, p. 15.

87) Dagegen behauptet *O. Lodge*, Phil. Mag. (5) 36 (1893), p. 8: „The conception of uniform motion is based on a simple primary muscular sensation."

88) Unverständlich bleibt es daher auch, wenn *Hertz*, Mechanik, p. 53, einfach die Zeit als die „unserer innern Anschauung" definiert; desgleichen, wenn man physiologisch offenbar erworbene Fähigkeiten, wie Zählen im Takt u. dgl., als primäre ansehen will.

89) *H. Streintz*, Die physikal. Grundlagen der Mechanik, Leipzig 1883. Ähnliche Ideen zum Teil schon bei *Mach* in der Mechanik von 1883; siehe dessen Kritik der *Streintz*'schen Betrachtungen, Mechanik, p. 232.

90) Diese *direktionelle Ruhe* nimmt auch *Maxwell* an, Substanz und Be-

lich an den scheinbaren Eigenbewegungen eines *gyroskopischen Kompasses*, d. h. eines nach der Methode *Cardani*'scher Aufhängung um eine freibewegliche Axe rotierenden Rotationskörpers, eines *Gyroskops* erkannt, und, wenn man die betreffenden Lehrsätze der Mechanik kennt, auch verstanden werden. In praktischer Hinsicht ist zuzugeben, dass man in den gyroskopischen Kompass ein Mittel besitzt, um Bezugskörper zu gewinnen, in Bezug auf die das *Galilei*'sche Prinzip gilt[91]); zu beanstanden aber bleibt hier die Annahme der absoluten Rotation, die mit den gegenwärtigen erkenntnistheoretischen Grundsätzen schwer vereinbar ist, sowie in methodischer Hinsicht die Einführung eines komplizierten Versuches als Voraussetzung der weiteren Erkenntnis, dessen Verständnis erst nach manchen Vorbereitungen in der Dynamik gegeben werden kann.

L. Lange hat diese Lücke auszufüllen gesucht, indem er ein System angab, welches wenigstens keinen logischen resp. methodologischen Fehler besitzt und zugleich nicht, wie *Neumann*'s Körper A, *transcendent real*, sondern nur *ideal* ist[92]). Es ist dies das folgende:

Schon *W. Thomson*[93]) hatte vorgeschlagen, als Bezugsystem die Konfiguration von vier materiellen Punkten anzusehen, die gleichzeitig von einem Orte aus geschleudert werden. Nach *Lange* ist jedes etwa *Descartes*'sche Koordinatensystem, dessen als starre Drähte, auf denen

---

wegung, p. 95. *B.* u. *J. Friedländer*, Absolute und relative Bewegung (Berlin 1896), wollen sogar durch Versuche diese Frage zu entscheiden suchen. Eine allgemeine Einigung über diese Frage (vgl. auch *Kant*, metaphys. Anfangsgründe, p. 96) ist bisher noch nicht erfolgt; man vgl. die Kritik der verschiedenen Anschauungen bei *Mach*, Mechanik, p. 221—240. *L. Lange* (Bewegungsbegriff, p. 63) bemerkt treffend, dass man aus den Kräften, die doch nur Aussagen über wahrgenommene Bewegung enthalten, keine Aufklärung über die absolute Natur der Bewegung gewinnen könne, wie dies das *Newton*'sche *Rotationsexperiment*, Principia, p. 9, will.

91) Das Gyroskop bestimmt Körper, die nicht in Bezug auf ein *Streintz*sches *Fundamentalsystem* rotieren, keineswegs aber Körper, von denen sich das Nichtvorhandensein einer absoluten Rotation aussagen liesse; letztere ist nach *Mach*, Mechanik, p. 218, eine ganz überflüssige metaphysische Vorstellung.

92) *L. Lange*, Über das Beharrungsgesetz, Leipz. Ber. 37 (1885), p. 353; die wissenschaftl. Fassung des Galilei'schen Beharrungsgesetzes, Phil. Studien 2, p. 266, 539; vgl. auch das Referat von *H. Seeliger*, Vierteljahrsschr. d. astronomischen Gesellsch. 22 (1887), p. 252.

93) *Thomson* u. *Tait*, Treatise 1, part 1, p. 242. Ein ähnliches Koordinatensystem betrachtet *J. Tilly*, der übrigens an den Vorstellungen der absoluten Bewegung festhält (Brux. Bull. de l'Acad. Roy. (3) 14 (1887)), schon 1878 in dem Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique, Bordeaux, Mém. (2) 3 (1878), p. 1.

jene Punkte wie glatte Kugeln gleiten können, vorgestellte Axen beständig durch drei von einem Punkt aus (nach verschiedenen räumlichen Richtungen) geschleuderte Punkte hindurchgehen, ein *Galilei*'sches Bezugsystem; es ist dann leicht zu zeigen, dass jedes solche System in Bezug auf ein anderes wieder den Charakter eines solchen hat. In Bezug auf ein solches System wird nun die Bahn des sich selbst überlassenen Punktes *als Gerade definiert;* wird der Zeitbegriff dann nach *Neumann* eingeführt, so hat man die weitere *Aussage,* dass jeder Punkt in Bezug auf ein *Inertialsystem* und eine *Inertialzeitskala* sich gleichförmig und gradlinig bewegt.

Eine allgemeine Konvention über diese Fragen ist bis jetzt noch nicht erreicht, und aus der Thatsache, dass noch neuerdings die alten Zweifel über absolute und relative Bewegung und über den Sinn der *Newton*'schen Lehre ausführlich Besprechung gefunden haben, muss man wohl schliessen, dass diese fundamentalen Fragen noch immer nicht völlig aufgeklärt und durchdacht sind[93a]).

Indessen ist darauf hinzuweisen, dass *James Thomson*[94]) schon in ähnlicher Weise wie *Lange* auf die Notwendigkeit eines „frame of reference“[95]), etwa eines *Thomson-Tait*'schen Koordinatentetraeders, hingewiesen hat; in mehr logischer Weise sucht *Muirhead* die dem *Newton-Galilei*'schen System zugrunde liegenden Gesichtspunkte zu skizzieren, wenn er sagt[96]):

„It is possible to choose the masses of the solar system, the axes, the chronometry.., so that the masses shall correspond with those of astronomy and the forces shall be resolvable into such as will be expressed by the law of universal gravitation ... Then true time, absolute velocity and mass-measurement being defined from this system, there would be a further law of physics, that the forces of the various

---

93a) Vgl. das Referat über eine in verschiedenen englischen Zeitschriften zwischen *Love, Mc Gregor, A. Basset, E. Dixon, Mc Aulay, A. Gray, O. Lodge* geführte Diskussion über absolute und relative Bewegung von *E. Lampe,* Fortschritte d. Mathem. 25 (1897), p. 1318, sowie eine Reihe von Noten von *E. Goedseels, P. Mansion, Pasquier, É. Vicaire* in den Bruxelles, Ann. Soc. Scientif. 16—21 (1890—1897).

94) *J. Thomson,* On the law of inertia, Edinb. Roy. Soc. Proc. 12 (1882/84), p. 568, 730.

95) *J. Thomson* a. a. O.; *P. G. Tait,* Edinb. Roy. Soc. Proc. 12, p. 743.

96) *F. Muirhead,* The laws of motion, Phil. Mag. (5) 23 (1887), p. 473. Ähnlich auch *Petrini,* Fussn. 11, p. 231 ff.; desgl. *Love,* Mechanics, p. 92, sowie auch *J. Hadamard,* Sur les principes fondamentaux de la mécanique, Bordeaux, Ann. Soc. Phys. (1897).

particles composing the members of the solar system and others are expressed by our various physical laws or theories."

Es liegt indessen nahe einen anderen weniger abstrakten Standpunkt zu wählen, um die vorliegenden Schwierigkeiten zu heben. Betrachtet man in Bezug auf *irgend ein uns zur Verfügung stehendes Koordinatensystem* die Beschleunigung als Maass der Kraft, welche diese Bewegung „hervorbringt", so wird, falls letztere Null ist, für den betreffenden materiellen Punkt die gleichförmige geradlinige Bewegung entstehen. Auf Grund dieser *Voraussetzung* wird man zu bestimmten Aussagen gelangen, welche entweder mit der Wirklichkeit in genügender Übereinstimmung sind oder nicht. Im letzteren Falle wird man das Bezugsytem als ungeeignet verwerfen[97]; es ergiebt sich aber zugleich die *Thatsache*, dass es bisher immer, wenigstens in der Mechanik der ponderablen Körper, gelungen ist, dann ein anderes einzuführen, welches den Erscheinungen der Wirklichkeit mit hinreichender Annäherung sich anpasst. So geht man von den Erscheinungen des Falles, der in Bezug auf irgend ein Bezugsystem auf der Erde betrachtet wird, über zu einem geocentrischen System, welches an der Rotation der Erde nicht teilnimmt; bei erweiterten Fragen über zu einem System, dessen Anfang der Sonnenmittelpunkt, dessen Z-Achse die Normale auf der invariabeln Ebene sind, resp. zu einem System, dessen Achsen durch die Richtungen bestimmter Fixsterne bestimmt sind. In diesem Falle bleibt der Zweifel, ob es wirklich ein fundamentales Bezugsystem giebt, aber die Erwartung ist berechtigt, dass es auch bei der Vertiefung in weitere Fragen immer gelingen werde, die Anwendungsfähigkeit eines solchen erprobt zu sehen.

17. Neuere Theorieen. Dieser, neuerdings wieder mehrfach vertretene, wenn auch sehr populäre Standpunkt dürfte vorläufig, soweit es die Mechanik ponderabler Körper betrifft, einen Vorzug verdienen vor

97) Die Wahl des „frame of reference" steht in unserem Belieben; die Beschreibung der Bewegungen wird aber verschieden je nach dieser Wahl ausfallen, vgl. *Love*, Mechanics, p. 8. Dies scheint auch der Standpunkt von *Hertz*, Mechanik, p. 158, von *A. Föppl*, Mechanik 1, p. 1, zu sein. Vgl. auch *P. Duhem*, Commentaire 1892, p. 271: „Si nous regardons comme exacte une hypothèse où intervient la considération du mouvement absolu et si cette hypothèse, appliquée aux mouvements relatifs à un certain trièdre, conduit à des resultats inexacts, nous déclarons que ce trièdre n'est pas absolument fixe"; desgl. *Mach*, Mechanik, p. 236: „Der natürlichste Standpunkt bleibt der, das Trägheitsgesetz zunächst als eine hinreichende Annäherung zu betrachten, dasselbe räumlich auf den Fixsternhimmel, zeitlich auf die Rotation der Erde zu beziehen, und die Korrektur von einer erweiterten Erfahrung zu erwarten."

denjenigen Betrachtungen, welche durch die *Voraussetzung eines den Raum erfüllenden Mediums*, des Äthers, den *Newton*'schen absoluten Raum wieder — allerdings nur in gewissem Sinne — einführen wollen. Für die ältere Auffassung, die durch *Bewegungsverhältnisse des Äthers* die Licht- und Wärmeerscheinungen beschreibt, ist diese Wendung allerdings unmöglich. Anders steht es aber, wenn in der fortgebildeten *Maxwell*'schen Theorie der Äther als ein vorhandenes, in seiner geometrischen Konfiguration unveränderliches Medium mit bestimmten wohldefinierten Eigenschaften aufgefasst wird[98]). Es ist hierbei nur daran zu erinnern, dass die elektrischen und magnetischen Vorgänge nicht mehr als Bewegungen, sondern als *Zustände* der Polarisation etc. aufgefasst werden, die man nun auch wieder unter dem *Bilde* einer Strömung sich vorstellen kann. Gegen einen solchen Äther, welcher dann das absolute Bezugsystem bildet, über dessen absolute Ruhe[99]) damit freilich nichts ausgesagt werden kann und soll, und dessen Zustände durch beobachtbare Vorgänge in einem Felde definierbar sind, lassen sich dann auch *Relativbewegungen*[100]) der „ponderablen" Körper denken, so lange man noch nicht dazu gelangt ist, *alle* Erscheinungen als Zustände des Äthers überhaupt zu beschreiben. Vielleicht ist letzteres die Tendenz einer elektrischen Weltanschauung, die gegenwärtig bei manchen Physikern verbreitet ist; es wird vor allem darauf ankommen inwieweit durch Versuche entschieden werden kann, ob die thatsächlichen Erscheinungen mit der Voraussetzung eines ruhenden Athers, für die die Aberration des Lichtes eine bekannte Stütze bildet, in Einklang sind oder nicht. Die formalen Grundlagen der Mechanik würden damit einen ganz anderen Charakter annehmen können, als bisher; doch scheint es verfrüht, hierauf weiter einzugehen.

In einer eigentümlichen Weise hat neuerdings im Anschluss an die Ideen von *F. Reech*, im Cours de mécanique 1852, *Andrade*[101]) ver-

98) Vgl. das Referat von *W. Wien*, Über die Fragen, welche die translatorische Bewegung des Lichtäthers betreffen, Beibl. Ann. Phys. Chem. (2) 65 (1898).

99) *H. A. Lorentz*, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895, p. 4; desgl. *J. Larmor*, Aether and matter including a discussion of the influence of the earths motion in optical phenomena, Cambridge 1900. Auch schon früher bei *J. J. Thomson*, Anwendungen, p. 40.

100) Vgl. z. B. *Volkmann*, Theor. Physik, p. 54; *E. Budde*, Mechanik 1, p. 112, 135; desgl. *Mach*, Mechanik, p. 225. Den Versuch, eine Mechanik in diesem Sinne zu skizzieren, macht *W. Wien*, Über die Möglichkeit einer elektromagnetischen Begründung der Mechanik, Livre Jubilaire dedié à *H. A. Lorentz*, La Haye 1901, p. 96, auch Ann. Phys. Chem. (3) 5 (1901), p. 501.

101) *F. Reech*, Cours de mécanique, Paris 1852, p. 21; *J. Andrade*, Leçons de mécanique physique, Paris 1898.

sucht, eine formale Mechanik zu begründen, ohne über das Trägheitsprinzip von vornherein zu entscheiden. Bei ihm werden die Kräfte statisch, durch Spannungen gemessen. Er unterscheidet dann bei jedem materiellen Punkte eine Endbeschleunigung j (accélération finissante) und eine Anfangsbeschleunigung (acc. commençante) J,[102]) deren vektorielle Differenz in Bezug auf irgend ein relatives Koordinatensystem von der Beschaffenheit desselben nach den *Coriolis*'schen Formeln[103]) über relative Bewegung unabhängig ist und setzt voraus, dass in der Formel

$$F = m(J - j)\,T$$

für die relative Kraft die Grösse T ein nur vom Zeitmaass abhängender Faktor ist. Da beim Übergang zu einem neuen Zeitmaasse t', das mit dem alten t durch die Gleichung $t' = f(t)$ verbunden ist,

$$(J - j)\,dt^2 = (J' - j')\,dt'^2$$

wird, so folgt

$$F = m(J' - j')\left(\frac{dt'}{dt}\right)^2 T;$$

man kann daher immer eine *absolute Zeitskala* einführen, für die

$$\left(\frac{dt'}{dt}\right)^2 T = 1$$

ist. Allerdings muss die accélération finissante oder der Verlauf der natürlichen Bewegung bekannt sein, wenn diese Formeln eine praktische Verwendung finden sollen.

B) Die Grundbegriffe der Statik.

18. Die Kräfte in der Statik. Wir gehen weiter auf die mechanischen Grundbegriffe ein. Die Mechanik hat sich durch die Betrachtung der einfachsten Maschinen, dann durch die geometrischen Lehren des *Archimedes* über den Schwerpunkt entwickelt; sie tritt zunächst als *Statik* auf, in der die Kräfte direkt durch Zug- und Druckwirkungen, wie sie von menschlichen Händen oder Gewichten an gespannten Seilen ausgehen, also noch ganz anthropomorphistisch gefasst werden[104]). Es ist keinem Zweifel unterworfen, dass diese *statischen*

---

102) *Andrade*, Leçons, p. 51 ff.

103) *G. Coriolis*, Mémoire sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps, J. éc. polyt. cah. 24 (tome 15) (1835), p. 142.

104) So z. B. bei *Galilei* in der Scienza della meccanica (1592), Opere 2; bei *Varignon* in der Mécanique nouvelle u. s. w.; allmählich verschwinden diese handgreiflichen Illustrationen und gehen in die jetzt übliche vektorielle Bezeichnung durch gerichtete Strecken (Vektoren) über. Auch *C. Neumann* spricht von

Kräfte durch *bestimmte Gewichtseinheiten gemessen* und in Zahlen durch *räumliche Vektoren* ausgedrückt werden können. Auf diesem Wege entwickelt sich namentlich durch *Varignon*'s Einfluss die *Statik der starren Körper*, die ihre Vollendung in der von *Poinsot* geschaffenen Theorie der Kräftepaare (couples) zu erreichen schien, und in vollkommener Strenge, sobald man die mehr oder weniger scharf ausgesprochenen axiomatischen Grundlagen zugiebt, zu den Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers hinleitet.

Zwei Kräfte sind dann gleich, wenn sie in entgegengesetzter Richtung angebracht sich im Gleichgewicht halten; nimmt man ferner an, dass Kräfte, in gleicher oder entgegengesetzter Richtung, sich durch algebraische Summation vereinigen, so bleibt nur noch die Aufgabe, die Zusammensetzung verschieden gerichteter Kräfte an demselben mathematischen Punkte vermöge der Regel des Parallelogramms zu beweisen.

Der soeben berührte Begriff des *starren Körpers* ist ein von der Statik selbst geschaffener, der ursprünglich nur die Vorstellung einer ihrer geometrischen Konfiguration nach unveränderlichen Substanz enthält, für deren Punkte die Verlegbarkeit der Kräfte in der Richtung ihrer Angriffslinie als *Axiom, als Prinzip der Verlegung des Angriffspunktes der Kraft in ihrer Richtung* festgesetzt wird. Solche Vektoren werden passend von *E. Budde* (Mechanik 2, p. 537) *linienflüchtige* im Gegensatze zu den *freien* (z. B. Kräftepaaren) genannt.

Diese Untersuchungen, in die im weiteren Verlaufe, namentlich wo es sich um Wirkungen verschiedener starrer Körper auf einander beim Stoss und verwandten Fragen handelt, auch die Vorstellung einer jedem starren Körper eigentümlichen *Masse* (und damit die ganze Lehre von der *Geometrie der Massen* (siehe IV 3) in ihrer über die barycentrischen Lehren des *Archimedes* weit hinausgehenden Ausführung mit Hülfe der Infinitesimalmethoden) hineinbezogen wird, stehen ihrem *historischen* Charakter nach ausser Zusammenhang mit

---

Befehlen, welche sich die Körper erteilen, Prinzipien, p. 5, auch Math. Ann. 1 (1869), p. 317). Treffende Äusserungen dieser Art sind gewiss nicht wertlos. Dass die abstrakte wissenschaftliche Darstellung darnach strebt, die anthropomorphistischen Anschauungen zu beseitigen, ist wohl selbstverständlich; aber auch in allgemeiner Beziehung kann es nur voreilig erscheinen, diese einem ganz beschränkten Gebiet von Empfindungen entnommenen Vorstellungen als für alle Erscheinungen maassgebend anzusehen. In dieser Beziehung beachte man auch die Bemerkung von *Th. Young*, Lectures 1, p. 28: We must not imagine, that the idea of force is naturally connected with that of labour or difficulty, this association is only derived from habit.

der eigentlichen Dynamik. Ihr steht die *dynamische Vorstellung des starren Körpers* gegenüber, welche denselben von vornherein als Aggregat von Massenteilchen auffasst, die durch Kräfte, welche jede Veränderung der Konfiguration verhindern[104a]), zu einem System verbunden sind. Diese scheint in viel ungezwungener Weise zu der Idee eines allgemeinen materiellen Systems hinüberzuleiten, bei der die eigentümlichen Fälle der statischen Unbestimmtheit (siehe IV 5 und 22) nicht auftreten. Der grundlegende Wert der Statik beruht übrigens nicht so sehr auf dieser doch nur in sehr beschränktem Maasse an die Wirklichkeit angepassten Unveränderlichkeit der Konfiguration, sondern in der Entwicklung der Lehre von der *Äquivalenz der Kräfte*, welche auch die dynamischen Anschauungen später beständig begleitet; auf den wertvollen methodischen Inhalt der Statik, wie er namentlich in der Theorie der Momente auftritt, und den wichtigen Dualismus zwischen Statik und Bewegungslehre, den die Theorie der *Vektoren* und *Schrauben* darlegt, kann hier nur hingewiesen werden.

19. Das Parallelogramm der Kräfte. *Newton* und *Varignon*[105]) hatten diesen Fundamentalsatz, den *Stevinus* nach *Cantor* (Vorlesungen 2, p. 449), doch als solchen nicht ausdrücklich ausgesprochen hatte, unmittelbar aus der Lehre von der *Zusammensetzung der Bewegungen* entnommen. Für den strengen *statischen* Kraftbegriff, den man hier im Auge haben muss, erscheint aber die Rekursion auf eine *Bewegung, die gar nicht zustande kommt*[106]), nicht unmittelbar zulässig. Aus dieser Ansicht entspringen die mannigfachen Versuche, *das Parallelogramm der Kräfte* auf Grund an sich leichter zu übersehender Axiome, d. h. spezieller Fälle des Satzes selbst, zu beweisen. Sie erscheinen auch

---

104a) Die im Texte gewählte abstraktere Fassung ersetzt man gewöhnlich durch die Vorstellung, dass bei kleiner Veränderung der Konfiguration sehr grosse entgegenwirkende Kräfte auftreten; das Gleichgewicht bezieht sich dann auf diesen eigentlich doch *unbekannten* Deformationszustand.

105) *Newton*, Principia, p. 13: „Corpus viribus componentis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere quo latera separatis.“ *Varignon*, Nouvelle mécanique, 1 (1725); dort zuerst die bekannte Regel über das Gleichgewicht zwischen drei an einem Punkt angreifenden Kräften.

106) *Joh. Bernoulli*, Opera 4, p. 256: „Peccant, qui compositionem virium cum compositione motuum confundunt“; desgl. *H. Lambert*, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik 2, Berlin 1770, p. 451; *F. Reech*, Cours de mécanique, p. 61: Nous rejetterons absolument toutes les prétendues démonstrations du théorème du parallélogramme des forces au moyen de la règle évidente du parallélogramme des vitesses en géométrie“; *E. Bour*, Mécanique 2, p. 16; vgl. auch *R. Heger*, Schul-Programm Dresden, Nr. 498 (1887), p. XVII. *Thomson* u. *Tait*, Treatise 1, part 1, p. 244, sind anderer Ansicht.

gegenwärtig nicht wertlos, obwohl *Mach* bemerkt, dass bei vielen dieser Beweise gerade eine schwierig zu erwerbende Induktion über das Wesen der zu erwartenden Erscheinungen zugrunde liegt.

Von dem rein statischen Begriffe der Kraft ausgehend versuchten zuerst *Dan. Bernoulli*[108]), später *d'Alembert*[109]) und andere, die *Resultante* zweier Kräfte zu bestimmen. Die von letzterem gefundene Funktionalgleichung tritt in etwas anderer Form bei *Poisson*[110]) auf; bei dem Beweis rekurriert man auf die Zusammensetzung zweier gleichgerichteter Kräfte durch algebraische Addition, unter der Voraussetzung, dass die eindeutig bestimmte Resultante R den *inneren* Winkel $2x$ zweier *gleicher* Kräfte P halbiert und der Grösse nach durch die *stetige* Funktion

$$R = P \cdot \varphi(x)$$

gegeben ist; dabei ist dann $R = 2P$ für $x = 0$, für $x = 60^0$ nach dem Symmetrieprinzip $R = P$. Ersetzt man jede der Kräfte P durch zwei gleiche Kräfte Q, die mit P den Winkel z bilden und setzt voraus, dass dadurch die Resultante nicht geändert wird, so muss φ der Gleichung

$$\varphi(x + z) + \varphi(x - z) = \varphi(x) \cdot \varphi(z)$$ [111])

---

107) *Mach,* Mechanik, p. 45. — Es sei noch einmal betont, dass es sich in der Ausführung des Textes *nur* um den statischen Kraftbegriff handelt.

108) *D. Bernoulli,* Comm. Ac. Sc. imp. Petrop. (1726), 1 (1728), p. 126.

109) *d'Alembert,* Opusc. math. 1, Paris 1761, p. 269; vgl. auch *D. de Foncenex,* Mélanges de philosophie et mathématique, Turin 1760/61, p. 305; ferner *d'Alembert,* Berlin, Mém. de l'Acad. 1750, p. 350; in vereinfachter Form bei *Aimé,* J. de math. 1 (1836), p. 335. Über die ältere Litteratur vgl. *C. Jacobi,* Praecipuorum inde a Newtone conatuum compositionem virium demonstrandi recensio, Diss. Gottingae 1817. Die kritische Besprechung der Beweise für das Parallelogramm durch *A. H. C. Westphal* (Diss. Göttingen 1868) ist weder vollständig, noch in ihrem allzu abstrakten Schematismus übersichtlich; eine bis in die neueste Zeit reichende ausführliche Darstellung ist trotz *Mach's* geringschätzendem Urteil (Mechanik, p. 48) über diese allerdings mehr methodologisch-mathematische Frage wohl nicht überflüssig. In neuern Darstellungen der Mechanik treten die Beweise für das Parallelogramm überhaupt nicht mehr auf. *O. Heaviside* (Electromagnetic forces, 1, p. 147, London 1883) bemerkt: Is it not sufficient to recognise, that a quantity is a vector, to know that it follows the laws of the geometrical vector? Schärfer sagt *A. E. H. Love* (Mechanics, p. 89): We *define* the force exerted upon the particle m to be a vector localised at a point. Man vergleiche dazu die Bemerkung in Fussn. 61.

110) *Poisson,* Du parallélogramme des forces, Corresp. de l'éc. polyt. 1, 1804/8, p. 357; Mécanique 1, p. 6 in d. Ausg. v. *Stern.*

111) Diese schon bei *d'Alembert,* Paris, Mém. de l'Acad. 1769, p. 278; eine andere Funktionalgleichung bei *d'Alembert*, Opusc. math. 6 (1773), p. 360; einfacher bei *O. Schlömilch,* Zeitschr. f. Math. Phys. 2 (1857), p. 85. — *P. S. Laplace,*

genügen, woraus wegen $\varphi(0) = 2 \cos 0$, $\varphi(\pi/3) = 2 \cos \pi/3$ folgt, dass für *alle rationalen* Werte a

$$\varphi\left(\frac{a\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(\frac{a\pi}{3}\right),$$

mithin unter Ausdehnung auf das irrationale Gebiet

$$\varphi(x) = 2 \cos x$$

wird. Von dem Fall zweier gleichen Kräfte kann man dann mittelst des Übergangs zu rechtwinkligen Kräften durch die elementare Betrachtung von *Bernoulli* zum allgemeinen Fall übergehen[112]).

Den von *Bour*[113]) und *Mach*[114]) gemachten Einwand, dass die Resultanten ausser den Bedingungen der Eindeutigkeit, Stetigkeit und Differentiierbarkeit als *innere* Winkelhalbierende vorausgesetzt werden müssen, suchte *Boltzmann* durch eine etwas andere Anordnung der *Poisson*'schen Darstellung zu vermeiden[115]).

Ein gewisser Abschluss in der ganzen Frage ist durch *Darboux* erreicht[116]), der bei der Zusammensetzung abweichend von den meisten früheren Autoren[117]) *räumliche* Betrachtungen hinzuzieht und so die *d'Alembert*'sche Funktionalgleichung vermeidet. Unter der Voraussetzung, dass die *Resultante von n Vektoren* P_1 $P_2 \ldots P_n$ *erstens* eindeutig bestimmt ist, *zweitens* sich nicht ändert, wenn man beliebig viele der P durch ihre Resultanten ersetzt, *drittens* von der Lage der Vektoren gegen das Koordinatensystem unabhängig ist, ergiebt sich, dass dieselbe der nach der Parallelogrammregel aus

$$\varphi(P_1),\ \varphi(P_2) \ldots \varphi(P_n),$$

Méc. céleste, p. 3—8, giebt einen Beweis, der zuerst die *Grösse* der Resultante bei rechtwinkligen Komponenten bestimmt, ihre *Richtung* aber mittelst wenig übersichtlicher Infinitesimalbetrachtungen findet; ähnlich *Cauchy* (Exerc. de math., 1826, p. 29), doch wird die Richtung nur durch eine Funktionalgleichung gefunden; ähnlich wieder *W. G. Imschenetzky,* Charkow. Ges. (2) 2, p. 108. Andere Beweise von *E. Brassinne,* Nouv. ann. de math. (3) 1 (1882), p. 320; *Delègue,* ibid. (2) 12 (1873), p. 495. Ausgezeichnet durch sorgfältige Ausführung der Voraussetzungen ist die Darstellung von *Möbius,* Statik 1, p. 22—39 (vgl. auch J. f. Math. 42 (1851), p. 179), sowie von *Poinsot,* Élémens de statique, 11. ed., p. 11—25.

112) *D. Bernoulli* Fussn. 108, p. 134, prop. III.

113) *Bour,* Mécanique 2, p. 45.

114) *Mach,* Mechanik, p. 48.

115) *Boltzmann,* Mechanik, p. 31.

116) *G. Darboux,* Bull. scienc. math. 9 (1875), p. 281; auch als Note 1 in Bd. 1 der Mécanique von *Despeyrous,* p. 371.

117) Zum Teil finden sich solche schon in dem von *Andrade A. Morin* zugeschriebenen Beweise, Mécanique, p. 357, den *F. Siacci,* Napoli, Rend. Accad. reale 1899 wieder aufgenommen hat.

gebildete Vektor ist, falls φ eine willkürliche Funktion bedeutet und jedes $\varphi(P_i)$ bei positivem Werte auf der Richtung von P_i abgetragen wird. Unter der Voraussetung der *Addition gleichgerichteter Vektoren* folgt nun

$$\varphi(P+Q)=\varphi(P)+\varphi(Q),$$

woraus $\varphi(x) = A\cdot x$ folgt, wenn man *viertens* entweder $\varphi(x)$ als *stetig* oder $\varphi(x)$ als *positiv* voraussetzt[118]).

C) Die Grundbegriffe der Dynamik.

20. Galilei und die Principia von Newton. *Galilei* erkannte in dem Begriffe der *Beschleunigung* die Möglichkeit einer einfachen Beschreibung der Naturerscheinungen[119]). Es ist sehr merkwürdig, dass der Begriff der Geschwindigkeit dazu nicht ausreicht[120]), sondern die grössten Komplikationen herbeiführen würde, und dass es andererseits bisher nicht notwendig geworden ist, zu dem Begriff der Beschleunigung höherer Ordnung überzugehen, der doch den Vorgang der Bewegung auf eine viel allgemeinere Weise charakterisiert. Auf Grund des *Galilei*'schen Gedankens erhebt sich das *Newton*'sche Lehrgebäude, welches mit Hülfe des Begriffes der *Masse m* als *Wirkung der Kraft K* die Beschleunigung $\varphi = K:m$ definiert.

Newton stellt an die Spitze seiner Principia vier *Definitiones* und drei *Axiomata* sive leges motus:

1) Definitiones[121]).

1) Quantitas materiae est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim;

2) Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate et quantitate materiae conjunctim;

---

118) Noch allgemeiner zeigt *Darboux*, Math. Ann. 17 (1880), p. 56, dass die Gleichung $\varphi(x) = A\cdot x$ schon dann folgt, wenn an Stelle der Voraussetzungen 4) des Textes nur angenommen wird, dass $\varphi(x)$ in irgend einem endlichen Intervall nur positive oder negative Werte annimmt, deren absoluter Betrag unter einer *endlichen* Grenze liegt.

119) *Galilei*, Opere 2, vgl. namentlich p. 261 de motu accelerato mit der Definition der Beschleunigung.

120) Dies ist natürlich in Rücksicht auf die thatsächliche Entwicklung der Mechanik zu verstehen, welche die Bewegungen durch Differentialgleichungen der Bahnkurven der Punkte definiert. Die energetischen Vorstellungen, welche — vielleicht mit Recht — auf so detaillierte Bilder verzichten, würden allerdings auch eine andere Beschreibung der Vorgänge als denkbar erscheinen lassen.

121) Principia, p. 1.

3) Materiae vis insita est potentia resistendi, qua corpus unum quodque quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum;

4) Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

2) Axiomata sive leges motus[122]).

1) Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare;

2) Mutationem motus proportionalem esse viri motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur;

3) Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

21. Die dynamische Bewegungslehre. Auf Grund der vorstehenden allgemeinen Principien hat sich allmählich im Anschluss an eine durchgebildete Phoronomie das System der klassischen Mechanik des 19. Jahrhunderts entwickelt, bei dessen Darlegung wir die an die Vorstellung von Raum und Zeit anknüpfenden Fragen nun nicht weiter berühren.

Die reine Bewegungslehre, welche die Lage des Punktes durch seine drei als Funktionen der Zeit t gegebenen Koordinaten x, y, z beschreibt, geht davon aus, dass bei der Bewegung auf beliebiger Bahn

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{für} \quad t = t_0$$

in Bezug auf den durchlaufenen Weg $s - s_0 = \Delta s$ und das zugehörige Zeitintervall $t - t_0 = \Delta t$ einen völlig bestimmten Grenzwert, die *Geschwindigkeit* v des Punktes, darstellt. Wird die Bewegung auf irgend eine Axe X, etwa durch Parallelprojektion, *projiziert*, so ist die Geschwindigkeit der projizierten Bewegung gleich der Projektion von v. Durch die Projektion auf drei am bequemsten zu einander rechtwinklige Koordinatenaxen x, y, z gilt die Bewegung als vollkommen bestimmt, und

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z, t)$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z, t)$$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z, t)$$

sind die drei Differentialgleichungen erster Ordnung, welche bei ge-

122) Principia, p. 12.

gebener Anfangslage (x_0, y_0, z_0, t_0) die Koordinaten x, y, z als eindeutige Funktionen von t bestimmen.

Bei der selbständigen Stellung, welche jede der Geschwindigkeiten, z. B. $\dot{x}$ für einen Beobachter, der die Projektionsbewegung in der YZ-Ebene mitmacht, besitzen, nennt man diese die *Komponenten*; ihre Resultante ist *der Vektor* v. Durch diese Betrachtung, welche jeder Bewegung ihre orthogonalen oder auch allgemeinen Parallelprojektionen auf irgend welche Axen zuordnet, werden die *überflüssigen Untersuchungen über Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten* vermieden, während zugleich die Vorstellung, welche einem Punkte gleichzeitig *mehrere* Bewegungen zuschreibt, als eine rein logische, allerdings durch die Anschauung vermittelte, Abstraktion hervortritt, der ein reales Verhalten gar nicht entspricht.

Bei konstanten $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ist die Bahn eine gerade Linie, die *gleichförmig* durchlaufen wird. In jedem andern Falle kommt zum Vektor v ein unendlich kleiner Vektor dv in der Zeit dt hinein, der als *Maass der Geschwindigkeitsänderung* angesehen wird; auch hier betrachten wir diese *Beschleunigung* als einen nach Richtung und Grösse vollkommen bestimmten Grenzwert. Bei dieser Auffassung ist es selbstverständlich, dass sich die Beschleunigungen ebenfalls nach dem Parallelogrammgesetze zusammensetzen; insbesondere erhellt dies durch *Hamilton*'s Begriff des *Hodographen*[122a]). Und umgekehrt definieren die Gleichungen

$$\ddot{x} = f_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$
$$\ddot{y} = f_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$
$$\ddot{z} = f_3(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

bei gegebenem Anfangszustande $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t_0)$ wieder unter geeigneter Beschränkung der Funktionen die Bewegung vollständig. Der hierdurch eingeleitete Prozess der phoronomischen Begriffsbildung ist damit noch nicht abgeschlossen, doch hat die *Dynamik* keine Veranlassung, von den höheren Beschleunigungen Gebrauch zu machen[122b]).

122a) *W. R. Hamilton*, Dublin, Trans. 3 (1846), p. 345; Elements of Quaternions, London 1866, p. 100, 718, 2. ed., 2 vols., London 1899/1901; der Begriff des Hodographen indess schon 1843 bei *Möbius*, Mechanik des Himmels = Werke 4, Leipzig 1887, p. 36 u. 47.

122b) Schon *C. G. J. Jacobi* weist 1825 (Werke 3, p. 44) auf die Theorie der höheren Beschleunigungen hin, deren allgemeinen Begriff *Möbius*, J. f. Math. 36 (1838), p. 91, verwendet. *A. Transon*, Note sur les principes de la mécanique, J. de math. (1) 20 (1843), p. 320, führt neben $m\ddot{x}$ geradezu $m\dddot{x}$ als *virtualité motrice* ein, während *H. Resal* (Traité de cinématique pure, Paris

22. Das System der klassischen Dynamik[123]). Den Übergang zur Dynamik des materiellen Punktes gewinnt man nun in den gebräuchlichen Darstellungen durch die folgenden[124]) als Abstraktionen aus der Erfahrung anzusehenden Grundsätze:

1) So oft ein materieller Punkt sich nicht gleichförmig und geradlinig bewegt, sind immer andere Körper vorhanden, deren Lage und Bewegungszustand als bestimmende Bedingungen für diese Abweichung von der Trägheitsbahn erscheinen; man sagt, dass *wirkende Kräfte* vorhanden sind, welche die betreffende *Beschleunigung erteilen*[125]).

2) *Masse* ist diejenige Eigenschaft der materiellen Punkte, unter gleichen Bedingungen dieser Art skalar verschieden grosse *Beschleunigungen* zu erhalten; die *Einheit der Masse* ist willkürlich wählbar.

3) *Einheit der Kraft* ist diejenige, welche der Einheit der Masse die Beschleunigung Eins erteilt. *Jede Masse*, die „vermöge" der Kraft Eins die Beschleunigung Eins erhält, repräsentiert die Masseneinheit.

4) Wird die Masseneinheit von mehreren Krafteinheiten *zugleich* ergriffen, so wirkt jede einzelne genau so, als ob die übrigen gar nicht vorhanden wären. Man gewinnt so die Vorstellung der *Kraft n*, welche der Masseneinheit die Beschleunigung *n* erteilt.

5) Ein materieller Punkt, der unter dem Einfluss der Kraft *n* die Beschleunigungseinheit erhält, besitzt die *Masse n*. Ein materieller

---

1862) eine systematische Theorie der Beschleunigungen erster und zweiter Ordnung liefert, die seitdem von anderen noch viel weiter ausgeführt wurde.

123) Wir verstehen darunter etwa die Lehren, welche durch den Einfluss der französischen Mathematiker in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts ziemlich allgemeine Geltung erlangt haben.

124) Diese Grundlagen der Dynamik erscheinen meistens mit metaphysischen Ideen über Trägheit, Ursache etc. verbunden (vgl. z. B. die Darstellung bei *E. Bour*, Mechanik 2, p. 5, *Duhamel* und anderen); der hier gewählte Text beabsichtigt, *soweit wie möglich,* sich bereits neueren Vorstellungen anzupassen. Vgl. z. B. *Streintz*, Grundlagen, p. 99 ff. Es ist daher auch das Trägheitsprinzip durch die Aussage Nr. 1 ersetzt. Der Zusammenhang dieser axiomatischen Grundsätze mit der Erfahrung wird nicht selten durch Berufung auf ganz unkontrollierbare Beobachtungen in übertriebener Weise dargestellt; so z. B. von *Coriolis*, Mécanique, p. 5: si la force *F varie* pendant la durée du mouvement, *l'observation* fait voir que le rapport φ (Beschleunigung) varie de la même manière; c'est à dire que les valeurs de φ demeurent proportionelles aux valeurs de *F*.

125) Selbst *Kirchhoff* und *Mach* sprechen von *wirkenden* Kräften. Nach *A. Höfler*, Studien, p. 56 ist Wirken eine besondere Art der Relation, nämlich eine Notwendigkeitsbeziehung von Realitäten gewisser Art, deren Vorstellung anthropomorphistische Elemente gar nicht enthält.

Punkt mit der Masse m erhält daher durch die Kraft $F = mn$ die Beschleunigung $\varphi = n$; mithin wird

$$F = m\varphi.$$

6) Bei den ponderablen materiellen Punkten kann die *Proportionalität von Masse und Gewicht* durch Versuche, in ihrer einfachsten Form z. B. durch die *Atwood*'sche Fallmaschine, bestätigt werden[126].

23. Kritische Bemerkungen über das System der Dynamik. Dass die Definitiones von *Newton* zum Teil im Ausdrucke recht sorglos gewählt sind, z. B. quantitas materiae durch densitas, vis durch actio erklären, etc. ist oft bemerkt worden[127]. Noch weniger passend scheint es zu sein, von einer vis inertiae[128] zu reden; es ist hier

---

126) Dahin gehören auch die Resultate von *F. Bessel*'s Arbeit „Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht", Berlin, Abhand. d. Akad. 1830, p. 41, auch Ann. Phys. Chem. 25 (1832), p. 401. *Bessel*'s Untersuchungen sind neuerdings mit noch feineren Hülfsmitteln wieder aufgenommen durch *R. v. Eötvös*, Über die Anziehung der Erde auf verschiedene Substanzen, Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn 8 (1891), p. 65; vgl. auch Ann. Phys. Chem. (2) 59 (1896), p. 354.

127) Diese Ansicht wird nicht von allen geteilt. *Thomson* und *Tait* sagen (Treatise (1) 1, p. 279): the introduction to the principia contains in a *most lucid form* the general foundations of dynamics. Ähnlich äussert sich auch *Volkmann*, Theor. Physik, p. 70. Es ist namentlich in England üblich, aus *Newton*'s kurzen Sätzen viel weitergehende Konzeptionen, z. B. das d'*Alembert*'sche Prinzip, die Erhaltung der Energie, u. s. w. herauszulesen. Wir lassen diese — übrigens auch in England keineswegs allgemein vertretenen — Ansichten dahingestellt. Beachtet man indess die Thatsache, dass trotz der mangelhaften äusseren Form aus *Newton*'s Prinzipien sich die ganze Dynamik entwickelt hat, ohne dass man bis in die neuere Zeit es für unerlässlich fand, die Anzahl der axiomatischen Aussagen wesentlich zu vermehren, so wird man geneigt sein, sich ebenso sehr zu hüten, in *Newton*'s Gedanken *zu wenig* hineinzulegen. Dass übrigens die *Newton*'schen leges, welche den Bedürfnissen der *astronomischen Mechanik* vollständig angepasst sind, für die Deduktion der Mechanik *bedingter materieller Systeme* allgemeiner Art *nicht* ausreichen, dürfte gegenwärtig kaum bezweifelt werden.

128) Die *vis inertiae*, das sogen. *Beharrungsvermögen*, kann als ein ganz überflüssiger scholastischer Begriff erscheinen; schon *Euler* weist ihn in den Reflexions sur l'espace auf's entschiedenste zurück. *A. M. Ampère* entwickelt bei Gelegenheit seines ganz nützlichen *Deviationsbegriffes* der Bewegung des materiellen Punktes sogar die Vorstellung, dass die force d'inertie der wirkenden Kraft beständig entgegengesetzt gleich sei (J. de math. 1 (1836), p. 211). Die damit zusammenhängende Unterscheidung der Kräfte in bewegende und beschleunigende oder forces d'inertie (als solche treten noch gegenwärtig im d'*Alembert*'schen Prinzip die $-m\ddot{x}$, $-m\ddot{y}$, $-m\ddot{z}$ auf) scheint ebenfalls nicht sehr glücklich. Hierauf beruhen auch die falschen Auffassungen über die *Centrifugalkraft*, in denen *Hertz* sogar einen wesentlichen Mangel der üblichen Mechanik

nicht der Ort, diese formellen Fragen zu behandeln; unerlässlich erscheint aber eine kurze sachliche Besprechung der Axiome.

1) *Die Unabhängigkeit der Axiome.* Weit grösser sind die Schwierigkeiten, welche sich dem Verständnis der *Newton*'schen Axiome entgegenstellen; sie haben eine ausgedehnte Litteratur hervorgerufen, von der hier indes nur das Wesentlichste angeführt werden kann. Wir erwähnen zunächst die Fragen, welche sich auf die gegenseitige Unabhängigkeit der Aussagen beziehen. Dass z. B. das erste Gesetz in dem zweiten enthalten ist, wird wohl allgemein anerkannt. Offenbar können diese Fragen durch eine rein *logisch-mathematische* Untersuchung entschieden werden, in welche wir indessen hier nicht eintreten. Auch scheint es noch *zweifelhaft*, ob die bisherigen Bestrebungen, welche namentlich in der englischen Litteratur auftreten[129]), bereits zu einem wirklich *abschliessenden* Ergebnis gelangt sind. Es sei dabei an die Schwierigkeiten erinnert, welche analoge Untersuchungen in dem viel durchsichtigeren geometrischen Gebiete zeigen, und die erst in der neuesten Zeit durch *Hilbert* eine entscheidende Förderung erhalten haben[130]).

2) *Der Begriff der Masse.* *Newton* und *Poisson* erklären Masse als *Quantität der Materie*[131]). *Hertz* bezeichnet[132]) ein Massenteilchen als ein Merkmal, durch das man *einen* geometrischen Punkt von einem *anderen* unterscheiden kann, und geht zur Gewinnung eines rein phoronomischen Massenbegriffs auf die Zählung hypothetischer Atome in einer bestimmten Volumeinheit zurück, während er in der Dynamik „greifbare" (ponderable) Massen dem Gewichte proportional setzt. Französische Mathematiker[133]) definieren Masse durch das Verhältnis der

---

zu erblicken glaubte (Mechanik, p. 6); man vgl. darüber *Boltzmann,* Mechanik, p. 45.

129) Vgl. namentlich *J. Mc. Gregor,* On the fundamental hypotheses of abstract dynamics, Canada, R. Soc. Trans. 8 (1892); desgl. Phil. Mag. (5) 35 (1892), p. 134; 36 (1893), p. 243, sowie Canada, R. Soc. Trans. 6 (1895), p. 95.

130) *D. Hilbert,* Über die Grundlagen der Geometrie, Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals zu Göttingen, Leipzig 1899; auch franz.: Les principes fondamentaux de la géométrie, trad. *L. Laugel,* Paris 1900.

131) So auch *Kant,* Metaphysische Anfangsgründe, p. 95; diese Ausdrucksweise auch noch gegenwärtig bei Physikern, z. B. *W. Voigt,* Kompendium 1, p. 14; sie hat nur dann Sinn, wenn man von einer abstrakten Materie redet, welche sich superponieren kann und dadurch fähig wird, Zustände verschiedener Dichtigkeit anzunehmen. *L. N. M. Carnot* (Principes 1803) definiert Masse überhaupt nicht.

132) *Hertz,* Mechanik, p. 54. Ähnlich auch *Schell,* Mechanik 1, p. 2, 72.

133) So z. B. *Duhamel,* Mécanique 1, p. 93; *P. Appell,* Mécanique 1, p. 86; *H Resal,* Mécanique 1, p. 132.

Kraft zur Beschleunigung; selbstverständlich muss dann zuvor die Kraft definirt sein, was dann nur im statischen Sinne durch Gewichte geschehen kann. Bei *Kirchhoff*[134]) erscheint die Masse einfach als ein in den Differentialgleichungen der Bewegung von *Systemen* eingeführter Zahlenkoeffizient, durch den die Möglichkeit einer eindeutigen Beschreibung der Bewegung *nicht aufgehoben* wird, bleibt also völlig undefiniert. Nach *Andrade*[135]) lässt sich aus den Erscheinungen des *Stosses* von zwei materiellen Punkten ein Massenbegriff konstruieren, *der von der Voraussetzung eines bestimmten Koordinatensystems und einem bereits gewählten Zeitmass ganz unabhängig ist.* Andere begnügen sich mit blossen Nominaldefinitionen, so z. B. wenn Masse als Beschleunigungskapazität bezeichnet wird[136]).

Am eingehendsten hat sich *Mach*[137]) mit dem Massenbegriff beschäftigt. Nach ihm sind Körper gleicher Masse solche, die auf einander wirkend sich gleiche entgegengesetzte Beschleunigungen erteilen. Diese Aussage schliesst natürlich die mit der Erfahrung übereinstimmende und von *Mach* noch weiter begründete[138]) Voraussetzung

---

134) *Kirchhoff*, Mechanik, p. 13—21; ähnlich auch wohl *C. Neumann*, Grundzüge der analytischen Mechanik, Leipz. Ber. 39 (1887), p. 155. Dass *Kirchhoff's* einleitende Betrachtungen in einem auffallenden Gegensatz zu der sorgfältigen analytischen Darstellung der späteren Teile stehen, welche sich nur an wenigen Stellen beanstanden lassen, wird gegenwärtig wohl nicht bezweifelt werden.

135) *Andrade*, Mécanique, p. 54. Die Erscheinungen des Stosses an und für sich sind natürlich schon viel früher herangezogen; in Beziehung auf experimentelle Prüfung vgl. man z. B. *W. M. Hicks*, Elementary dynamics of solids and fluids, London 1890.

136) So z. B. *A. Höfler*, Studien, p. 70. *Ch. Freycinet* vergleicht (Essais sur la philosophie des sciences, Paris 1896, p. 177), die Masse als capacité dynamique mit der spezifischen Wärme. Bei *Euler* ist Masse die Grösse der Trägheit (Theoria motus § 153); *Volkmann*, Theoret. Physik, bezeichnet den Begriff der Masse als einer sich beim Wechsel der Erscheinungen erhaltenden Grösse als ein *Postulat*; dies wird man natürlich bei jeder Erörterung über diesen Gegenstand im Auge zu behalten haben. Die Mechanik der Punkte mit *veränderlicher Masse,* auf welche *Jacobi* (Dynamik, Ausg. *A. Clebsch,* p. 57) hinzudeuten scheint, wird man zunächst als eine ganz abstrakte Erweiterung der Differentialgleichungen der Dynamik ansehen. Sie kann indessen bei gewissen Fragen (z. B. allmähliche Änderung der Masse der Himmelskörper durch Aufnahme kosmischer Massen) Anwendung finden; doch handelt es sich dann eigentlich nicht um jene Abstraktion, sondern um eine Untersuchung von Stosserscheinungen; man vgl. *J. Mestschersky*, Dynamik des Punktes mit veränderlicher Masse, Referat in den Fortschr. d. Mathematik 28 (1897), p. 645.

137) *Mach,* Mechanik, p. 210.

138) *Mach,* Mechanik, p. 213. In Verbindung dieses Massenbegriffs mit der Erfahrungsthatsache, dass die Beschleunigungen, welche mehrere Körper A_1,

ein, dass zwei Körper A_1 und A_2, welche im Vergleich mit einem Einheitskörper A gleiche Masse haben, auch in Bezug auf jeden anderen Vergleichskörper B sich so verhalten. Diese Fassung, welche den neuesten Darstellungen[139]) zugrunde liegt und dem Vorschlage von *Andrade* nahe kommt, scheint sich ebenso sehr wie dieser letztere zu empfehlen; eine allgemeine Einigung ist bis jetzt nicht erfolgt.

Es scheint übrigens kein Hindernis zu bestehen, auf den ganz populären Standpunkt zurückzugreifen und einfach die Masse der ponderablen Körper zunächst dem Gewichte proportional zu setzen[140]) mit Berufung auf bestimmte Erfahrungsthatsachen über die Abhängigkeit derselben von Ort, Zeit und sonstigen physikalischen Zuständen, alsdann die Einführung anderer Massen der Analogie vorzubehalten, welche bei der Betrachtung verborgener Massen wie bei *Hertz* ohnedies eintreten muss. In diesem Sinne hat man übrigens von jeher die Einführung nicht gravitierender (elektrischer, magnetischer etc. ... positiver und negativer) Massen[141]) vorgenommen, indem man die Einheit derselben auf die bereits gewonnene Einheit der Kraft zurückführte; dies ist auch notwendig, wenn der Begriff der *Arbeit* einen allgemeinen Sinn erhalten soll.

3) *Das Trägheitsprinzip.* Das erste Axiom von *Newton* ist unter dem Namen des *Galilei*'schen Trägheitsprinzips bekannt: der sich selbst überlassene unabhängig von allen anderen Körpern vorgestellte Punkt bewegt sich gleichförmig und geradlinig[142]). Abgesehen von den schon oben besprochenen Schwierigkeiten, welche in der Vorstellung des unbeeinflussten Punktes liegen, erscheint dieses Axiom

---

A_2, A_3 an einem Körper A bestimmen, von einander unabhängig sind (siehe Alinea 4 des Textes) gelangt *Mach*, Mechanik, p. 242 zu einem System von Aussagen, welche geeignet erscheinen, die Fassung in Nr. 22 zu ersetzen.

139) Siehe *Love*, Mechanics, p. 87; *Maggi*, Principii, p. 150; *Boltzmann*, Mechanik, p. 22.

140) Die Einwände gegen diese Ansicht, vgl. z. B. *G. A. Greenhill*, On weigth, Nature 46 (1892), p. 247; ibid. 51 (1894), p. 105, sind bekannt; sie scheinen aber bei genauer Abwägung schliesslich nicht grösser als die Schwierigkeiten, welche bei der Definition einer physikalischen Längeneinheit vorliegen.

141) *A. Coulomb*, Paris, Mém. de l'Acad. 1745, p. 569, *Ostwald*, K. B. Nr. 13; *C. F. Gauss*, Intensitas vis magneticae terrestris etc. 1833 = Werke 5, p. 79.

142) *Galilei*, Discorsi, dritter und vierter Tag, *Ostwald*, K. B. Nr. 24, p. 57, 81. Nach *E. Wohlwill*, Zeitschr. f. Völkerpsychologie u. Sprachwissenschaft 15 (1883/84), p. 104 hat *Galilei*, bei dem eine apriorische Begründung des Trägheitsprinzips im Sinne von Fussn. 22 sich überhaupt nicht zu finden scheint, übrigens seine Aussage auf die Vorgänge an der Erdoberfläche beschränkt; die Erweiterung auf die Mechanik des Himmels rührt von *Newton* her.

überhaupt *überflüssig*. Überdies ist es eine *Täuschung*[143]), wenn man glaubt, dass sich in der *Erfahrung* dasselbe *nachweisen* lasse. Allerdings lässt sich erkennen, dass die Abweichungen von der Trägheitsbahn kleiner und kleiner werden, je mehr man gewisse die Bewegung beeinflussende „Umstände" beseitigt; dass aber, *wenn* der Punkt sich gleichförmig und geradlinig bewegt, solche Umstände *nicht* mehr vorhanden sind, wird schon vorausgesetzt und liegt jenseits aller möglichen Erfahrung[144]). Einen wirklichen, dann aber auch *nur* metaphysischen Sinn hat das Trägheitsprinzip allein dann, wenn man neben *Newton's* realem Raum, in dem die Bewegung des einzelnen Punktes betrachtet werden kann, auch ein reales absolutes Zeitmass annimmt.

4) *Der Kraftbegriff.* Die rein dynamische *Definition der Kraft als einer bloss abkürzenden Bezeichnung für die Thatsache, dass ein Massenteilchen eine gewisse Beschleunigungskomponente besitzt*, steht allerdings in keinem Zusammenhang mit dem statischen Kraftbegriff. Man wird sich aber um so eher entschliessen, den letzteren *aufzugeben*, und damit den schon von *Gauss*[145]) gerügten *Dualismus zwischen*

---

143) Über die logischen Schwierigkeiten, die im Trägheitsgesetz liegen, und zum grossen Teil durch Missverständnisse selbst geschaffen sind, vgl. *F. Poske,* Der empirische Ursprung von der Allgemeingültigkeit des Beharrungsgesetzes, Vierteljahrsschr. f. wiss. Philosophie 8 (1884), p. 385, mit Zusatz von *W. Wundt*, p. 405; desgl. *L. Weber*, Über das Galilei'sche Prinzip, Kiel 1891; *P. Johannesson*, Über das Beharrungsgesetz, Schul-Programm, Berlin 1896, Nr. 98.

144) Man kann sich daher sehr wohl eine Mechanik denken, bei der die Bewegung des unbeeinflussten Punktes eine ganz andere wäre, so z. *F. Reech* im Cours de mécanique, vgl. Fussn. 72; dann *J. Andrade*, Mécanique physique; ähnlich äussern sich auch *H. Poincaré* und *P. Painlevé* [Revue de métaphys. (8) 5 (1900), p. 557]; auch schon weit früher *Jacobi* in seiner Vorlesung 1847/48, p. 1.

145) *Gauss*, J. f. Math. 4 (1829), p. 233: „So fordert doch der Geist den umgekehrten Gang, wobei die ganze Statik als ein besonderer Fall der Dynamik erscheint"; *Laplace*, Méc. cél., p. 16 will noch die Proportionalität von Kraft und Beschleunigung *beweisen*, so auch *Poisson*, Mécanique, 2. éd., 1, § 116.

Eine allgemeine Einigung über diese beiden Auffassungen des Kraftbegriffs ist bisher nicht erzielt. Während die abstrakte Dynamik, für die die Statik nur ein *Grenzfall* ist, den Begriff $m\varphi$ als ausreichend betrachtet, gehen die auf die Anwendungen gerichteten Darstellungen der Mechanik zunächst von den statischen Erscheinungen (als den *scheinbar* einfacheren) aus, d. h. von der Messung der Kräfte durch *Gewichte*, resp. durch die Formänderungen elastischer Systeme (*Federwagen, Dynamometer*). Vgl. die ausführliche Darlegung bei *Ch. Freycinet,* Essais sur la philosophie, Paris 1896, p. 153 ff. *A. Ritter,* Lehrbuch der analytischen Mechanik, 2. Aufl. Leipzig 1883, p. 66, dessen Anschauung gewiss von vielen geteilt wird, definiert zwar Kraft durch $m\varphi$, will aber die Masse selbst nur durch die Kräfte messen. „Es muss vielmehr vorausgesetzt werden, dass es erfahrungsmässig noch ein anderes Kriterium giebt, um die Gleichheit

Statik und Dynamik zu beseitigen, als eine befriedigende Darstellung der statischen Vorgänge als solcher, bei denen die Beschleunigung Null ist, nicht allein gelingt, sondern damit zugleich weitere Voraussetzungen entbehrlich zu werden scheinen. Das *Unabhängigkeitsprinzip* [146]), das nach Ansicht mancher englischer Autoren in *Newton*'s lex secunda enthalten ist, und auf das sich der Parallelogrammsatz gründet, ist erst später in der französischen Schule mit besonderem Nachdrucke hervorgehoben. Dasselbe scheint überflüssig zu werden, wenn man *die Lehre von der Zusammensetzung der Beschleunigungen* einfach als Forderung auf die Beschreibung der Erscheinungen durch den Kraftbegriff *überträgt* [147]). Als Ausdruck der dynamischen Grundvorstellungen gelten nun die *Bewegungsgleichungen des freien materiellen Punktes*

$$m\ddot{x} = X$$
$$m\ddot{y} = Y$$
$$m\ddot{z} = Z,$$

in denen die X, Y, Z als die durch Beobachtung der Beschleunigungen und Massen resp. der statischen Wirkungen, je nach dem zugrunde gelegten Kraftbegriff, zu gewinnenden Werte der Kraftkomponenten aufzufassen sind [148]).

zweier Kräfte zu erkennen", nämlich die Identität der Formänderungen am Dynamometer; ähnlich auch bei *A. Ritter*, Lehrbuch der technischen Mechanik, 7. Aufl. Leipzig 1896, p. 42; vgl. auch *E. Budde*, Mechanik 1, p. 111.

146) Siehe dessen Fassung bei *Duhamel*, Mechanik 1, p. 338; *E. Bour*, Mécanique 2, p. 7. Von *D. Bernoulli* (Comm. Ac. Petrop. 1728, p. 126) ist dasselbe *zuerst* ausgesprochen. *Poisson* legt es seiner Mechanik von 1811 (p. 277) zugrunde; in der 2. éd., 1, p. 172 sucht er dasselbe durch eine Betrachtung zu beseitigen, auf deren Haltlosigkeit schon der Übersetzer *M. A. Stern* aufmerksam macht. Der willkürliche, aber einer bequemen Beschreibung der Bewegungsvorgänge angemessene Charakter des Unabhängigkeitsprinzips ist wohl selten bezweifelt worden. *Poincaré* (vgl. Fussn. 144) bemerkt neuerdings, dass das *Verhalten magnetischer Massen* mit dem Gesetze nicht unmittelbar in Einklang stehe; vgl. dazu die Bemerkung von *Painlevé* „Les principes de la mécanique sont des conventions que l'expérience ne pourra jamais mettre en defaut".

147) So z. B. *Tait*, Encycl. Brit., 9. ed. (1881), Art. Mechanics, p. 701; *Mc. Gregor*, On the hypotheses, Fussn. 129; *F. Muirhead*, On the laws of motion, Phil. Mag. (5) 23 (1887), p. 489.

148) Es besteht kein Hindernis, diese Werte der X, Y, Z als abhängig vom Bewegungszustande, d. h. den x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ anzusehen; enthalten sie auch die $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, so ergiebt sich durch Auflösung nach denselben ein analoges Problem. Ein ganz anderes Verhalten aber tritt ein, wenn die Kräfte von noch höheren Derivierten abhängen, da nun der Anfangszustand (im gewöhnlichen Sinne) überhaupt nicht mehr zur Bestimmung hinreicht; dies wird nicht immer hervorgehoben.

5) Das Gesetz der *Aktion und Reaktion*, *Newton*'s lex tertia, welches in Nr. 22 nicht unter die Lehren der klassischen Dynamik aufgenommen wurde, ist für die akademischen Beispiele der Bewegung freier Punkte nicht erforderlich, enthält aber für die Betrachtung von materiellen Systemen gerade den wichtigsten Teil der *Newton*'schen Mechanik. Nach *Hertz*, der dasselbe für die Wirkungen zwischen *Teilsystemen* als eine Folge seines Grundgesetzes *beweist*[149]), ist dasselbe in seiner Ausdehnung über diesen Fall hinaus eine unerweisbare, vielleicht nicht einmal richtige Behauptung; überdies sind in der Elektrodynamik und Elastizitätstheorie allgemeinere Formen dieses Gesetzes aufgetreten[150]). Es erscheint nicht unrichtig, wenn *Petrini*[151]) in dem Gesetz eine — im Interesse der Einfachheit nützliche — Methode zur angemessenen Begrenzung der Untersuchungen sieht.

24. Die momentanen Kräfte, Stösse oder Impulse[152]). Da jede Kraft K in der Zeit dt in ihrer Richtung nur die geradlinige *Abweichung* oder *Deviation*[153])

$$\frac{1}{2}\frac{K}{m}dt^2,$$

dagegen die unendlich kleine Geschwindigkeit

$$\frac{K}{m}dt$$

hervorbringt, so ist die abstrakte Mechanik zunächst nicht im stande, die scheinbar plötzlichen Änderungen des Bewegungszustandes zu erklären, welche man beim Stosse wahrzunehmen glaubt. Ohne auf die frühere Behandlung dieser Fragen durch *Huygens*[154]) und andere einzugehen, sei nur bemerkt, dass sich gegen die *Vorstellung*[154a]) nichts

149) *Hertz*, Mechanik, p. 215.

150) Erweiterung desselben bei *Volkmann*, Theoretische Physik, p. 131; nach anderer Richtung bei *Voigt*, Kompendium 1, p. 79.

151) *H. Petrini*; Fussn. 11, p. 221.

152) Die Bezeichnung ist an sich natürlich gleichgültig; der Ausdruck *Impuls* (nach *Thomson* und *Tait* (Treatise (1) 1, p. 283) gewählt, obwohl dies auch nichts anderes als Stoss bedeutet), z. B. bei *E. Budde*, Mechanik 1, p. 411, scheint allgemeiner in Gebrauch zu kommen. Vgl. *Klein* u. *Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, p. 69 ff.

153) Diese Formel zuerst bei *Euler*, Découverte d'un nouveau principe de mécanique, Berlin, Mém. de l'Acad. 1750 (1752), p. 185; Theoria motus, § 169.

154) Über *Huygens* und seine Vorgänger vgl. z. B. *Mach*, Mechanik, p. 300—325; desgl. *Galilei*'s Untersuchungen über den Stoss, Ostwald, K. B. Nr. 25, p. 37.

154a) In der Mechanik von *Hertz*, p. 288, ist die Vorstellung gerade *umgekehrt*; es handelt sich um wahre Unstetigkeiten der Bewegung, welche vermöge der existierenden Zeitintegrale der Beschleunigungen beschrieben werden.

einwenden zu lassen scheint, dass es sich hierbei um Vorgänge kontinuierlicher Art handelt, die in so kurzer Zeit ablaufen[155]), dass eine scheinbare Diskontinuität entsteht. Wenn in der Formel

$$m\ddot{x} = X$$

oder

$$m(\dot{x} - \dot{x}_0) = \int_{t_0}^{t} X dt = P$$

X als sehr gross angesehen wird, kann selbst in einem ausserordentlich kleinen Zeitintervall $t - t_0$ die rechte Seite einen unter einer endlichen Grenze liegenden mit den gewöhnlichen Grössenordnungen vergleichbaren Wert P annehmen, den man nun als *Intensität des Stosses oder Impulses* bezeichnet; links steht der Zuwachs an *Bewegungsgrösse* (quantité de mouvement, momentum). Die momentanen Kräfte oder *Impulse* werden daher durch den vektoriellen Zuwachs an Bewegungsgrösse gemessen, welche sie in einem ausserordentlich kleinen Zeitraum erzeugen. Da gleichzeitig

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} \dot{x} dt$$

ist, so erfährt der materielle Punkt m bei einer Lagenänderung von der Ordnung $t - t_0$ einen Geschwindigkeitszuwachs $\dot{x} - \dot{x}_0$.[156]) In erster Annäherung gestattet man sich von einer *plötzlichen Geschwindigkeitsänderung bei unveränderter Lage des Punktes* und von dem Integralwert bei gegen Null konvergierendem $t - t_0$ zu reden. So unbefriedigend diese Auffassung in mancher Hinsicht ist, deren Inhaltlosigkeit nur formal durch die benutzten Integralzeichen[157]) verdeckt wird, so hat sich doch gegen diese in der französischen Schule besonders nachdrücklich ausgebildete Vorstellung, die mit den Beobachtungen in genügender Übereinstimmung zu sein scheint, ein Widerspruch bislang nicht erhoben.

Die Vorstellung, dass die Bewegungsgrösse mv eines materiellen

---

155) Dies ist die *Stosszeit*, time of impact der englischen Schriftsteller, vgl. *Thomson* und *Tait*, Treatise (1) 1, p. 274.

156) Theoretisch sind natürlich ganz andere Fälle denkbar, da es sich um die *Grenzwerte* handelt, gegen welche die Integrale konvergieren sollen; so z. B. der, wo *ohne* Geschwindigkeitsänderung noch eine *endliche* Verschiebung bei gegen Null konvergierender Zeit erfolgt; Beispiele dieser Art bei *G. Darboux*, Bull. sciences math. (2) 4 (1880), p. 128.

157) Diese Integrale in *Poisson*'s Mécanique, bei *Duhamel*, Mechanik 2, p. 81. Insbesondere vgl. man *G. Darboux*, Étude géométrique sur la percussion et le choc les corps, Paris C. R. 78 (1874) und Bull. sciences math. (2) 4 (1880), p. 126; dort auch momentane Reibungsimpulse.

Punktes mit der Masse m einem Impulse $P = mv$ äquivalent ist, der dem ruhenden Punkte plötzlich die Geschwindigkeit v mitteilt, ist übrigens keine nur nebensächliche; dies zeigt sich insbesondere, wenn man die generalisierten Impulse $p_s = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$, vgl. Nr. **26**, als solche betrachtet, die den generalisierten Koordinaten q_s die Geschwindigkeiten $\dot{q}_s$ erteilen. Sie tritt sogar von vornherein als *gleichberechtigt* neben die der kontinuierlichen Kräfte. Übrigens handelt es sich dabei nicht eigentlich um eine diskontinuierliche Auffassung, da die Impulse doch selbst wieder als stetig wechselnd im allgemeinen angesehen werden. *d'Alembert* scheint auf sein Prinzip ursprünglich durch Betrachtung von Impulsen gekommen zu sein[157a]); auch *Lagrange* berücksichtigt in seiner Mécanique gleichmässig *beide* Vorstellungen, die später besonders in *Poinsot*'s synthetisch-dynamischer Theorie der Bewegung des starren Körpers hervortreten[157b]).

Diese verallgemeinerte Auffassung des Impulsbegriffes, auf die *Maxwell* seine allerdings bestrittene Herleitung der dynamischen Differentialgleichungen gründete, sowie der reiche Inhalt der verschiedenen Theoreme, welche *Thomson* und *Tait* in Verfolgung der *Carnot*'schen und *Bertrand*'schen Sätze[157c]) entwickeln, kommt in der deutschen Litteratur neuerdings in methodisch entwickelter Form zur Geltung in *Klein* und *Sommerfeld*'s Theorie des Kreisels[157d]).

25. Druck und Oberflächenkräfte; verallgemeinerter Kraftbegriff. Bei der Annahme einer kontinuierlichen Massenverteilung hat man sich genötigt gesehen, neben den direkt gegebenen Kräften, die dann gewöhnlich auf die Masseneinheit bezogen durch X, Y, Z bezeichnet werden, also für die Masse $\varrho d\tau$ gleich $X\varrho d\tau$, $Y\varrho d\tau$, $Z\varrho d\tau$ sind, noch Oberflächenkräfte und Druckkräfte einzuführen. Dynamisch bildet die Vorstellung einer über eine Oberfläche verbreiteten Druckkraft gewisse Schwierigkeiten, da diese Kräfte überhaupt nicht mehr an den Massenteilchen haften, sondern nur als

---

157a) Siehe die Dynamik von *d'Alembert*, Ostwald, K. B. Nr. 106, p. 138.

157b) *L. Poinsot,* Théorie nouvelle de la rotation, Paris 1834, dann J. de math. (1) 6 (1851), p. 9 u. 289; Sur la percussion des corps, ibid. (2) 2 (1857), p. 281 und (2) 4 (1859), p. 421; vgl. auch *Schell*, Theorie d. Bewegung 2, p. 352 ff.

157c) Vgl. *Thomson* u. *Tait*, Treatise (1) 1, p. 284; *E. J. Routh*, Dynamik 1, p. 335, 350, sowie die dort gegebene Litteratur; hierher gehört auch die der englischen Litteratur eigentümliche Betrachtung der Anfangsbewegungen (initial motions) z. B. bei *Routh*, Dynamik 1, p. 420.

157d) *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, Leipzig 1897, p. 69 ff., 93, etc.

statische Resultanten auftreten, welche zwischen starren masselosen Trennungsflächen nach den Gesetzen des Gleichgewichts auftreten. In dieser Weise ist namentlich durch *Cauchy*[158]) die Vorstellung eines inneren Druckes bei kontinuierlicher Massenverteilung begründet; manche Äusserungen anderer Autoren deuten darauf hin, dass dieselbe noch keineswegs völlig entwickelt ist[159]).

Wir schliessen hieran noch einen kurzen Hinweis auf *weitere Verallgemeinerungen des Kraftbegriffs.* Dass die Mechanik geneigt scheint, nicht nur von bewegenden, sondern schliesslich ganz allgemein von zustandsändernden Kräften zu handeln, wurde schon in Nr. 3 bemerkt. Aber auch die im Sinne der ersteren gefassten Gesetze werden mannigfach erweitert. Schon das *Weber*'sche Gesetz führt zu von den Beschleunigungen abhängigen Kräften, die *C. Neumann*[159a]) durch die Unterscheidung eines *emissiven* und *receptiven Potentials,* d. h. einer *zeitlichen Fortpflanzung der Fernewirkung* den gewöhnlichen Voraussetzungen wieder unterordnete; die mannigfachen Spekulationen über die mit der Gravitationslehre in Zusammenhang stehenden Fernkraftgesetze begrenzt derselbe passend durch die Forderung, stabile Gleichgewichtszustände elektrischer Massen hervorrufen zu können. Rein mathematischer Natur, aber für die Methodik der Dynamik wichtig, sind die umfangreichen seit 1896 fortgesetzten Untersuchungen von *Koenigsberger*[159b]) über die Analogieen, welche unter Voraussetzung von kinetischen Potentialen allgemeinster Art bei dem Gebrauch des *Hamilton*'schen Prinzips hervortreten.

---

158) *Cauchy*, Exerc. de math. 1827 = Oeuvres (2) 7, p. 60; 1828 (Oeuvres (2) 8, p. 253 ff.); 1829 (Oeuvres (2) 9, p. 41); desgl. *Poisson*, Sur les équations générales de l'équilibre . . des corps solides elastiques et fluides, J. éc. polyt. 20 (1831), p. 1; ganz abstrakt ist die Darstellung bei *Kirchhoff*, Mechanik, p. 110, der die Begriffsbestimmungen des inneren Druckes mittelst *Green*'s partieller Integration gewinnt.

159) *Duhem*, Le potentiel thermodynamique, Ann. éc. norm. (3) 10 (1893), p. 186, 213. Vgl. auch *J. Larmor*, Aether and matter, p. 270.

159a) *C. Neumann*, Die Prinzipien der Elektrodynamik, Tübingen 1868; die Vorstellung einer zeitlichen Fortpflanzung tritt schon 1845 bei *Gauss* auf (Brief an *Weber*), Werke 5, p. 269. — *C. Neumann*, Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Potential, Leipzig 1896, p. 227; vgl. *H. Seeliger*, Über das Newton'sche Gravitationsgesetz, Münch. Ber. 26 (1896), p. 373.

159b) *L. Koenigsberger*, Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig 1901. Hier wird p. 127 die in Fussn. 159a erwähnte *Neumann*'sche Vorstellung auf eine ganz andere Weise, nämlich durch Zuziehung verborgener Bewegungen, wieder den gewöhnlichen untergeordnet.



D) Die rein kinetischen Theorieen.

26. Die Elimination der Kraft in der Kinetik von W. Thomson (Lord Kelvin). Wir gehen endlich zu einigen neueren Fortbildungen der Mechanik über. Durch die *Lagrange*'schen Differentialgleichungen der Bewegung[160]) in allgemeinen Koordinaten (vgl. Nr. 37)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s$$

wird man veranlasst, die Q_s als Kraftkomponente genommen nach der Koordinate q_s, als *generalisierte Kraft*, zu bezeichnen, was auch in dem bei beliebigen Transformationen der q_s in andere unabhängige Variabele r_s *invarianten* Ausdruck für die *Arbeit*

$$\sum Q_s dq_s$$

seine Begründung findet; eine ähnliche Verallgemeinerung tritt ein in Bezug auf die generalisierten *Impulskoordinaten*

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s},$$

welche bei vielen Problemen eine besonders anschauliche Bedeutung besitzen[161]).

Weit wichtiger erscheinen aber die Gedankengänge, welche auf die *vollständige Elimination des Kraftbegriffs*, als des einzigen, der von metaphysischen Ideen über das Wirken der Dinge aufeinander schon infolge unserer gewohnten Ausdrucksweise sich schwer loslöst, abzielen.

Insbesondere hat *W. Thomson* sich mit Vorliebe immer aufs neue der Absicht zugewandt, durch bis ins einzelne ausgeführte Bilder und Modelle die *allgemeine Möglichkeit einer rein kinetischen Dynamik* zu erläutern, deren Erfolge auf dem speziellen Gebiet der kinetischen Theorie der Gase bereits erkannt waren.

Ein erster Ansatz dazu wurde von *Thomson* 1876 mit Hülfe der von *Helmholtz* 1858 entdeckten *Eigenschaften der Wirbelbewegung*[162]) — bezüglich deren auf Band IV 16, 3b hier verwiesen werden möge — auf das Verhalten der *Wirbelringe*, als in gewissem Sinne unzer-

---

160) Es muss hier vorgreifend die Bekanntschaft mit den *Lagrange*'schen Gleichungen der Dynamik vorausgesetzt werden, welche in Nr. 37 hergeleitet werden.

161) Vgl. namentlich *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie d. Kreisels.

162) *Helmholtz*, Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, J. f. Math. 55 (1858), p. 25; bei *Cauchy* (Oeuvres (1) 1, p. 39) schon 1815.

störbaren [163]) Gebilden in einer idealen Flüssigkeit, und den scheinbaren Kräften, welche dieselben aufeinander ausüben, gegründet; *Thomson* bezeichnet sie geradezu als die Atome des „Seienden" [164]). Eine wirklich allgemeine Ausführung hat er indessen ebenso wenig von diesem kühnen Aperçu gegeben [165]), wie von der etwas später von ihm begründeten, durch seine Schüler weiter behandelten *Theorie der Gyrostaten*, welche geradezu die Kraftwirkungen der elastischen Materie zu erklären bestimmt sind. Ein solcher *Gyrostat* besteht in seiner einfachsten Form aus einem um eine Achse rotierenden Rotationskörper (Schwungrad). Nachdem *Thomson* zuerst das Gleichgewicht eines durch masselose starre Verbindungen von Gyrostaten angeordneten Systems dieser Art untersucht hatte [166]), dehnt er diese Vorstellung auch auf die elastischen Schwingungen eines Systems um seine Gleichgewichtslage aus [167]).

27. Die kinetische Theorie der Kraft von J. J. Thomson. Von dieser auf die Theorie der Gyrostaten begründeten *kinetischen Theorie der Kraft* ist nur noch ein Schritt zu der ganz abstrakten und völlig neuen Wendung, welche *J. J. Thomson* eingeschlagen hat [168]). Wenn nämlich bei den Gleichungen eines kräftelosen materiellen Systems (Nr. 26)

---

163) Namentlich bleibt der *Zusammenhang* geschlossener Wirbelringe im Sinne der Analysis situs unveränderlich.

164) *W. Thomson,* On vortex atoms, Phil. Mag. (4) 34 (1867), p. 15; Edinb. Roy. Soc. Proc. 6 (1869), p. 44; Edinb. Roy. Soc. Trans. 25 (1869), p. 217. Letztere beginnt so: Diese Arbeit wurde unternommen, um zu zeigen, dass durch die Hypothese, der Raum sei erfüllt mit einer inkompressibelen Flüssigkeit, auf die keine äusseren Kräfte wirken, *alle materiellen Phänomene erklärt werden können;* vgl. ferner Edinb. Roy. Soc. Proc. 7 (1872), p. 576, vgl. auch *A. E. H. Love,* On recent English researches in Vortex motion, Math. Ann. 30 (1887), p. 326.

165) The possibility of forming a theory of elastic solids and liquids may be anticipated Phil. Mag. (4) 34 (1867), p. 15; *Maxwell* bemerkt indes dazu (Encycl. Brit., 9. ed. 3, p. 45): „The difficulties of this method are enormous, but the glory of surmounting them would be unique"; vgl. auch: *W. Thomson,* On vortex statics, Phil. Mag. (5) 10 (1880), p. 97; *J. J. Thomson,* On the motion of vortex rings, London 1883.

166) On oscillations and waves in an adynamic gyrostatic system, Edinb. Roy. Soc. Proc. 12 (1883).

167) Steps towards a kinetic theory of matter, Brit. Assoc. Rep. (Montreal 1884), p. 613, London 1885; desgl. On a gyrostatic adynamic constitution for ether (1889); Math. and Phys. Papers 3, p. 366; *J. Larmor,* On the propagation of a disturbance in a gyrostatically loaded medium, Lond. Math. Soc. Proc. 23 (1891), p. 127.

168) *J. J. Thomson,* Lond. Phil. Trans. 176 (1885), p. 307; On some appli-

(1) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = 0$$

in der lebendigen Kraft T gewisse generalisierte Koordinaten q_j nur durch ihre $\dot{q}_j$ enthalten sind, und auch keine Produkte $\dot{q}_i \dot{q}_j$ vorkommen, falls die übrigen Koordinaten durch q_i bezeichnet werden, so hat man aus 1) für $s = i$

(2) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$$

und für $s = j$

(3) $$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = c_j.$$

Geht nun durch Elimination der $\dot{q}_j$ [169]) vermöge (3) T in (T) über, so ist

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial (T)}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \sum (c_j \dot{q}_j),$$

wo rechter Hand vermöge (3) nun alles als Funktion der q_i dargestellt werden kann. Fasst man die rechte Seite als Kräftefunktion U auf, so hat man die von *J. J. Thomson* [170]) namentlich im Sinne der allgemeinen dynamischen Theorie *Maxwell*'s ausgeführte Möglichkeit, mit Hülfe der kinosthenischen Koordinaten q_i das Auftreten von Kräftefunktionen rein kinetisch zu deuten und so die potentielle Energie auf kinetische Energie „ignorierter" Massen zurückzuführen.

28. **Die Mechanik von H. Hertz.** Diese Auffassung ist von *Hertz* in seiner Mechanik zu dem Ideal einer *völlig kräftelosen Dynamik* ausgebildet. *Hertz* kennt nur Systeme von materiellen Punkten, die durch Bedingungen verbunden sind, und deren Bewegung durch das *Gauss*'sche Prinzip des kleinsten Zwanges geregelt ist, welches er in einer an *Newton*'s lex prima erinnernden Ausdrucksweise als *Grundgesetz der Bewegung in geradester Bahn* [171]) bezeichnet. Der

---

cations of dynamical principles to physical phenomena, London 1888; auch deutsch: Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie, Leipzig 1890.

169) Dieser wichtige Schritt ist zuerst von *E. J. Routh,* Essay on stability of motion (1877), p. 61, gemacht. Diese Koordinaten q_j heissen bei *J. J. Thomson* kinosthenische, bei *Thomson* u. *Tait* (Treatise (1) 1, p. 318) ignored coordinates; diese Vorgänge sind später von *Helmholtz* als *verborgene* Bewegungen bezeichnet (J. f. Math. 100 [1887], p. 147).

170) *J. J. Thomson*, Anwendungen (Fussn. 169) p. 16, 23—97.

171) *Hertz,* Mechanik, p. 162: Systema omne liberum perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directissimam. Über *Hertz*, Mechanik vgl. *Mach*, Mechanik, 4. Aufl. p. 269; *J. Larmor*, Brit. Assoc. Rep., London 1900, p. 620.

materielle Punkt als Einzelobjekt ist bei dieser Auffassung eine in gewissem Sinne *überflüssige Fiktion*, sodass zugleich die *rein* mathematischen Beispiele der Bewegung einzelner Punkte, welche die analytische Mechanik der früheren Zeit mit Vorliebe pflegte und auch als Mittel zur Fortbildung und Erweiterung der analytischen Theorieen nicht entbehren kann, aus den eigentlich mechanischen ausscheiden.

Allerdings redet auch *Hertz* von Kräften, sie bestehen aber nun wirklich *nur* in den Beschleunigungswerten, welche jeder *Teil* eines Systems auf jeden anderen ausübt. *Diese systematische Konstruktion der Kräfte auf Grund einer rein kinetischen Theorie*[172]), welche nur in ganz allgemeinen Zügen von *J. J. Thomson* skizziert war, im Einzelnen völlig ausgeführt zu haben, ist das *eine* Hauptverdienst der *Hertz*'schen Mechanik[173]). Denn die Einführung des Grundgesetzes, auf welches er die Entwicklung seiner Dynamik zurückführt, ist schon vorher von *J. J. Thomson* in einer ganz ähnlichen auf die Vorstellung der *brachistochronischen* Bewegung in einer n-fachen Mannigfaltigkeit bezogenen Form ausgesprochen. Allerdings wird *Hertz* dabei genötigt, jedes System als Teilsystem anderer aufzufassen, d. h. neben den *sichtbaren* Massen noch *verborgene* mit den ersten durch Bedingungen *gekoppelte* anzunehmen. Eine weitere Ausführung dieser allgemeinen Ideen auf die Behandlung bestimmter Fragen liegt nicht vor, und die zerstreuten Bemerkungen, welche von anderen Seiten in dieser Richtung hinzugefügt sind[175]), lassen nicht erwarten, dass

---

172) *Hertz*, Mechanik, p. 207—235.

173) Das *andere* besteht in der ausserordentlich anschaulichen Form, in der *Hertz* die Geometrie der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit für seine speziellen Zwecke gedeutet hat, sowie in dem von ihm eingeführten konsequenten System von Begriffen. Charakteristisch ist dabei der Begriff der *Grösse s der Verrückung* von Massenteilchen m_i aus der Lage mit den Koordinaten x_i, in die Lage x_i':

$$Ms^2 = \Sigma m_i (x_i - x_i')^2; \; 3M = \Sigma m_i;$$

sowie des *Winkels* $(s\sigma)$ *von zwei Verrückungen eines Systems*

$$Ms\sigma \cos(s\sigma) = \Sigma m_i (x_i - x_i')(y_i - y_i'),$$

welche den durch x_i, x_i'; y_i, y_i' bezeichneten Koordinaten entsprechen. Übrigens definiert schon *Duhem* im Commentaire 1892, p. 269, Kraft und Arbeit genau in dem Sinne von *Hertz*.

174) *J. J. Thomson*, Anwendungen, p. 17; schon von *Jacobi* wurden 1847 die dynamischen Probleme als brachistochronische betrachtet. In anderer Weise zeigt *R. Liouville*, Sur les équations de la dynamique, Paris C. R. 114 (1892), p. 1171, wie *jedes* dynamische Problem im alten Sinne auf das der geodätischen Linien reduziert werden kann.

175) Nach *Mach*, Mechanik, p. 253, kann die gleichförmige Bewegung

Hertz's Gedankengang in der nächsten Zeit eine wesentliche Vervollkommnung nach *dieser* Richtung hin finden wird.

Eine besondere Schwierigkeit bereitet hier der Umstand, dass zu einer passend begrenzten Behandlung der Frage, wie einem gegebenen System andere verborgene Massen zu adjungieren sind, keinerlei Vorschriften vorhanden sind, vielmehr unendlich viele Lösungen dieser Aufgabe sich angeben lassen [176]).

So hat sich die Mechanik, ausgehend von der bedingungslosen Fernewirkungstheorie, allmählich zur kräftelosen Dynamik von Lord *Kelvin*, *J. J. Thomson* und *Hertz* entwickelt. In der Mitte steht noch immer das System der klassischen Mechanik, das in der pädagogischen Litteratur wahrscheinlich auch zunächst den Vorrang behaupten wird, welches mit Kräften *und* Bedingungen operiert. Als Vertreter der bedingungslosen Mechanik kann man gegenwärtig in Deutschland *Boltzmann* und *C. Neumann*, in Frankreich *J. Boussinesq* ansehen; doch scheinen die gesteigerten Anforderungen der mathematischen Physik und die Eigenartigkeit ihrer Probleme allmählich dahin zu drängen, die Vorstellung reiner von der Entfernung abhängiger Fernkräfte als zu enge auch in der theoretischen Mechanik durch allgemeinere Bilder zu ersetzen.

III. Die speziellen Prinzipien der rationellen Mechanik.

A) Elementare Variations- oder Differentialprinzipe.

α. Die Statik.

29. Begriff des Gleichgewichts. Die elementare Statik suchte schon früh an den *einfachen Maschinen* zu ermitteln, wann an einem ruhenden materiellen System unter Einfluss gegebener Kräfte keine Bewegung hervorgerufen wird, den Fall des *Gleichgewichts*. Erst mit

---

eines materiellen Punktes im Kreise r durch Koppelung mit einer verborgenen Masse im Abstande $2r$ ersetzt werden; siehe auch *A. Brill:* Über die Mechanik von *Hertz*, Mitth. d. math. Vereins in Württemberg, Stuttgart 1899; desgl.: Über ein Beispiel des Herrn *Boltzmann* zur Mechanik von *Hertz*, Deutsche Math.-V. 8 (1900), p. 200.

176) So bemerkt *Poincaré* (Electricité et optique, préface p. XII), dass nach *Maxwell* alle physikalische Erklärung darauf beruht, die beiden Teile T und V der in irgendwelchen Parametern q bei einem dynamischen Problem (nach *P. Stäckel*'s Bezeichnung J. f. Math. 107 (1891), p. 319) ausgedrückten Energie durch ein System von $4n$ Grössen zu befriedigen, welche aus den n Massen und den $3n$ Koordinaten bestehen, wobei n beliebig gross sein kann.

Varignon[177]) beginnt aber die *Zurückführung aller Gleichgewichtsprobleme* auf die Zusammensetzung der Kräfte *am einzelnen materiellen Punkte.* Bei einem solchen handelt es sich indes nicht um die Frage der *relativen Ruhe* gegen ein Koordinatensystem, sondern um den Fall, wo unter Einwirkung der Kräfte keine *Änderung* des Bewegungszustandes, d. h. keine *Beschleunigung* entsteht. Für die *Statik allein* reicht es allerdings aus, nur den Fall der relativen Ruhe gegen das Bezugssystem anzunehmen; für die Anwendungen derselben auf die *Dynamik* aber ist es erforderlich, den Begriff des Gleichgewichts in der angedeuteten Weise zu erweitern.

In Rücksicht auf diese Betrachtung ergiebt sich auch der Begriff des Gleichgewichts eines *materiellen Systems*, d. h. einer Vereinigung beliebig vieler materiellen Punkte, welche durch teils geometrische *Bedingungen der Konfiguration*, teils durch *innere* Kraftwirkungen mit einander verknüpft sind: unter der axiomatischen Annahme[178]), dass die Bedingungen ebenfalls durch Kräfte *ersetzt* werden können, wird Gleichgewicht bestehen, wenn die Beschleunigung eines jeden, jetzt als völlig frei zu betrachtenden Punktes Null ist. Selbstverständlich kann man diese Definition mit *Boltzmann*[179]) auch auf den Fall ausdehnen, dass an einem in beschleunigter Bewegung befindlichen Systeme unter Einwirkung irgend einer Gruppe von Kräften Gleichgewicht besteht, wenn keine Veränderung dieses Bewegungszustandes durch diese Gruppe hervorgerufen wird.

Trägt man indessen Bedenken, den Begriff des Gleichgewichtes von vornherein so zu erweitern, so muss man, insbesondere wegen der Anwendung auf das *d'Alembert*'sche Prinzip, folgendes Axiom (oder ein ähnliches) aussprechen:

Befindet sich ein materielles System A zur Zeit t in irgend einem Bewegungszustande, so kann man ihm stets ein zweites mit ihm im Momente t zusammenfallendes System B adjungieren, dessen sämtliche Punkte vermöge der nämlichen geometrischen Bedingungen mit denselben Geschwindigkeiten während der Zeit t bis $t + dt$ sich bewegen,

---

177) *P. Varignon*, Préface im tome 1 der Nouvelle mécanique: „Enfin je m'appliquai à chercher l'équilibre lui même dans sa source, ou pour mieux dire, dans sa génération."

178) Giebt man zu, dass jede Beschleunigung durch geeignete Kräfte auch gehindert werden könne, so lässt sich diese Annahme auch weiter verfolgen; vgl. *A. L. Cauchy*, Exerc. de math. 1826 (Oeuvres (2) 7, p. 11); freilich nur unter Zuhülfenahme eines weiteren Axioms.

179) *Boltzmann*, Mechanik, p. 283; vgl. auch Deutsche Math.-V. 6 (1898), p. 142.

wie A, und diesem ein drittes im Momente t ebenso beschaffenes C, das während dieser Zeit in relativer Ruhe gegen das Koordinatensystem verharrt[179a]). Das System A ist dann und nur dann unter dem Einfluss der wirkenden Kräfte im Gleichgewicht, wenn dies bei dem System C unter dem Einfluss der bei A vorhandenen Reaktionen, die durch die Verbindungen hervorgerufen werden, und der wirkenden Kräfte der Fall ist.

30. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Dass das Gleichgewicht nicht auf *besonderen*, nur auf jeden einzelnen Fall anwendbaren Bedingungen beruht, ward bei den einfachen Maschinen schon von *Stevin, Galilei* und anderen erkannt[180]), bei *Joh. Bernoulli*[181]) tritt ohne Beweis vermöge einer genialen Induktion die allgemeine Regel auf, welche unter dem Namen des *Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten oder der virtuellen Verschiebungen* (Verrückungen)

179a) Das System C, welches mit B im Momente t zusammenfällt und dessen Punkte während der Zeit t bis $t+dt$ ruhen, was bei B nicht der Fall ist, kann vielleicht entbehrlich erscheinen. Die Einführung eines derartigen Axioms (dessen Fassung im Texte als ein vorläufiger Versuch betrachtet sein möge) wird indes nötig, weil eine übersichtliche Entwicklung der Gleichgewichtsbedingungen nur zu gelingen scheint, wenn das betreffende System in (relativer) Ruhe gegen das Koordinatensystem oder frame of reference sich befindet (wie dies nun bei C der Fall ist). Sobald dies nicht mehr zutrifft, sondern die Punkte des Systems sich in beliebigem Bewegungszustande befinden, lässt sich die Frage, wann eine in dem betreffenden Momente eingeführte *neue* Kraftgruppe keine Änderung dieses Zustandes bewirkt, nicht mehr unmittelbar auf den früheren Fall zurückführen; vgl. Fussn. 208.

180) Bei *S. Stevin* (Hypomnemata mathematica 4, lib. 3, p. 172, Leiden 1608) heisst es: „Ut spatium agentis ad spatium patientis, sic potentia patientis ad potentiam patientis; *Galilei* (Opere 2, p. 183 ff.): Quanto si guadagna di forza, tanto perdersi in velocità (p. 172); erste Anfänge einer Regel schon bei *G. Ubaldo* (*Cantor,* Geschichte der Mathem. 2, p. 524), nach *Cantor* lassen sich schon in *Aristoteles'* Mechanik solche Ideen indes erkennen (daselbst 1, p. 219). *Whewell*, Hist. of induct. sciences 2, p. 31, schreibt dem Tractatus de motu von *Varro* (1584) die erste bestimmte Fassung zu. *Galilei* hat das Prinzip schon im discorso intorno alle cose che stanno in acqua (Opere 4, p. 3), dann in der scienza meccanica (ed. *Mersenne*, Leiden 1634, Opere 2, p. 152) auf das Gleichgewicht von Flüssigkeiten angewandt; so auch schon *B. Pascal,* vgl. *Mach,* Mechanik, p. 52, 86, 96, sowie *F. Montucla,* Histoire 3, p. 609.

181) *Varignon*, Nouv. méc. 2, p. 174, Brief von *Joh. Bernoulli* v. 26. Jan. 1717: „En tout équilibre de forces quelconques en quelque manière qu'elles soient appliquées les unes sur les autres ou immédiatement ou médiatement, la somme des énergies affirmatives sera égale à la somme des énergies negatives prises affirmativement.“ Diese Energie ist $Pp \cos(pP)$, und $p \cos(pP)$ heisst dort die *virtuelle Geschwindigkeit.*

bekannt ist. Aber erst *Lagrange* schuf daraus das analytische Grundprinzip der Mechanik, die er damit zur *analytischen* erhob.

Wir betrachten zunächst nur Systeme, deren materielle Punkte durch Bedingungsgleichungen mit einander verbunden sind, und von irgend welchen gegebenen Kräften P ergriffen werden.

Ist P_i die Kraft, welche auf den Punkt mit den Koordinaten x_i, y_i, z_i wirkt, dessen unendlich kleine Verschiebungen δs_i die Projektionen $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ haben, so ist zum Gleichgewicht notwendig und hinreichend, dass

$$\sum P_i \cos(P_i \delta s_i)\, \delta s_i = \sum (X_i\, \delta x_i + Y_i\, \delta y_i + Z_i\, \delta z_i) = 0$$

ist, falls die $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ *zulässige virtuelle, fakultative*[182]) Verschiebungen bedeuten, d. h. solche, die den Bedingungen der Beweglichkeit des Systems

$$(1) \qquad \sum (a_{ik}\, \delta x_i + b_{ik}\, \delta y_i + c_{ik}\, \delta z_i) = 0$$
$$(k = 1,\ 2, \ldots, r)$$

genügen; kurz es muss die *Summe der virtuellen Arbeiten*[183]) *für alle zulässigen Verschiebungen verschwinden.*

31. Der Beweis des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten. Hier erhebt sich nun die Frage nach dem Beweise des Prinzipes, wobei es nach den Erörterungen in Nr. 29 genügt, denselben unter Voraussetzung relativer Ruhe gegen das Koordinatensystem zu führen. Giebt man zu, dass jedes System von Bedingungen ((1) Nr. **30**) durch geeignete *Reaktionskräfte* mit den Komponenten Ξ_i, H_i, Z_i ersetzt werden kann, so müssen für jeden Punkt die Gleichungen

---

182) So *Gauss* im Brief an *Möbius* 1837 (*C. Neumann*, Leipz. Ber. 31 (1879), p. 61).

183) Vgl. über diesen von *G. Coriolis* eingeführten Ausdruck: Mém. sur la manière d'établir les différents principes de la mécanique, J. éc. polyt. 15 (1834), p. 95. In der Mechanik spricht man gegenwärtig noch fast allgemein von unendlich kleinen Verschiebungen, als ob diese *bestimmte* sehr kleine Strecken bezeichnen könnten. Die ältere Auffassung suchte dies durch den Begriff der virtuellen *Geschwindigkeiten*, der den Fluxionen *Newton*'s entnommen ist, zu vermeiden. Man kann die strengen Begriffe der Differentialrechnung in der *Mechanik* (ebenso wie in der *Geometrie*) festhalten, wenn man zunächst von virtuellen *endlichen* Bewegungen ausgehend, die Geschwindigkeiten derselben einführt; natürlich muss dann auch die virtuelle Arbeit als eine Intensitätsänderung, also nicht als $\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$, sondern als

$$\sum \left(X \frac{\delta x}{dt} + Y \frac{\delta y}{dt} + Z \frac{\delta z}{dt} \right)$$

gefasst werden. Im Texte schien es schon der Kürze wegen (aber auch aus anderen Gründen) geboten, die jetzt noch übliche Ausdrucksweise beizubehalten.

$$
(1) \qquad \begin{aligned} X_i + \Xi_i &= 0, \\ Y_i + \mathsf{H}_i &= 0, \\ Z_i + \mathsf{Z}_i &= 0 \end{aligned}
$$

bestehen. Multipliziert man dieselben mit den *willkürlichen* Variationen $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, so folgt

$$
\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \sum(\Xi\delta x + \mathsf{H}\delta y + \mathsf{Z}\delta z) = 0
$$

oder

$$
(2) \qquad \delta A + \delta \mathsf{A} = 0.
$$

Verschwindet (2) bei *allen* Variationen, so erhält man (1) wieder: dann ist also *sicher* Gleichgewicht vorhanden. Statt dessen ist aber auch schon notwendig und hinreichend, wenn (2) *bei allen zulässigen Verschiebungen verschwindet.* Wäre dies nicht der Fall, so würde man an jedem der als völlig frei zu betrachtenden Punkte die entstehende Beschleunigung φ_i durch eine geeignete Kraft $-m_i\varphi_i$ aufheben können, daher ist *jetzt* nach (2)

$$
(3) \qquad \delta A + \delta \mathsf{A} - \sum m_i \varphi_i \, \delta s_i \cos(\delta s_i, \varphi_i) = 0,
$$

welche Gleichung, da der letzte Teil für ein δs_i von der Richtung des φ_i unter der Summe nur positive Glieder enthält, nach (2) erfordert, dass alle $\varphi_i = 0$ sind[184]).

Bis so weit beruht der Beweis auf *rein logischer Basis*, brauchbar aber wird das Princip erst dann, wenn man zeigt, *dass* $\delta \mathsf{A}$ *bei allen zulässigen Verschiebungen für sich verschwindet.* Dieser wesentliche Teil des Beweises, den *Laplace*[185]) für unnötig gehalten zu haben scheint, erfordert ein genaueres Eingehen auf die Natur der aus den Bedingungen entspringenden Reaktionen (Spannungen).

Betrachtet man das *starre* System als gebildet aus Punkten, die in unveränderlicher Entfernung durch entgegengesetzt gleiche in den Richtungen der Verbindungslinien von je zwei Punkten wirkende Kräfte gehalten werden, so ist diese Arbeit offenbar Null, dasselbe findet auch statt, wenn Punkte des Systems ausserdem auf völlig glatten Kurven oder Flächen[185a]) gezwungen sind zu bleiben, resp. Teile

---

184) Dieser Schluss schon bei *Laplace*, Méc. cél. 1, p. 46; s. auch *Fourier*, Fussn. 186; vgl. *Poisson*, Mécanique, § 336.

185) Méc. cél. 1, p. 43; *L. Poinsot*, Sur une certaine démonstration du principe des vitesses virtuelles, J. de math. 3 (1838), p. 244, macht darauf aufmerksam, dass mit $\delta \mathsf{A} = 0$ eo ipso auch $\delta A = 0$ bewiesen wäre. Für eine Mechanik, die Bedingungen *ausschliesst*, kommen die weiteren Überlegungen nicht in Betracht, so z. B. in *Boltzmann*'s Mechanik.

185a) Eine Kurve (Fläche) heisst völlig glatt, wenn durch dieselbe die Be-

solcher Systeme mit völlig glatten Oberflächen sich berühren etc. Ohne Zweifel kann man in der Schilderung solcher Verhältnisse weiter gehen; in allen derartigen Fällen lässt sich dann das Prinzip erweisen. Ein *allgemeiner* Beweis kann natürlich auf diesem Wege, den zuerst *Fourier* eingeschlagen hat[186]), nicht erbracht werden, und man wird so genötigt, das Prinzip für den Fall ganz unbestimmt gelassener Bedingungsgleichungen als eine Regel anzusehen, deren Folgen thatsächlich mit der Erfahrung in Einklang sind.

32. Die Beweise von Lagrange, Poinsot und anderen. Andere Beweise suchen diese Mängel zum Teil zu beseitigen. *Lagrange* selbst hat zwei Beweise geliefert, die beide auf der axiomatischen Vorstellung *unausdehnsamer Fäden*[187]), in denen überall dieselbe *Spannung* herrscht, dem *Principe des poulies* oder des *Flaschenzugs* beruhen.

In dem *ersten* Beweise[188]) von *Lagrange* werden die Kräfte als kommensurable, d. h. als ganzzahlige Vielfache $m\varphi$ einer Kraft $2p$ angenommen[189]).

Ordnet man nun jedem Punkte A_i des Systems einen festen Punkt B_i zu, indem man einen Faden von B_1 nach A_1 und zurück in m_1 maliger Wiederholung führt[190]), sodann weiter in derselben Weise bei A_2, B_2, ..., A_n, B_n verfährt, so kann man das ganze

---

weglichkeit *in* ihr ebenso wenig beschränkt wird, wie ihre Koordinaten durch die sie darstellenden Gleichungen; die Reaktionen sind dann stets normal zur Kurve (Fläche).

186) *J. B. Fourier,* J. éc. polyt., cah. 5 (1798), p. 20 (Oeuvres 2, p. 477, insbes. p. 489); daselbst auch der Flaschenzugbeweis von *Lagrange* (p. 115), sowie ein Beweis von *R. Prony* (p. 191).

187) Ähnliche Gesichtspunkte entwickelt gleichzeitig, aber *vor Lagrange J. B. Fourier,* Oeuvres 2, p. 500, der auf *L. N. M. Carnot* (Essai sur les machines en général [1783]) verweist, mit der Bemerkung: Il est naturel de penser, que *Jean Bernoulli* connaissait quelque construction analogue.

188) Siehe Fussn. 187; sodann in der Mécanique analytique von 1811 (Oeuvres complètes 11, p. 23) mit der Bemerkung: Quant à la nature du principe des vitesses virtuelles (das in der éd. von 1788 als Axiom benutzt war) il faut convenir, qu'il n'est pas assez évident par lui même pour pouvoir être érigé en principe primitif; ähnlich auch *É. Mathieu,* Dynamique analytique (1878), p. 2.

189) Die Beseitigung dieser Annahme soll dann nach den *Euklidischen* Methoden der Verhältnislehre erfolgen; aber diese Prozesse lassen sich streng genommen nur mit den idealen geometrischen Konstruktionen, mit einem idealen mechanischen System nur dann vornehmen, wenn man demselben in jeder Hinsicht die Eigenschaften derselben beilegt.

190) Dazu hat man sich in jedem der Punkte A, B einen vollkommen glatten Ring (resp. eine Rolle) von beliebig kleiner Dimension zu denken, durch den der Faden geführt wird.

System der Kräfte durch eine einzige an dem freien Ende des Fadens wirkende Kraft, etwa ein *Gewicht p*, darstellen. *Sicher wird im Gleichgewichtsfall dieses Gewicht nicht sinken, und bei einer virtuellen Verschiebung der Systempunkte wird die virtuelle Arbeit sämtlicher Kräfte gleich der mit p multiplizierten Gesamtverlängerung des Fadens.* Hieraus folgt aber keineswegs, dass bei jeder zulässigen Verschiebung des Systems diese Arbeit Null sein müsse, weil[191]), „wenn diese Arbeit nicht Null wäre, die entsprechende Fadenverlängerung durch das Gewicht, das immer die Tendenz hat zu sinken, hervorgebracht werden würde". *Denn beim Gleichgewicht sinkt das Gewicht überhaupt nicht, und die nur in der Vorstellung bestehende virtuelle Verschiebung steht mit dieser Thatsache in keiner Verbindung.* Man darf daher auch nicht annehmen, dass das Gewicht sinke: diese formal unzulässige Schlussweise, auf der gleichwohl die bis in die neueste Zeit gerühmte Evidenz des *Lagrange*'schen *Flaschenzugbeweises* beruht, hat schon *Jacobi*[192]) gerügt; andere[193]) haben dagegen als Mangel dieses Schlussverfahrens bezeichnet, dass das Gewicht nur um eine unendlich kleine Grösse *erster* Ordnung dabei *nicht* sinken darf, sowie die auf der Einführung gespannter Fäden und Rollen beruhende Vorstellung.

Von diesen Mängeln ist *Lagrange*'s zweiter[194]), weit weniger bekannter, Beweis frei, der die aus den Bedingungen entspringenden Kräfte durch eine ähnliche Fadenkonstruktion ersetzt. Es genügt, die Idee desselben für Punkte $P_1, \ldots, P_n$, zwischen denen *eine* Bedingungsgleichung[195])

$$(1) \qquad f(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \cdots;\ x_n, y_n, z_n) = 0$$

besteht, zu erläutern. Setzt man voraus, dass

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)^2} = 2m_i p; \quad (i = 1, \cdots n)$$

---

191) Méc. anal. = Oeuvres complètes 11, p. 24.

192) *Jacobi*, Heft von *Scheibner*, p. 17 ff., insbes. p. 21; man vgl. die folgende Fussnote über *Fourier*.

193) Siehe die Note von *J. Bertrand*, Méc. anal. 1, p. 24; *Jacobi*, Fussn. 192, p. 21; *Mach*, Mechanik, p. 64; *Boltzmann*, Mechanik, p. 133; *E. J. Routh*, Treatise on analytical statics, 2. ed., Cambridge 1896, 1 p. 182.

In *Fourier*'s Mémoire sur la statique (Oeuvres 2, p. 500) wird dagegen ganz richtig gesagt: Wenn die Summe der Momente bei einer Verschiebung Null ist, kann durch die wirkenden Kräfte diese Verschiebung nicht entstehen, mag nun Gleichgewicht vorhanden sein oder nicht.

194) *Lagrange*, Théorie des fonctions, 2. éd., Paris 1813, p. 350.

195) Ohne wesentliche Änderung kann diese Gleichung durch die allgemeinere Nr. 30 (1) ersetzt werden; vgl. *A. Voss*, Über die Differentialgleichungen der Mechanik, Math. Ann. 25 (1885), p. 258.

ist, wo die m_i wieder ganze positive Zahlen sind, so kann man

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2m_i p \cos\alpha_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = 2m_i p \cos\beta_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = 2m_i p \cos\gamma_i$$

setzen und dem Punkte P_i die durch ihn gehende Richtung $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_i$ zuordnen, welche einen um l_i von P_i entfernten *festen* Punkt Q_i, dessen Koordinaten a_i, b_i, c_i sind, enthält. Führt man nun wie vorhin in m_i maliger Wiederholung einen Faden von Q_1 nach P_1 und *zurück* und so fort, bis man am letzten Punkte Q_n anlangt, wo der Faden wieder befestigt wird, so bestehen nur noch diejenigen Bewegungsmöglichkeiten, bei denen

$$2m_1 l_1 + 2m_2 l_2 + \cdots + 2m_n l_n = \text{const.}$$

oder

$$\sum 2m_i(\cos\alpha_i\, dx_i + \cos\beta_i\, dy_i + \cos\gamma_i dz_i) = 0$$

d. h.

$$\frac{1}{p}\, df = 0$$

ist. Macht man die, allerdings von *Lagrange* nicht besonders erwähnte Voraussetzung, dass der Einfluss der Bedingungsgleichungen nur von den ersten Differentialquotienten der Bedingungsgleichung (1) abhängt, *oder dass Bedingungsgleichungen, welche dieselben zulässigen Verschiebungen gestatten, mechanisch äquivalent sind,* so darf man dieselben hier durch die Bedingung der Unveränderlichkeit der Fadenlänge ersetzen, bei welcher die in dem Faden entstandene Spannung in der That bei jeder zulässigen Verschiebung keine Arbeit leistet. Dieser Beweis zeigt zugleich, dass der Einfluss jeder beliebigen Bedingungsgleichung durch das System der Kräfte

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)^2}$$

mit den Richtungscosinus $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_i$ ersetzt werden kann.

Andere Beweise suchen die *Lagrange*'schen Voraussetzungen durch zum Teil weniger abstrakt scheinende zu ersetzen. Jedenfalls beruht das Gleichgewicht eines Bedingungen unterworfenen Systems darauf, dass vermöge derselben die Beschleunigungen in allen möglichen Bewegungsrichtungen aufgehoben werden. *So gelangt man zu der axiomatischen Voraussetzung, dass das Gleichgewicht nicht gestört wird, wenn man zu den bestehenden Bedingungen noch beliebig viel neue, den alten*

nicht widersprechende hinzufügt[196]). Man kann nun so viele hinzufügen, dass, wie bei einer idealen Maschine, die Verschiebung eines einzelnen Punktes die aller anderen eindeutig bestimmt, oder das System *zwangläufig* wird; diese Verschiebung stellt dann eine ganz willkürliche virtuelle des ursprünglichen Systems vor. Diesen zuerst in dieser Allgemeinheit von *Ampère* betretenen Weg[197]) hat *Duhamel* zu einem besonders übersichtlichen Beweise benutzt; ähnliche Vorstellungen finden sich übrigens auch bei *Poinsot*[198]), dessen Beweis fast ungeändert von *Minding* reproduziert ist[199]).

Jedenfalls kann man unter den angegebenen Voraussetzungen zu einem Beweise des Prinzipes für ein System diskreter Punkte gelangen. Auch für Fäden mit kontinuierlicher Massenverteilung werden diese Beweise noch anwendbar sein, weil die Vorstellung von den inneren Spannungen, welche den äusseren Kräften Gleichgewicht halten, noch eine völlig bestimmte bleibt. Dagegen ist die darüber hinausgehende Anwendung, welche *Lagrange* von dem Prinzipe auf zwei- oder dreidimensionale Systeme mit kontinuierlicher Massenverteilung (Flächen und elastische Systeme) macht, offenbar nicht mehr durch die Möglichkeit gestützt, die geometrische Konstruktion des Flaschenzuges oder irgend eine andere festzuhalten. Man wird auch hier zu der Forderung gedrängt, die über die früher erwähnten Fälle *hinausreichende Gültigkeit des Prinzips* als ein mit der Erfahrung in seinen Folgerungen übereinstimmendes *Axiom* anzusehen; insbesondere wird diese Auffassung durch die Überlegung notwendig, dass alle Beweise doch immer von der Voraussetzung diskreter Systeme mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden ausgehen, während der Satz selbst auch für Systeme mit unendlich vielen Graden der Beweglichkeit zur An-

---

196) So *Poinsot,* De l'équilibre et du mouvement des systèmes, J. éc. polyt. cah. 12, an 12, p. 206; *Poinsot* wendet indes ein spezielleres Prinzip an: „l'un des prémiers élémens de la théorie générale de l'équilibre est cet *axiome,* que si des forces se font actuellement équilibre sur un système quelconque variable, l'équilibre ne cessera point en supposant que la système soit rendu tout à coup invariable.“ Vgl. auch *C. Neumann*, Über eine einfache Methode zur Begründung des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten, Leipz. Ber. 38 (1886), p. 70.

197) *A. M. Ampère,* Démonstration générale du principe des vitesses virtuelles, J. éc. polyt. cah. 13 (1806), p. 247; *Ch. Duhamel,* Mécanique, 3. éd. 1862, deutsch von *H. Eggers,* Leipzig 1853, 1, p. 114, 119; dieser Beweis auch bei *Th. Despeyrous,* Mécanique 2, p. 305; vgl. auch *F. Moigno,* Leçons de mécanique, Paris 1868, p. 281 ff.

198) *Poinsot,* Théorie générale de l'équilibre, J. éc. polyt. cah. 13 (1806), p. 208.

199) *F. Minding,* Handbuch 2 (1838), p. 165.

wendung gebracht wird, und in dieser Form schon von *Lagrange* in seiner Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen der Flüssigkeiten benutzt wurde.

33. Zusammenfassung. Die einzelnen Beweise erscheinen darum nicht wertlos. Denn woher stammt die Überzeugung von der unbeschränkten Gültigkeit des Prinzips? Zum Teil doch gewiss aus der unzähligemal geprüften Übereinstimmung mit der Erfahrung und der Möglichkeit, durch weitere Detaillierung der konstruktiven Beweismethode die Frage auch bei allgemeineren Voraussetzungen erledigen zu können, sowie aus der Gleichförmigkeit der Resultate bei ganz verschiedenen Ansätzen[199a]). Zum anderen Teil aber beruht diese Überzeugung wohl auf dem in Verbindung mit dem Prinzipe von der Erhaltung des Gleichgewichts bei Einführung neuer Verbindungen benutzten *energetischen Gedanken*, dass wenn die Kräfte jene zwangläufige Verschiebung mit einer gewissen Geschwindigkeit hervorbrächten, derselben eine Vermehrung der Energie *ohne* Arbeitsleistung entspräche, falls das virtuelle Moment der Kräfte Null ist. Auf diesen Standpunkt stellen sich auch *Thomson* und *Tait* bei ihrer Darlegung des principle of virtual velocities[200]).

34. Das Fourier'sche Prinzip; materielle Systeme allgemeinerer Art. Die vorhergehenden Betrachtungen gehen überall von der ganz abstrakten Voraussetzung aus, dass die Bedingungen durch *Gleichungen* (entweder explicite Gleichungen zwischen den Koordinaten oder totale Differentialgleichungen zwischen ihren Differentialen) ausgedrückt sind. Solche genügen der Forderung, dass neben jeder virtuellen Verschiebung auch die entgegengesetzte zulässig sei. Bereits *Fourier*[201]) hat indessen ganz allgemein auch *einseitige* Bedingungen, welche durch *Ungleichungen* zwischen diesen Elementen ausgedrückt werden, in seiner Untersuchung herangezogen und dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeit die Form gegeben, *dass*

199a) Eine kritische Übersicht über die Beweise des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten *fehlt bisher noch vollständig*.

200) *Thomson* u. *Tait*, Treatise (1) 1, p. 265. Es sei hier zugleich an *Stevin's* berühmte Bemerkung über das Gleichgewicht der homogenen Kette auf der schiefen Ebene erinnert; fände es nicht statt, ce mouvement n'aurait aucun fin, ce qui est absurde; Werke (éd. *A. Girard*, Leiden 1634), 2, p. 448.

201) *Fourier*, Oeuvres 2, p. 488. *Fourier* definiert indes das Moment der virtuellen Arbeit als *Fluxion*, d. h. mit dem *entgegengesetzten* Zeichen, wie jetzt üblich, p. 479. Die von *Lagrange* allein betrachteten Bedingungen (allgemeiner die in Nr. 30, 1), heissen auch wohl doppelseitige, conditions bilatérales, so *P. Duhem* im Commentaire.

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \overline{\lessgtr} 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht ist. Auf diesen von *Lagrange* nicht berücksichtigten Fall hat unabhängig von *Fourier* erst wieder *Gauss*[202]), dann *Ostrogradsky*[203]) hingewiesen.

Die von *Fourier* im Mémoire sur la statique[204]) erdachte Hebelkonstruktion ist von *C. Neumann*[205]) in einer sehr anschaulichen Weise für diesen Fall zur Verwendung gekommen. Ein in sich zurücklaufender nicht ausdehnbarer Faden, der sich nur nach *einer* (positiven) Richtung hin in sich selbst verschieben kann, ist offenbar im Gleichgewicht, wenn die in der Richtung des Fadens wirkenden Kraftkomponenten X_i der Bedingung genügen, dass bei allen virtuellen Verschiebungen δs

$$\delta s \sum X_i \overline{\lessgtr} 0$$

ist, denn entweder ist dann $\sum X$ null oder negativ. Denkt man sich nun das System einseitig zwangläufig gemacht, so kann man durch ein System von Hebelvorrichtungen bewirken, dass an Stelle jedes wirklichen Punktes P_k des Systems, dessen virtuelle Verschiebung δs_k ist, ein anderer P_k' tritt, wobei nun alle P_k' *dieselbe* Verschiebungsgröfse $\delta' s$ bei ungeänderter Richtung besitzen. Bezeichnet man die in Richtung der zwangläufigen Verschiebung von P_k wirkende Komponente mit X_k, die entsprechende, nach dem Hebelgesetz ihr äquivalente bei P_k' mit X_k', so ist

$$\frac{X_k}{X_k'} = \frac{\delta' s}{\delta s_k},$$

also

$$\sum X_k' \delta' s = \sum X_k \delta s_k \overline{\lessgtr} 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung.

Im vorigen sind nur die traditionell eingeführten Fälle von Bedingungen behandelt. An und für sich liegt kein Grund vor, nicht

202) *Gauss*, 1829, Werke 5, p. 27.

203) *M. Ostrogradsky,* Considérations générales sur les momens, 1834, Petersb. Mém. de l'Acad. (6) 1 (1838), p. 129; daher heisst in Russland das Prinzip von *Fourier* auch wohl das von *Ostrogradsky*. In Frankreich ist *Fourier*'s Prinzip nicht so unbeachtet geblieben; *A. A. Cournot* entwickelt schon 1827 die Gleichungen von *Ostrogradsky*; siehe dessen Extension du principe des vitesses virtuelles au cas où les conditions de liaison du système sont exprimées par des *inégalités*, Bull. sciences math. de Ferussac, 8 (1827), p. 165.

204) *Fourier,* Oeuvres 2, p. 495.

205) *C. Neumann*, Über das Prinzip der virtuellen oder fakultativen Verrückungen, Leipz. Ber. 31 (1879), p. 53.

auch homogene quadratische, resp. höhere, Gleichungen zwischen den virtuellen Verschiebungen vorauszusetzen. Wir gehen darauf nicht ein, da abgesehen von speziellen einfachen Fällen Bedingungen dieser *singulären* Art bisher kaum allgemeiner untersucht sind.

Weit wesentlicher ist die folgende Erweiterung. Die Bedingungen für die Beweglichkeit eines Systems können im allgemeinen überhaupt nicht auf die Voraussetzung von Relationen zwischen den virtuellen Verschiebungen beschränkt werden. Dies tritt schon dann ein, wenn die Vorgänge der *Reibung* betrachtet werden sollen; in noch weiterem Umfange — obwohl man hier auch von anderen Anschauungen ausgehen kann — wenn das System in einer von seinem ursprünglichen Zustande verschiedenen *Deformation* (*strain*) betrachtet wird, in welcher es unter Einwirkung gegebener (äusserer) Kräfte sich im Gleichgewicht befindet. In allen diesen Fällen muss man selbstverständlich die Kräfte, welche den Einfluss der Reibung, des *stress*, etc. vertreten, den in Nr. **30** allein betrachteten Kräften P hinzufügen, wenn man das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten anwenden will.

Materielle Systeme von endlichem Freiheitsgrad, d. h. solche, deren virtuelle Verschiebungen durch eine endliche Zahl von unabhängigen Parametern bestimmt sind, kann man nach *Painlevé* überhaupt als Systeme mit und ohne Reibung (*frottement*) charakterisieren. Denn welche Vorstellung man sich auch über die Natur der Reaktionskräfte R bilden mag, die an den Punkten des Systems angreifen, man wird stets die Gruppe R auf eine *einzige* Art in zwei Gruppen R_1, R_2 so zerlegen können, dass die virtuelle Arbeit der Reaktionen R bei allen zulässigen Verschiebungen gleich der der Gruppe R_2 ist, und zugleich das Vektorensystem der R_2 einer virtuellen Verschiebung entspricht[205a]). Die Gruppe R_1 stellt dann „die aus den Bedingungsgleichungen entspringenden Reaktionen", die Gruppe R_2 die „*Reibungswiderstände*" vor.

35. Die Gleichgewichtsbedingungen. Da die Gleichungen Nr. **30** (1) jedenfalls von einander unabhängig sein müssen, also nicht alle r-reihigen Determinanten der a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} verschwinden dürfen, erhält man durch *Lagrange*'s Methode der Multiplikatoren die Gleichgewichtsbedingungen in der Form[206])

205a) *P. Painlevé*, Leçons sur l'intégration, p. 54 ff. Über ähnliche Zerlegungen vgl. auch *J. König*: Über eine Interpretation der Fundamentalgleichungen der Dynamik, Math. Ann. 31 (1888), p. 1.

206) So zuerst bei *Lagrange* in der Méc. anal. von 1788.

$$X_i = \sum \lambda_k a_{ik},$$
$$(1) \qquad Y_i = \sum \lambda_k b_{ik},$$
$$Z_i = \sum \lambda_k c_{ik}.$$

Sind dagegen Ungleichungen gegeben[207]), also etwa

$$\sum (a_{ik} \delta x_i + b_{ik} \delta y_i + c_{ik} \delta z_i) = \varepsilon_k$$
$$(k = 1, 2, \ldots r),$$

wo

$$\varepsilon_k \lesseqgtr 0,$$

so erhält man jedenfalls wieder, wenn die Bedingungen den Fall $\varepsilon_k = 0$ *einschliessen*, die Gleichungen (1). Da nun aus ihnen folgt

$$\sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = \sum \lambda_k \varepsilon_k,$$

so ergiebt sich, dass die sämtlichen Koeffizienten λ_k *positiv* sein müssen, wenn das Moment bei negativen Werten der willkürlichen beliebig kleinen ε_k nie positiv werden darf; ihre Vorzeichen bleiben eben nur dann willkürlich, wenn das zugehörige ε_k ausschliesslich auf den Wert *Null* beschränkt ist. Bedingungen, bei denen der Fall $\varepsilon_k = 0$ überhaupt nicht eingeschlossen ist, sind selbstverständlich fortzulassen.

Die rechten Seiten der Gleichungen (1) stellen die aus den Bedingungen entspringenden Reaktionen vor; man sieht nun, wie jeder Bedingung eine bestimmte dem λ_k zugehörige Komponente dieser Art entspricht. Die Bedingungen für die gegebenen Kräfte X_i, Y_i, Z_i selbst erhält man, wenn man die aus r der passend auszuwählenden Gleichungen (1) berechneten Werte der λ in die übrigen einsetzt.

β. Die Dynamik.

36. Das d'Alembert'sche Prinzip[207a]). Hat man sich einmal über die Auffassung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten geeinigt, so besteht kein weiteres Hindernis mehr, nach *d'Alembert*'s fundamentaler Betrachtung zu den *allgemeinen Gleichungen der Dynamik* zu gelangen[208]).

---

207) So bei *Cournot* und *Ostrogradsky*, Fussn. 203; bei letzterem auch mit Beispielen (Seilpolygon, inkompressible Flüssigkeiten, etc.); ausser den gebräuchlichen Lehrbüchern vgl. auch *L. Henneberg*, J. f. Math. 113 (1894), p. 179.

207a) Nach *F. Montucla*, Histoire 3, p. 44 u. 627 hat *A. Fontaine* schon 1739 ein ähnliches Prinzip ausgesprochen.

208) Nach der Ansicht vieler beruht das *d'Alembert*'sche Prinzip auf einem *neuen* Axiom, insofern die Gleichungen des Gleichgewichts auf den Fall eines bereits in *Bewegung* begriffenen Systems übertragen werden, so z. B. *Jacobi*

Ein System materieller Punkte mit den Massen m_i befinde sich zur Zeit t unter dem Einfluss der an m_i angreifenden Kraftkomponenten X_i, Y_i, Z_i in beliebigem Bewegungszustande; die Koordinaten seien x_i, y_i, z_i. Sind dieselben ausserdem beliebigen Bedingungsgleichungen

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots, f_k = 0$$

unterworfen, welche zunächst t nicht enthalten mögen, so werden infolge dieser Verbindungen die Beschleunigungen $\ddot{x}_i\, \ddot{y}_i$, $\ddot{z}_i$ im allgemeinen so beschaffen sein, dass die

$$X_i - m_i\ddot{x}_i,\ Y_i - m_i\ddot{y}_i,\ Z_i - m_i\ddot{z}_i$$

nicht verschwinden. Diese Kräfte werden also vermöge der Bedingungen aufgehoben, also sind sie „in Rücksicht auf die letzteren" im Gleichgewicht; wäre dies nicht der Fall, so würden sie dem Systeme ausser den vorausgesetzten Beschleunigungen $\ddot{x}_i$, $\ddot{y}_i$, $\ddot{z}_i$ noch andere mitteilen — *gegen* die Voraussetzung. In dieser Gestalt ist das *d'Alembert*'sche Prinzip[209]) eine rein logische Überlegung, welche

(Dynamik, ed. *Clebsch*, p. 63 ff.); *C. Neumann* (Leipz. Ber. 31 (1879), p. 61). Ich kann darin nur eine zu enge Begriffsfassung des Gleichgewichts sehen, sodass die hier vorhandene Schwierigkeit, vgl. Nr. 29, *schon das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten selbst* trifft.

209) *J. d'Alembert*'s (Traité de dynamique, Paris 1743) ursprüngliche Betrachtung ist hiervon nicht wesentlich verschieden (vgl. *Poisson*, Mécanique, § 350). *d'Alembert*'s eigene Worte lauten: Soient A, B, C, ... les corps qui composent le système, et supposons qu'on leur ait imprimé les mouvemens a, b, c, ..., qu'ils soient forcés, à cause de leur action mutuelle, de changer dans les mouvemens α, β, γ, ... Il est clair qu'on peut regarder le mouvement a imprimé au corps A comme composé du mouvement α, qu'il a pris, et d'un autre mouvement α'; qu'on peut de même regarder les mouvemens b, c, ... comme composés du mouvement β, β'; γ, γ', ..., d'où il s'ensuit que le mouvement des corps A, B, C, ... entr'eux auroit été le même, si au lieu de leur donner les impulsions a, b, c on leur eût donné à la fois les doubles impulsions α, α'; β, β',... Or par la supposition les corps A, B, C ont pris d'eux mêmes les mouvemens α, β, γ, ...; donc les mouvemens α', β', γ', ... doivent être tels qu'ils ne dérangent rien dans les mouvemens α, β, γ,..., c'est à dire que si les corps n'avoient reçu que les mouvemens α', β', γ',...; ces mouvemens auroient dû se détruire mutuellement et le système demeurer en repos. De la resulte le principe suivant... Décomposez les mouvemens a, b, c, ... chacun en deux autres α, α'; β, β',... qui soient tels que si l'on n'eût imprimé aux corps que les mouvemens α, β, γ,... ils eussent pu conserver les mouvemens sans se nuire réciproquement; et que si on ne leur eût imprimé que les mouvemens α', β', γ',... le systême fût demeuré en repos; il est clair, que α, β, γ,... soient les mouvemens que les corps prendront en vertu de leur action. Ce qu'il falloit trouver.

man nach *Lagrange* nur mit dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten zu verbinden hat, um zur Grundformel der Dynamik

$$\sum[(X - m\ddot{x})\delta x + (Y - m\ddot{y})\delta y + (Z - m\ddot{z})\delta z] = 0$$

zu gelangen, welche man auch in der kurzen Fassung: die virtuelle Arbeit der *verlorenen Kräfte* muss verschwinden, ausdrücken kann.

Die fast überall gebrauchte Wendung „in Rücksicht auf die Bedingungen" muss freilich genau präzisiert werden. Eine vollständig klare Einsicht, welche sich auf die Grundlagen der Mechanik stützt, kann nur entstehen, wenn man jeden Punkt des Systems durch Zufügung der Reaktionen Ξ_i, H_i, Z_i wieder in einen völlig freien verwandelt; *diese letzteren* sind es, welche an dem System sich nach der eben dargelegten Überlegung im Gleichgewicht halten. Dabei kann man nun auch an Stelle von Gleichungen, welche von t unabhängig sind, mit der Zeit veränderliche Bedingungen einführen, falls nur jene Änderung in *stetiger Weise* geschieht. Vermöge des Axioms Nr. **29** über die Ausdehnung der Gleichgewichtszustände auf bewegte Systeme nämlich ergiebt sich dann sofort, dass das Gleichgewicht nun auf die Grenzgestalt der Bedingungsgleichungen zur Zeit t oder, wie man gewöhnlich sagt, auf die *virtuellen Verschiebungen unabhängig von der Zeit t* zur Anwendung zu bringen ist. Bei den allgemeineren in Nr. **34** betrachteten materiellen Systemen sind natürlich die aus den anderweitigen Voraussetzungen entspringenden Reaktionen den Kräften X, Y, Z hinzuzufügen.

37. Die Lagrange'schen Gleichungen. Die Einführung von *Differentialgleichungen*

$$(1) \qquad \sum(a_{ik}dx_i + b_{ik}dy_i + c_{ik}dz_i) = 0$$

oder allgemeiner

$$(2) \qquad \sum(a_{ik}dx_i + b_{ik}dy_i + c_{ik}dz_i) + c_k dt = 0$$

wo die Koeffizienten Funktionen der x, y, z, t sein können, an Stelle *endlicher Bedingungsgleichungen* ist ausführlich im Zusammenhange mit den Prinzipien der Mechanik zuerst von *Voss*[210]) dargestellt.

Auch spätere Schriftsteller haben keine wesentliche Änderung an dem Ausdruck des Prinzips herbeigeführt. Ziemlich überflüssig erscheint die Terminologie der *verlorenen Kräfte*, der forces d'inertie, der effets dynamiques (*Ostrogradsky*); keineswegs klarer die Ausdrucksweise *G. B. Airy*'s (*E. J. Routh*, Dynamics 1, p. 52); wie an manchen anderen Stellen der Mechanik zeigt sich auch hier in der Litteratur eine Neigung zu stereotypen Ausdrucksweisen.

210) *A. Voss*, Math. Ann. 25 (1884), p. 258.

Derartige Fälle sind jedoch bei Problemen über rollende Bewegung schon weit früher vereinzelt aufgetreten und auch von anderen bereits allgemein vorausgesetzt worden[211]). *Hertz*, welcher infolge einer zu speziellen Auffassung des *Hamilton*'schen Prinzips die Voraussetzung nicht integrabeler Differentialrelationen als wesentlich verschieden von dem Fall expliciter Bedingungsgleichungen ansah[212]), hat die Bedingungen hiernach als *nicht-holonome* und *holonome* unterschieden[213]).

Aus dem *d'Alembert*'schen Prinzip erhält man nun durch *Lagrange*'s Multiplikatorenmethode die Gleichungen der Bewegung sofort in der Gestalt[214])

$$
\begin{aligned}
m_i \ddot{x}_i &= X_i + \sum \lambda_k a_{ik}, \\
m_i \ddot{y}_i &= Y_i + \sum \lambda_k b_{ik}, \qquad (3)\\
m_i \ddot{z}_i &= Z_i + \sum \lambda_k c_{ik},
\end{aligned}
$$

welche zuerst *Lagrange* gegeben hat, da *d'Alembert* nur in synthetischer Weise[215]) sein Prinzip zur Lösung einzelner Aufgaben benutzte. Dass übrigens die Gleichungen, welche das *d'Alembert*'sche Prinzip liefert, auch *hinreichend* zur vollständigen Bestimmung der x, y, z sind, hat *d'Alembert* nicht für nötig gehalten zu beweisen. Dieser Beweis, der auf der Unabhängigkeit der Bedingungsgleichungen beruht, ist mit Bezug auf die Gleichungen (3) von *Jacobi* gegeben[216]); bei *Lagrange* erscheint derselbe erst als Konsequenz aus der Einführung unabhängiger Koordinaten. Die Bestimmung der Reaktionskomponenten (der Summengrössen in den Gleichungen (3)) erfolgt übrigens dadurch, dass man in den Gleichungen (2) nach der Differentiation in Bezug auf die unabhängige Variabele t die Ausdrücke für die Beschleunigungen aus (3) einträgt und aus den entstehenden für die λ

---

211) So bei *M. Ostrogradsky*, Petersb. Mém. de l'Acad. (6) 1 (1858), p. 565; *N. M. Ferrers*, Quart. J. of math. 12 (1873), p. 1; auch *F. Minding*, Dorpater Gratulationsschr. 1864 (vgl. *A. Kneser*, Zeitschr. f. Math. Phys. 45 (1900), literar. histor. Abt., p. 118).

212) *Hertz*, Mechanik, p. 23. Vgl. hierüber namentlich *O. Hölder*, Gött. Nachr. 1896, p. 122.

213) *Hertz*, Mechanik, p. 91. Der eigentümliche Unterschied zwischen holonomen und nichtholonomen Bedingungen ist p. 96 scharf präzisiert.

214) Bei expliciten Bedingungsgleichungen $f_k = 0$ sind natürlich die a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} durch die Differentialquotienten der f_k nach x_i, y_i, z_i zu ersetzen.

215) Die Gleichungen der Dynamik in Bezug auf drei rechtwinklige Axen in der heute üblichen Form sind erst von *C. Maclaurin* (A complete treatise on fluxions, Edinburgh 1742) eingeführt.

216) *Jacobi*, Dynamik, ed. *Clebsch*, p. 133.

linearen Relationen die Werte derselben, welche alsdann Funktionen zweiten Grades der Geschwindigkeitskomponenten werden, berechnet. Man erhält daher bei Bedingungen immer Gleichungen, welche die zweiten Differentialquotienten durch Funktionen zweiten Grades der ersten ausdrücken. Durch *Lagrange's Einführung unabhängiger Koordinaten*, zu der wir nunmehr übergehen, gelingt die Herstellung dieser Gleichungen auf eine viel übersichtlichere Weise.

Sind nur k Bedingungsgleichungen

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots, f_k = 0,$$

in expliciter Form zwischen den $3n$ Koordinaten gegeben, so kann man auf unendlich viele Arten die letzteren als Funktionen von t und $3n - k$ *unabhängigen Parametern*

$$q_1, q_2, \ldots, q_r \quad (r = 3n - k)$$

(*Lagrange*'sche oder allgemeine, generalisierte, Koordinaten[217]) auffassen. Vermöge der jetzt bestehenden Identitäten

$$\text{(a)} \qquad \sum \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial f_k}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial f_k}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = 0$$

erhält man aus (3)

$$\sum m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = Q_s,$$

falls

$$\sum \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = Q_s$$

gesetzt wird. Setzt man ferner

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \\ \dot{y}_i &= \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial y_i}{\partial t}, \\ \dot{z}_i &= \sum \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial z_i}{\partial t}, \end{aligned}$$

und

$$\text{(c)} \qquad T = \frac{1}{2}\sum m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

so wird nach (b)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = \sum m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) = Q_s + \sum m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s dt} + \dot{y}_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_s dt} + \dot{z}_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial q_s dt}\right),$$

217) Nach *Thomson* und *Tait*, Treatise (1) 1, p. 286, generalized co-ordinates.

mithin wegen

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} = \sum m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s dt} + \dot{y}_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_s dt} + \dot{z}_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial q_s dt} \right)$$

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s\text{ [218]}.$$

In diesen *allgemeinen Grundgleichungen der Dynamik* bedeutet T, *die lebendige Kraft oder kinetische Energie*[218a]) *des Systems*, eine *beständig positive ganze rationale Funktion zweiten Grades der allgemeinen Geschwindigkeiten* $\dot{q}_s$, welche für den von *Lagrange*[219]) ausschliesslich behandelten Fall, wo die Bedingungsgleichungen von t *unabhängig* sind, eine *homogene definite positive Form zweiten Grades* der $\dot{q}_s$ ist.

Die Wichtigkeit dieser Gleichungen beruht darauf: *dass nunmehr als einzige Grössen, von denen die dynamischen Probleme abhängen, T und die Q_s auftreten*, wobei zugleich die Anzahl der Variabelen auf die kleinste, resp. eine je nach der Form der Aufgabe geeignete kleinere Zahl zurückgeführt ist[220]).

Die Gesamtheit der Gleichungen (4) ist invariant bei beliebigen

---

218) In ausgeführter Gestalt lauten diese Gleichungen bei *festen* Verbindungen, d. h. solchen, die explicite von t unabhängig sind,

$$\sum a_{is} \ddot{q}_i + \sum \alpha_{irs} \dot{q}_i \dot{q}_r = Q_s,$$

wo

$$2\alpha_{irs} = \frac{\partial a_{is}}{\partial q_r} + \frac{\partial a_{rs}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ir}}{\partial q_s}$$

das *Christoffel*'sche Symbol bezeichnet.

218a) Die in Deutschland und Frankreich übliche Bezeichnung: lebendige Kraft, force vive, vgl. Fussn. 295, so wenig passend sie auch erscheinen mag, schien hier beibehalten werden zu müssen.

219) Erst durch *J. Vieille*, J. de math. 14 (1849), p. 201 wurden die Formeln unter der erweiterten Voraussetzüng hergeleitet; in deutschen Lehrbüchern wird dieselbe nicht berücksichtigt, daher die ausführliche Darstellung im Texte.

220) Es ist in *Deutschland*, neuerdings auch in *Italien* üblich geworden, die Gleichungen (3) und (4) als *Lagrange*'sche Gleichungen *erster* und *zweiter* Art zu unterscheiden. *Lagrange* selbst machte diese Unterscheidung *nicht* und liess es überdies frei, auch nur eine *teilweise* Einführung unabhängiger Parameter vorzunehmen (Mécanique, Oeuvres 11, p. 325 u. 336), ein Gedanke, den *Routh* später weiter ausgeführt hat (Stability of motion 1877, Dynamik 1, p. 375). *Jacobi* (Heft von *Scheibner*, p. 166) spricht in seiner Vorlesung von 1847 allerdings von einer *ersten* Form der *Lagrange*'schen Gleichungen; erst in der von *Clebsch* 1866 besorgten Ausgabe der Dynamik tritt diese Bezeichnung gedruckt auf (Dynamik, p. 68 u. 141; auch im Inhaltsverzeichnis), die sich vielleicht schon früher durch *Jacobi*'s und seiner Schüler Einfluss verbreitet hatte. An und für sich ist die Unterscheidung nicht unzweckmässig.

Transformationen der q in ebenso viel neue Variabele k vermöge der Gleichung

$$\sum\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)dq_s=\sum\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{k}_s}\right)-\frac{\partial T}{\partial k_s}\right)dk_s.$$

Bei der Einführung der allgemeinen Koordinaten wird — namentlich in rein theoretischen Werken — die Bestimmung der Reaktionen dann oft weiter nicht mehr berücksichtigt; sie geschieht übrigens am einfachsten, indem man wieder zu den rechtwinkligen Koordinaten zurückkehrt. Für die Anwendungen kann unter Umständen die Bestimmung dieser Kräfte ebenso wichtig sein, wie die Ermittelung der Bewegung selbst. Dies ist übrigens schon dann der Fall, wenn die Bedingungen von *einseitigem* Charakter sind, also die Grössen λ in den Gleichungen (3), vgl. Nr. **35**, *bestimmte Vorzeichen* haben müssen, und der ganze Ansatz über eine Stelle hinaus, an der einige der λ beim Durchgang durch Null ihr Zeichen wechseln, *seine Gültigkeit verliert*; man vergleiche die bekannten Beispiele der Bewegung des schweren Punktes im vertikalen Kreise, auf der Kugelfläche, die Bewegung des schweren Stabes, dessen Enden auf gegebenen Flächen oder Kurven bleiben, u. s. w.

38. Nicht-holonome Systeme. Die Transformation ist dagegen auf den Fall *holonomer* Bedingungen beschränkt. Um bei nicht-holonomen eine formale Transformation ausführen zu können, betrachtet *Appell*[221]) an Stelle von T die Grösse

$$S=\frac{1}{2}\sum m_i(\ddot{x}_i^2+\ddot{y}_i^2+\ddot{z}_i^2),$$

welche bei der partiellen Differentiation nach den Grössen $\ddot{q}$ die Gleichungen der Mechanik in der Form

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s$$

liefert; es ist jedoch zu bemerken, dass gerade der Vorteil, welcher in der Einführung des nur von den *ersten* Differentialquotienten abhängigen T liegt, damit grösstenteils verloren geht. Die Gestalt der dynamischen Gleichungen im nicht-holonomen Falle ist übrigens folgende:

Hat man an Stelle der Variabeln x, y, z irgendwelche neue Parameter $q_1 \dots q_k$ eingeführt, zwischen deren Variationen noch die l Bedingungen

$$\sum \alpha_{ki}\delta q_i=0$$

221) *P. Appell*, Paris C. R. 129 (1899), p. 317, 423, 459; J. f. Math. 121 (1900), p. 1; J. de math. (5) 6 (1900), p. 5; ibid. (5) 7 (1901), p. 5.

bestehen, so kann man sämtliche $\delta x, \delta y, \delta z$ von $k - l$ *unabhängigen* Variationen δq_s $(s = 1, 2, \ldots, k - l)$ abhängig machen, so dass

$$\delta x_i = \sum a_{is}\,\delta q_s$$
$$\delta y_i = \sum b_{is}\,\delta q_s$$
$$\delta z_i = \sum c_{is}\,\delta q_s$$

wird. Die Gleichungen der Bewegung sind dann, wenn

$$\sum X_i a_{is} + Y_i b_{is} + Z_i c_{is} = Q_s$$

gesetzt wird,

$$Q_s = \sum (a_{is}\ddot{x}_i + b_{is}\ddot{y}_i + c_{is}\ddot{z}_i)\,m_i$$
$$= \frac{d}{dt}\sum (a_{is}\dot{x}_i + b_{is}\dot{y}_i + c_{is}\dot{z}_i)\,m_i - R_s,$$

wobei

$$R_s = \sum m_i\left(\dot{x}_i\frac{da_{is}}{dt} + \dot{y}_i\frac{db_{is}}{dt} + \dot{z}_i\frac{dc_{is}}{dt}\right)$$

ist. Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_s} = a_{is}, \quad \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_s} = b_{is}, \quad \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_s} = c_{is}$$

folgt nun

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - R_s = Q_s,$$

aber R_s ist selbst dann noch nicht gleich $\frac{\partial T}{\partial q_s}$, wenn die im allgemeinen von *allen* Variabelen $q_1, \ldots, q_k$ abhängenden Koeffizienten a_{is}, b_{is}, c_{is} nur von den Variabelen $q_1, \ldots, q_{k-l}$ abhängig sind, was bei vielen Fragen, namentlich den einfachen Problemen rollender Bewegung von Körpern zutrifft. Dies ist nicht immer beachtet worden, vielmehr hat man wiederholt gerade in dem letzteren Falle T mit Hülfe der Ausdrücke für die $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ von den scheinbar überzähligen Koordinaten q befreit, und auf den so entstehenden Ausdruck T, den *C. Neumann* die *nicht legitime* Form der lebendigen Kraft nennt, die *Lagrange*'schen Gleichungen angewandt, was natürlich zu unrichtigen Resultaten führt[221a]).

221a) Vgl. darüber *A. Vierkandt*, Über gleitende und rollende Bewegung, Monatsh. f. Math. Phys. 3 (1892), p. 31; *J. Hadamard*, Sur les mouvements de roulement, Bordeaux, Mém. (4) 5 (1895); *O. Hölder*, Die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis, Gött. Nachr. 1896, § 11; *D. J. Korteweg*, Über eine ziemlich verbreitete unrichtige Behandlung eines Problems der rollenden Bewegung, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 4 (1899); *P. Appell*, Les mouvements de roulement en dynamique, Sammlung Scientia, Phys. math. Nr. 4, Paris 1899.

39. Das Prinzip des kleinsten Zwanges von Gauss. Dasselbe lautet in *Gauss'* eigenen Worten[222]): Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Art unter sich verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äussere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblick in möglich grösster Übereinstimmung mit der freien Bewegung oder unter möglich kleinstem Zwange, indem man als Maass des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeitteilchen erleidet, die Summe der Produkte aus dem Quadrate der „Ablenkung jedes Punktes von seiner freien Bewegung"[223]) in seine Masse betrachtet.

Wird die Lage des Punktes m_i zur Zeit $t + 2dt$ mit

$$x_i + 2\dot{x}_i dt + \ddot{x}_i \frac{dt^2}{2},$$

dagegen die Lage, welche er vermöge der wirkenden Kräfte einnehmen würde, wenn er völlig frei wäre, durch

$$x_i + 2\dot{x}_i dt + \frac{X_i}{2m_i} dt^2$$

(und entsprechend für die übrigen Koordinaten) bezeichnet, so ist der *Zwang* Z gegeben durch[224])

---

222) J. f. Math. 4 (1829) = Werke 5, p. 23.

223) Von *E. Schering* sind, Gött. Abh. 18 (1873), p. 3, 11, diese Worte so interpretiert worden, dass es sich dabei um eine ganz willkürliche freie Bewegung handeln könne. Dem entgegen macht *R. Lipschitz* (J. f. Math. 82 (1877), p. 321) darauf aufmerksam, dass bei der Ablenkung im *Gauss*'schen Prinzip weder x noch $\dot{x}$, *sondern nur die Beschleunigungen* $\ddot{x}$ variiert werden dürfen.

224) Bei *Lipschitz* (J. f. Math. 82 (1877), p. 316) erscheint Z als *Covariante* bei beliebigen Transformationen der als unabhängig zu betrachtenden Variabeln x, y, z; vgl. auch *A. Wassmuth,* Ann. Phys. Chem. (2) 54 (1895), p. 164; siehe übrigens *A. Voss,* Bemerkungen über die Prinzipien der Mechanik, Münch. Ber. 1901, p. 167. Das *Gauss*'sche Prinzip kann auch als Prinzip der kleinsten Arbeit der verlorenen Kräfte formuliert werden: vgl. *Rachmaninoff,* Zeitschr. f. Math. Phys. 25 (1879), p. 206. Hiermit hängt auch das Principle of least resistance von *Moseley* (*Rankine,* A manual of applied mechanics, London 1864, ed. 3, p. 215) sowie das *Ménabréa-Castigliano*'sche Minimumprinzip, *L. F. Ménabréa,* Rom, Rend. dell' Acc. dei Lincei (2) 2 (1869), p. 201, zusammen; siehe auch *A. Castigliano,* Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications, Turin 1879, deutsch von *E. Hauff,* Wien 1886; *A. F. B. Müller-Breslau,* Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1886; sowie: Über die Elasticität der Deformationsarbeit, Civilingenieur (2) 32 (1886), p. 553, und das Referat von *F. Kötter,* Fortschritte d. Math. 18 (1886), p. 950; von anderen, namentlich *O. Mohr,* Civilingenieur (2) 32 (1886), p. 395 wird indes die diesem Prinzipe gegebene Ausdrucksweise bestritten. — Vgl. endlich *C. Neumann,* Das Ostwald'sche Axiom des Energieumsatzes, Leipz. Ber. 44 (1892), p. 185.

$$Z = \sum \frac{1}{m_i}[(X_i - m_i\ddot{x}_i)^2 + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)^2 + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)^2].$$

Wird nun irgend eine nach *Gauss* variierte Lage durch

$$x_i + 2\dot{x}_i dt + \frac{1}{2}(\ddot{x}_i + \delta\ddot{x}_i)dt^2$$

ausgedrückt, so muss in Rücksicht auf die Bedingungen, mögen dieselben nun holonome oder nicht-holonome sein,

$$\sum(a_{ik}\delta\ddot{x}_i + b_{ik}\delta\ddot{y}_i + c_{ik}\delta\ddot{z}_i) = 0$$

werden. Multipliziert man daher die *Lagrange*'schen Gleichungen (3) mit den $\delta\ddot{x}_i$, $\delta\ddot{y}_i$, $\delta\ddot{z}_i$ und addiert, so ergiebt sich

$$(1) \quad \sum[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta\ddot{x}_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta\ddot{y}_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta\ddot{z}_i] = 0$$

und dies ist die Bedingung dafür, dass Z in Rücksicht auf alle variierten Lagen ein *Minimum* ist.

Das Prinzip von *Gauss* ist daher in *diesem* Falle völlig *äquivalent* mit dem *d'Alembert*'schen, welches letztere nun auch in der Form (1) geschrieben werden kann[225]), die ihm zuerst durch *Gibbs* erteilt wurde. Derselbe bemerkt zugleich, dass für den Fall von *Bedingungsungleichungen* diese Form des d'Alembert'schen Prinzips eine direkte Entscheidung über den wirklichen Verlauf der Bewegungen gestatte[226]).

Dass man umgekehrt aus dem *Gauss*'schen oder *d'Alembert*'schen Prinzip den ganzen Inhalt der Mechanik, insbesondere auch die Lehren der Statik (Satz vom Parallelogramm der Kräfte etc.) herleiten kann, hat zuerst *Ritter*[227]) in seiner noch von *Gauss* selbst begutachteten Dissertation gezeigt; in etwas anderer Ausdrucksweise hat *Hertz* das *Gauss*'sche Prinzip als *Grundgesetz* seiner kräftelosen Dynamik ausgesprochen[228]).

40. Die Differentialgleichungen der Bewegung bei Ungleichungsbedingungen. Betrachtet man die Variationen, welche im Prinzip

225) Es kommt daher auf dasselbe hinaus, bestimmte Aufgaben dieser Art durch das *Gauss*'sche oder das *d'Alembert*'sche Prinzip zu lösen. Über Anwendungen des ersteren in diesem Sinne auf Beispiele der Statik und Dynamik vgl. *K. Hollefreund*, Schul-Programm Berlin 1897, Nr. 97.

226) *J. W. Gibbs*, On the fundamental formulae of dynamics, Amer. J. of math. 2 (1897), p. 49; vgl. auch *Boltzmann*, Mechanik, p. 230 u. 223.

227) *A. Ritter*, Über das Prinzip des kleinsten Zwanges, Diss. Göttingen 1853; *C. G. Reuschle*, Über das Prinzip des kleinsten Zwanges, Archiv f. Math. Phys. 6 (1845), p. 238; *H. Scheffler*, Über das Gauss'sche Grundgesetz d. Mechanik, Zeitschr. f. Math. Phys. 3 (1858), p. 197; *A. Buckendahl*, Über das Prinzip des kleinsten Zwanges, Diss. Göttingen 1873.

228) *Hertz*, Mechanik, p. 185.

der virtuellen Geschwindigkeiten auftreten, als gleichbedeutend mit den Variationen der Beschleunigungen bei ungeänderten x_i und $\dot{x}_i$, so kann man die *Fourier*'sche Erweiterung des genannten Prinzips auch auf den Fall der beschleunigten Bewegung ausdehnen und erhält so die allgemeinste Form des *Gauss*'schen Prinzips[229])

$$(1) \quad \sum[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta\ddot{x}_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta\ddot{y}_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta\ddot{z}_i] \gtreqless 0.$$

Schon *Gauss* bemerkte, dass sein Prinzip auch auf die Statik Anwendung findet. Man erreicht dies dadurch, dass man die $\ddot{x}_i$, $\ddot{y}_i$, $\ddot{z}_i$ gleich Null voraussetzt. *Möbius*[230]) hat diesem Gedanken eine andere Wendung gegeben. Bezeichnet man die Koordinaten des auf jeder Kraftrichtung um die Intensität der Kraft vom Angriffspunkte $x_i y_i z_i$ entfernten Punktes durch $a_i b_i c_i$, so ist

$$X_i = a_i - x_i, \quad Y_i = b_i - y_i, \quad Z_i = c_i - z_i,$$

also

$$\sum(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i)$$
$$= \sum((a_i - x_i)\delta x_i + (b_i - y_i)\delta y_i + (c_i - z_i)\delta z_i) \gtreqless 0$$

die Bedingung für das Gleichgewicht, welche nun ausdrückt, dass

$$\sum((a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2)$$

in Rücksicht auf alle zulässigen Verschiebungen ein Minimum ist.

In Rücksicht auf die dynamischen Probleme erhebt sich hier nun die zuerst von *Ostrogradsky*[231]) aufgeworfene, aber nicht vollständig beantwortete Frage, inwieweit durch Gleichung (1) die Bewegung überhaupt bestimmt wird. *A. Mayer* hat dieselbe neuerdings wieder aufgenommen[232]) und unter Anwendung des *Gauss*'schen Prinzips einen einfachen, allerdings auch nicht direkten Weg zur Lösung gezeigt, welcher geeignet ist, alle *unbrauchbaren* Lösungen mit Sicher-

229) In dieser Allgemeinheit leitet *W. Schell* (Mechanik 2, p. 502) den Satz her, doch ist dabei übersehen, daſs aus dem Vorzeichen einer Summe nicht auf die Vorzeichen der Summanden geschlossen werden kann. Auch in *Boltzmann's* Darstellung (Mechanik, p. 217) wird dem Begriff der virtuellen Verschiebungen eine andere als die ursprüngliche Bedeutung gegeben. Diesen Bedenken gegenüber scheint es angemessen, das *Gauss*'sche Prinzip in seiner *erweiterten* Form als *ein aus den früheren Prinzipien strenge nicht beweisbares Grundprinzip* anzusehen; so auch für den (im Texte nicht behandelten) Fall, wo die Bedingungsgleichungen die x, y, z; $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ ganz willkürlich enthalten.

230) *Möbius*, Statik 1, p. 330 ff., vgl. indes *Euler*, Berlin, Mém. de l'Acad. 1752, p. 246.

231) *M. Ostrogradsky*, Sur les déplacements instantanées, Petersb. Mém. de l'Acad. (6) 1 (1838), p. 565.

232) *A. Mayer*, Über die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung reibungsloser Punktsysteme, Leipz. Ber. 51 (1899), p. 224 u. 245.

heit *auszuschliessen*. Dass aber überhaupt *eine* bestimmte Lösung vorhanden ist, hat *Mayer* nur in dem Falle von ein und zwei Bewegungsfreiheiten erwiesen; von *Zermelo*[233]) ist indessen diese Lücke gerade auf dem Wege, den *Jacobi*[234]) schon in seinen Vorlesungen andeutet, nämlich durch Berufung auf die besondere Natur des hier vorliegenden Minimums[235]), welches die Existenz mehrerer Minima ausschliesst, vollständig ausgefüllt.

41. Das d'Alembert'sche Prinzip für Impulse. Integriert man die Gleichung

$$\sum(m_i\ddot{x}_i - X_i)\,\delta x_i + \cdots = 0$$

nach Multiplikation mit dt über einen beliebig kleinen Zeitraum 0 bis τ, während dessen die $\ddot{x}_i \ldots, X_i \ldots$ stets von demselben Zeichen sind[236]), so kann man, falls in Rücksicht auf die Impulse

$$\int_0^\tau X_i dt = P_i, \quad \int_0^\tau Y_i dt = Q_i, \quad \int_0^\tau Z_i dt = R_i$$

gesetzt wird, nach dem ersten Mittelwertsatze der Differentialrechnung

$$\sum\left(|m_i\dot{x}_i|_0^\tau\,\delta\bar{x}_i + |m_i\dot{y}_i|_0^\tau\,\delta\bar{y}_i + |m_i\dot{z}_i|_0^\tau\,\delta\bar{z}_i\right) = \sum(P_i\delta\bar{x}_i + Q_i\delta\bar{y}_i + R_i\delta\bar{z}_i)$$

setzen; unter $\delta\bar{x}_i$.. werden Mittelwerte der virtuellen Verschiebungen verstanden. Unter Voraussetzung eines gegen Null konvergierenden τ, bei der zugleich alle diese Mittelwerte in die Verschiebungen zur Zeit 0 übergehen, erhält man so die Gleichung

$$\sum[m_i(\dot{x}_i - (\dot{x}_i)_0) - \overset{\bullet}{P_i}]\,\delta x_i + \cdots = 0$$

zur Bestimmung der plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen vermöge der Impulsvektoren P, Q, R. Man kann dieselbe auch direkt erhalten, wenn man die *d'Alembert*'sche Überlegung anstatt auf die durch kontinuierliche Kräfte erzeugten Beschleunigungen auf die durch Impulse erzeugten Geschwindigkeiten anwendet[237]).

Diese Betrachtung lässt sich auch auf den Fall anwenden, wo

---

233) *E. Zermelo*, Gött. Nachr. 1899, p. 306 benutzt übrigens an der entscheidenden Stelle eine wohl von *D. Hilbert* herrührende Betrachtung.

234) *Jacobi*, Heft v. *Scheibner*, p. 83 ff.

235) Schon *A. Ritter* behandelt in seiner Diss. (1853) diesen Fall, allerdings in nicht ganz strenger Darstellung, mit den Methoden der Mannigfaltigkeitslehre.

236) Dies ist hier als *Voraussetzung* eingeführt, obwohl eine von 0 bis τ stetige Funktion, die eine bestimmte Zahl von Derivierten daselbst hat, für hinreichend kleine positive t immer von konstantem Zeichen ist, auch wenn sie für $t = 0$ verschwindet, falls nur nicht alle diese Derivierten verschwinden.

237) So zuerst *Lagrange* in der Mécanique 1, Oeuvres 11, p. 272; dann *Duhamel*, Note sur divers points de mécanique, J. éc. polyt. 15 (1832), p. 1.

die *Bedingungen des Systems plötzlich durch andere ersetzt werden.* Treten etwa an Stelle der bisherigen Gleichungen

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, f_k = 0$$

vom Zeitpunkt 0 an die neuen

$$\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_l = 0$$

ein, so erhält man auf ähnliche Weise

$$\sum m_i \{ \dot{x}_i - (\dot{x}_i)_0 \} \delta x_i + \cdots = 0,$$

wobei die Verschiebungen den $\varphi = 0$ zu genügen haben[238]). Selbstverständlich lassen sich diese Formeln auch für allgemeine Koordinaten q entwickeln[239]). Aus den Gleichungen Nr. 37, 4) folgt nämlich unter den vorhin angegebenen Voraussetzungen

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)_0 = \int_0^t Q_s \, dt = P_s.$$

Enthält nun T keine in den $\dot{q}_s$ *linearen* Glieder, so wird, falls zur Zeit 0 alle $\dot{q}$ verschwinden

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = P_s,$$

wie schon in Nr. 24 bemerkt wurde.

B) Eigentliche Variations-(isoperimetrische)Prinzipe.

42. Das Hamilton'sche Prinzip. Die im vorstehenden behandelten Prinzipe kann man in Rücksicht auf ihre gebräuchliche Form als elementare *Variations-* oder *Differential*prinzipe bezeichnen; formal handelt es sich bei ihnen um einen Variationsausdruck. Sie bilden in ihrem direkten Zusammenhange mit den Vorstellungen über Kräfte und Beschleunigungen die eigentliche Grundlage der Mechanik der materiellen Systeme. Von diesen unterscheiden wir die *eigentlichen Variations-* oder *isoperimetrischen Prinzipe*[240]), deren Evidenz nicht mehr auf einer

---

238) Vgl. *Ch. Sturm*, Paris C. R. 13 (1841), p. 1046, auch Mécanique, p. 353, sowie die zusammenfassende Darstellung bei *Routh* (Dynamik 1, p. 335).

239) So schon *Lagrange* in der Mécanique 2, Oeuvres 12, p. 173, dann *W. D. Niven*, Mess. of math. 4 (1867); *J. Routh*, Dynamik 1, p. 361; *P. Appell*, J. de math. 12 (1896), p. 5. Über die *Lagrange*'schen Gleichungen für den Fall der *Reibung* vgl. *P. Appell*, Paris C. R. 114 (1892), p. 331.

240) Übrigens sind diese Prinzipe, im weiteren Sinne genommen, keine wirklich isoperimetrischen mehr, da es sich um einen ganz andern Variationsbegriff handelt; vgl. *A. Voss*, Über die Differentialgleichungen der Mechanik, Math. Ann. 25 (1885), p. 264.

unmittelbaren Verwendung mechanischer Begriffe, sondern erst auf dem *Nachweis* beruht, dass sich mit ihrer Hülfe *ebenfalls* die Gleichungen der Dynamik ergeben[241]). Während die bei den Differentialprinzipen auftretenden Ausdrücke nur die Eigenschaft von *Kovarianten* (siehe Nr. 37 am Ende) besitzen, ergeben sich bei den eigentlichen Variationsprinzipen *invariante* Formen, die weil sie nur *erste* Differentialquotienten (unter den gewöhnlichen Annahmen über die Natur der Kräfte) enthalten, sich von hervorragendem Nutzen in Bezug auf Transformationen der Koordinaten erweisen. Dagegen findet insofern eine Beschränkung statt, als bei der *analytischen* Behandlung Bedingungs*gleichungen* vorausgesetzt werden. Eine dritte Klasse, von der erst weiterhin, Nr. 45, die Rede sein wird, bilden die *eigentlichen Integralprinzipe.*

Wir betrachten nun zunächst unter der Voraussetzung, dass X_i, Y_i, Z_i partielle Differentialquotienten einer Funktion A nach den Koordinaten x_i, y_i, z_i sind, welche auch t enthalten kann, die Grösse

$$A = \int_{t_0}^{t} \sum (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z})\, \delta t$$

und bilden ihre *Variation* bei ungeändertem t. So wird

$$\delta A = \Big| \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \Big|_{t_0}^{t},$$

also wenn sämtliche $\delta x, \ldots$ bei t_0 verschwinden:

$$\delta A = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).\text{[242]})$$

Bei beliebigem X, Y, Z *definiere* man statt dessen

$$\delta A = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

d. h. als *virtuelle Arbeit*[242a]). Nimmt man nun auch die Variationen der $x, \ldots$ bei t_1 gleich Null an, so ergiebt sich für

$$\delta H = \delta \int_{t_0}^{t_1} T dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta A\, dt$$

die folgende Form:

$$\delta H = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum \left(X_i + \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i + \cdots \right].$$

---

241) Dadurch wird nicht ausgeschlossen, dass diese Prinzipe von einem anderen Standpunkte aus wieder als primäre angesehen werden können.

242) Dies ist der *einzige* Fall, wo unter den angegebenen Voraussetzungen die *Variation der Arbeit* zugleich die *virtuelle Arbeit* darstellt.

242a) Über den Begriff der Arbeit siehe Nr. 46.

Die Aussage

$$\delta H = 0$$

ist demnach völlig äquivalent mit den Differentialgleichungen der Mechanik, sie heisst das Hamilton'sche Prinzip. Man wird durch dieselbe völlig unabhängig von der besonderen Form, in der die Koordinaten und die Bedingungen auftreten, und kann insbesondere bei holonomen Systemen mit den allgemeinen unabhängigen Koordinaten q_s

$$\delta H = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \sum Q_s \delta q_s)\, dt = 0$$

setzen.

Wenn wieder, wie *Hamilton*[243]) annahm, X, Y, Z partielle Differentialquotienten einer *Kräftefunktion* U sind, so kann man das sogenannte *Hamilton*'sche *Integral*

$$H = \int_{t_0}^{t} (T + U)\, dt$$

einführen; *das Prinzip verlangt nach wie vor, dass* $\delta H = 0$ *sei.* Zugleich wird:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial (T + U)}{\partial x_i} + \sum \lambda_s a_{si}$$

oder bei unabhängigen allgemeinen Koordinaten und holonomen Systemen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_i},$$

woraus weiter folgt:

$$d\left(\sum \dot{q}_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - (T + U)\right) + \frac{\partial}{\partial t}(T + U)\, dt = 0.$$

Ist $T + U$ explicite unabhängig von t, so wird

---

243) *W. R. Hamilton*, Lond. Phil. Trans. 1834 ging zuerst vom Prinzip der kleinsten Wirkung aus, das im Text in der folgenden Nummer ausführlich besprochen wird. Erst auf p. 307 führte er das seinen Untersuchungen in Lond. Phil. Trans. 1835, p. 95 zu Grunde liegende Integral H ein, ohne übrigens den ihm eigentümlichen Variationsprozess, den man in *Lagrange*'s Mécanique eigentlich schon vollständig vorgebildet sehen kann, besonders hervorzuheben. *Jacobi* hat (Dynamik, Werke, Suppl. p. 58) dasselbe als *Hamilton*'sches Integral, das Variationsprinzip als *Hamilton*'sches *Prinzip* bezeichnet. In England scheint diese Bezeichnung nicht gebräuchlich; auch würde es weit angemessener sein, *Hamilton's eigentliche Entdeckung, das Prinzip der variierenden Wirkung, so zu bezeichnen* (Lond. Phil. Trans. 1835, p. 99); H heisst dabei die *Prinzipalfunktion*, $U + T$ nach *Routh* (Dynamik 1, p. 375) die *Lagrange*'sche Funktion, bei *Helmholtz* das *kinetische Potential.* Über den Ausdruck Kräftefunktion vgl. Fussn. 295.

$$\sum \dot{q}_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - (T + U) = \text{const.},$$

also, wenn T eine homogene Funktion zweiten Grades der $\dot{q}_s$ ist,

$$T - U = \text{const.}$$

Dieser wichtige Satz, der Unabhängigkeit der Bedingungen und der Kräftefunktionen von der Zeit voraussetzt, heisst das Prinzip der lebendigen Kraft[244]); von seiner Bedeutung wird in Nr. 45 ausführlich gehandelt.

Die an das *Weber*'sche Gesetz sich anschliessenden Untersuchungen haben veranlasst, auch solche Kräftefunktionen zu betrachten, welche von den Geschwindigkeiten und höheren Differentialquotienten der Koordinaten abhängig sind, d. h. *solche Werte der* X, Y, Z *zu suchen, für die unter diesen erweiterten Umständen*

$$\sum (X dx + Y dy + Z dz)$$

das *vollständige Differential* einer einwertigen (vgl. übrigens Fussn. [306]) Funktion wird. Diese durch *Riemann*[245]) und *C. Neumann*[246]) begonnene Untersuchung ist von *Schering*[247]) in allgemeinster Weise ausgeführt worden; bei Kräftefunktionen dieser Art lässt sich dann auch eine Form des *Hamilton*'schen Prinzips angeben, bei der eine *wirkliche* Variation unter dem Integral stattfindet[248]).

Bei den meisten Untersuchungen wird sich das *Hamilton*'sche Prinzip wegen seiner Einfachheit mit grossem Vorteile zugrunde legen lassen[249]). Insbesondere kann man sich nun auch auf den Standpunkt stellen, dasselbe ohne vorherige deduktive Begründung mit Hülfe von nach gewissen Analogieen gebildeten Kräftefunktionen zur Ableitung der Gleichungen für Systeme, *über deren wirkende Kräfte noch keine explicite Vorstellung vorliegt*, zu verwenden[250]). So gewinnt man mittelst

---

244) Genaueres siehe Nr. 45.

245) *B. Riemann*, Schwere, Elektrizität und Magnetismus, herausg. v. *K. Hattendorff*, Hannover 1880.

246) *C. Neumann*, Die Prinzipien der Elektrodynamik, Tübingen 1868 = Math. Ann. 17 (1880), p. 200; auch Math. Ann. 1 (1869), p. 317.

247) *E. Schering*, *Hamilton-Jacobi*'sche Theorie der Kräfte, deren Maass von der Bewegung der Körper abhängt, Gött. Abh. 18 (1873), p. 32; vgl. *W. Voigt*, Kompendium 1, p. 24; sowie *L. Koenigsberger*, Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig 1901.

248) Ausser den genannten Arbeiten vgl. *G. Holzmüller*, Zeitschr. f. Math. Phys. 15 (1870), p. 69; *C. Neumann*, Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Prinzip, Leipzig 1896, p. 227 ff.; *E. Budde*, Mechanik 1, p. 339 u. 372.

249) So für die Untersuchung der relativen Bewegung, vgl. z. B. *C. Neumann*, Leipz. Ber. 51 (1899), p. 371.

250) Ausser den bekannten Arbeiten von *W. Thomson* (Edinb. Roy. Soc.

derselben die Grundgleichungen der Elastizität, der Hydrodynamik (vgl. Band IV 15), die *Maxwell*'schen Gleichungen der Elektrodynamik; man sehe die speziellen Untersuchungen.

Dass das Hamilton'sche Prinzip unter den angegebenen Voraussetzungen völlig äquivalent mit dem d'Alembert'schen ist, geht aus der obigen Darstellung unmittelbar hervor. Allerdings muss man bei nicht-holonomen Bedingungen genau auf den virtuellen Charakter der Variationen achten. Indem *Hertz* dies nicht beachtete, kam er in seiner Mechanik 1894 zu der Anschauung, dass für Systeme dieser Art das *Hamilton*'sche Integral nicht zur Anwendung gebracht werden könne, obwohl *Voss* schon 1884 auf die Art hingewiesen hatte, wie dasselbe in Rücksicht auf die virtuellen Variationen zur Anwendung gebracht werden muss[251]).

43. Das Prinzip der kleinsten Aktion[252]). Weit mehr Schwierigkeiten hat das richtige Verständnis des *Prinzips der kleinsten Wirkung*, oder wie man eigentlich sagen sollte, der kleinsten *Aktion*, bereitet, da es sich hier um einen Variationsbegriff handelt, der bei den eigentlichen isoperimetrischen Problemen nicht zur Anwendung kommt.

Bei einem System, dessen Anfangs- und Endlage, denen die Zeiten t_0 und t_1 zugehören, festgehalten werden, besteht eine Variation der

Trans. 1863, Math. and Phys. Papers 3, p. 386; *Kirchhoff,* Mechanik, p. 57, 118) vgl. man u. a.: *A. Walther, Hamilton's* Methode und die Grundgleichungen der Elastizität, Diss. Berlin 1868; *Boltzmann*, Über das Prinzip v. Hamilton, J. f. Math. 73 (1871), p. 111, mit der Berücksichtigung von mehrfach zusammenhängenden mit Flüssigkeit erfüllten Räumen; *C. Neumann,* Beiträge zur mathematischen Physik, Leipzig 1893, p. 193 ff.; desgl. Die elektrischen Kräfte 2, p. 347; *W. Wien*, Hydrodynamik, p. 47, Leipzig 1900; *H. v. Helmholtz,* Das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik, Berl. Ber. 1892, p. 459; desgl. Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung, J. f. Math. 100 (1887), mit der Bemerkung p. 143: „Jedenfalls scheint mir die Allgemeingültigkeit des Prinzips so weit gesichert, dass es als ein heuristisches Prinzip und als Leitfaden für das Bestreben die Gesetze neuer Klassen von Erscheinungen zu formulieren, einen hohen Wert in Anspruch nehmen kann.“ So bezeichnet auch schon *C. Neumann* (Ann. di mat. (2) 2 (1868), p. 2) das Prinzip als forma suprema et sacrosancta, nullis exceptionibus obvia.

251) *A. Voss*, Math. Ann. 25 (1885), p. 263; vgl. *O. Hölder*, Über die Prinzipien von *Hamilton* und *Maupertuis*, Gött. Nachr. 1896.

252) Die mehr politisch-soziale Vorgeschichte dieses Prinzips, die sich an den Namen *Maupertuis* knüpft, ist im Texte nicht in Betracht gezogen; siehe ausser *Montucla,* Histoire 3, p. 645: *A. Mayer*, Zur Geschichte des Prinzips der kleinsten Aktion, Leipzig 1877; *E. du Bois-Reymond*, Maupertuis, Berl. Ber. 1892, p. 393; desgl. *M. Cantor,* Vorlesungen über Geschichte d. Mathematik 3, p. 579.

wirklichen Bewegung darin, dass in der variierten Bahn etwa mit der Zeit t_0 beginnend jedem Punkt P der ursprünglichen ein Punkt $P + \delta P$ zugeordnet wird. Dabei tritt nicht nur eine Variation der Koordinaten $\delta x, \delta y, \delta z$ ein, sondern auch eine solche der Zeit, nämlich der Unterschied der Zeiten in den Systemlagen P und $P + \delta P$. Ist ferner $(PP_1) = ds$, $(P + \delta P, P_1 + \delta P_1) = ds + \delta ds$, so ist $dt + \delta dt$ die zur Durchlaufung des variierten Bahnelementes durchlaufene Zeit, also

$$\frac{ds + \delta ds}{dt + \delta dt}$$

die variierte Geschwindigkeit, welche für *einen* Punkt des Systems willkürlich festgesetzt, allgemeiner willkürlich *einer* Bedingung unterworfen werden kann. Man kann sie daher insbesondere so wählen, dass die Variation der totalen Energie

$$\delta T - \delta' U$$

Null ist, wobei unter $\delta' U$ der Ausdruck

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

verstanden wird.

Aus der identischen Gleichung

$$\int_{t_0}^{t_1} (2Td\delta t + (\delta T + \delta' U)\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum [(X - m\ddot{x})\,\delta x + (Y - m\ddot{y})\,\delta y + (Z - m\ddot{z})\,\delta z]\, dt$$

folgt, wenn die Zeit *nicht* variiert wird, d. h. für $\delta t = 0$, wieder das *Hamilton*'sche Prinzip. Wird dagegen über δt mittelst der nach der obigen Bemerkung zulässigen Bedingung

$$\delta T = \delta' U$$

verfügt, so ergiebt sich

$$\delta 2 \int_{t_0}^{t_1} T dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum [(X - m\ddot{x})\,\delta x + \cdots]\, dt = 0.$$

Dies ist das Prinzip der kleinsten Wirkung, dessen vollkommene *Äquivalenz mit dem d'Alembert'schen Prinzip* bei dieser Ableitung evident ist. Es ist dies aber eine *erweiterte Form* desselben, welche weder bei den Kräften eine von t explicite freie Kräftefunktion noch bei den holonomen oder nicht-holonomen Bedingungen Unabhängigkeit von der Zeit voraussetzt, während allerdings die Variationen $\delta x, \delta y, \delta z$ ohne Rücksicht auf die Zeit zu behandeln sind, also im allgemeinen

einer Lagenänderung entsprechen, welche mit den Bedingungen der wirklich erfolgenden Bewegung in gar keinem Zusammenhang steht[253]).

Das Prinzip der kleinsten Aktion lautet daher[254]):

Die Variation des Integrals

$$\int_{t_0}^{t_1} T\,dt$$

ist in Bezug auf alle virtuellen Variationen der wirklich erfolgenden Bahn des Systems, welche neben der Grenzbedingung der für das *d'Alembert*'sche Prinzip erforderlichen Variationsbedingung genügen, und bei denen die Variation der totalen Energie in jedem Augenblicke Null ist, *selbst gleich Null,* und *umgekehrt lässt sich aus dieser Forderung* auch wieder das *d'Alembert*'sche Prinzip, d. h. überhaupt *das System der Differentialgleichungen der Dynamik herleiten.*

Ist insbesondere eine Kräftefunktion U vorhanden, so wird

$$\delta' U = \delta U,$$

ist U ferner unabhängig von t und findet dies auch für die Bedingungen statt, so hat man das Prinzip der kleinsten Aktion in der von *Lagrange* ausgesprochenen Form.

Bei der Einführung des *allgemeinsten* Variationsbegriffs, der geradezu seine bestimmte Gestalt erst durch die Absicht gewinnt, die Differentialgleichungen der Bewegung zu erhalten, wird indes die besondere Form des unter dem Integral aufzunehmenden Ausdruckes völlig gleichgültig. Man kann, wie *Voss* bemerkt, an Stelle desselben schliesslich eine ganz *willkürliche* Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten setzen, obwohl die historischen Formen $T + U$ und T durch Einfachheit und Allgemeinheit selbstverständlich ausgezeichnet sind[255]).

---

253) Diese virtuellen Bahnen sind hier also — wie das übrigens *immer* im Charakter allgemeiner virtueller Verrückungen liegt — im allgemeinen *unmögliche,* was im direkten Gegensatze zum *Ostwald*'schen Prinzip des ausgezeichneten Falls steht, vgl. Fussn. 27.

254) So bei *A. Mayer* mit in Bezug auf das Variationsproblem völlig korrekter Ausdrucksweise: „Gehorcht die Bewegung eines Systems . . dem Prinzipe der lebendigen Kraft, und sind die Positionen zur Zeit t_0 und zu einer unbekannten Zeit t_1 gegeben, so fällt die Aufgabe, die Bewegung des Systems zu bestimmen, mit der zusammen, diejenigen Werte der Koordinaten und den Wert t_1 zu bestimmen, welche der Differentialgleichung

$$T = U + h$$

genügen und welche $\delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt = 0$ machen"; Leipz. Ber. 38 (1886), p. 354.

255) *A. Voss*, Bemerkungen über die Prinzipe der Mechanik, Münch. Ber. 1901, p. 167.

44. Historisches über das Prinzip der kleinsten Aktion. *Euler* hat das in ganz unklarer und unrichtiger Weise von *Maupertuis*[256]) ausgesprochene Prinzip zuerst aus teleologischen Gesichtspunkten[257]) hergeleitet und insbesondere auf Centralkräfte[258]) angewandt; erst *Lagrange*[259]) bewies dasselbe allgemein unter der Voraussetzung einer Kräftefunktion und von der Zeit unabhängiger Bedingungen. Da aber *Lagrange* den von ihm benutzten Variationsprozess nicht genauer definiert hatte, entstanden bald Missverständnisse über die Möglichkeit, aus dem *Lagrange*'schen Integral die Differentialgleichungen der Bewegung zu gewinnen. Insofern nämlich die Variation bei konstanter Energie ausgeführt wurde, während die Variation der Zeit nicht explicite in Betracht gezogen wird, schienen die $\delta x, \delta y, \delta z$ nicht mehr von *einander unabhängig zu sein*[260]). Allerdings hat schon *Rodrigues*[261]) in völlig zutreffender Weise im *Lagrange*'schen Integral auch die Zeit variiert und so mit Hilfe der Multiplikatorenmethode die Differentialgleichungen der Bewegung gewonnen; aber diese Arbeit ist unbeachtet geblieben.

Jacobi[262]), der ebenfalls von der Voraussetzung ausging, dass die

---

256) *Moreau de Maupertuis* (Fussn. 252) zuerst in den Mém. de l'Acad. de Paris 1740, dann in der Arbeit: Des lois de mouvement et de repos deduites d'un principe métaphysique, Berlin, Mém. de l'Acad. 1745, p. 276, insbes. 286.

257) *Euler* im additamentum II de motu projectorum p. 309 der „methodus inveniendi", Lausannae 1744: Quoniam omnes naturae effectus sequuntur quandam maximi minimive legem, dubium est nullum, quin in lineis curvis, quas corpora projecta describunt si a viribus *quibuscunque* sollicitantur, quaepiam maximi minimive proprietas locum habeat.

258) Ibid., jedoch mit der Bemerkung: Tam late ergo hoc principium patet, ut solus motus a resistentia medii perturbantis excipiendus videatur.

259) *Lagrange,* Misc. Taur. 2 (1760/61), Application de la méthode des maxima et minima à la resolution de différents problèmes de la dynamique, Oeuvres 1, p. 353. Das Prinzip der kleinsten Aktion nimmt übrigens in *Lagrange*'s Mécanique eine nur nebensächliche Stelle ein, obwohl es *Lagrange* vielleicht ursprünglich näher gelegen hatte, dasselbe analog zum Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten in der Statik als ein (allerdings nicht ganz allgemeines) Grundprinzip der Dynamik anzusehen. Später schenkte man ihm noch weniger Beachtung; *Poisson* sagt bei der Anwendung von *Hamilton*'s Prinzip der variierenden Wirkung, J. de math. 2 (1837), p. 333: „Ce principe de la moindre action, qui n'est qu'une règle inutile aujourd'hui."

260) Siehe *A. Mayer,* Leipz. Ber. 38 (1886), p. 343.

261) *Olinde Rodrigues,* Correspond. sur l'éc. polyt. 3, p. 159, Paris 1815.

262) *Jacobi,* Werke, Suppl. p. 44: „Das Prinzip wird in fast allen Lehrbüchern so dargestellt, dass es nach meiner Ansicht nicht zu verstehen ist. Es wird zwar gesagt, dieser Satz gelte nur, so lange der Satz der lebendigen Kraft gelte, aber es wird zu sagen vergessen, dass man durch den Satz der lebendigen

Zeit nicht variiert werden solle, gab der Frage daher eine ganz neue Wendung, indem er mit Hülfe des Prinzips der lebendigen Kraft die Zeit vollständig unter dem Integral eliminierte. Es entsteht so ein sozusagen *neues* Variationsprinzip, das man etwa als *Jacobi*'sches bezeichnen kann; bei ihm treten unter dem Integral nur noch die *geometrischen Elemente* der Bahn auf[263]). Wird nun das Integral so variiert, dass die Koordinaten Variationen erhalten, die wegen der Unabhängigkeit der Bedingungen von der Zeit sämtlich auch möglichen Bahnänderungen entsprechen, so ergeben sich in der That die Gleichungen der Dynamik.

Man hat nämlich aus

$$T - U = h,$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{1}{2}\sum a_{ik}\, dq_i\, dq_k = S$$

gesetzt wird,

$$dt = \sqrt{\frac{S}{U+h}}.$$

Dadurch wird

$$J = \int T dt = \int \sqrt{S(U+h)};$$

und in der That liefert

$$2\delta J = \int \sum \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U+h}{S}} \sum \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_i}\, dq_s\, dq_k + \frac{\partial U}{\partial q_i}\sqrt{\frac{S}{U+h}} \right\} \delta q_i$$
$$- \int \sum d\left(\sum a_{ik}\, dq_k \sqrt{\frac{U+h}{S}}\right) \delta q_i = 0,$$

wenn zur Abkürzung wieder

$$dt = \sqrt{\frac{S}{U+h}}$$

eingeführt wird, die aus den *Lagrange*'schen durch Elimination der Zeit entspringenden Gleichungen.

M. Ostrogradsky dagegen, der ebenfalls mit Nachdruck die unrichtige Begründung des Prinzips hervorhob, gelangte zu der Ansicht, dass das *Lagrange*'sche Minimumprinzip bei richtiger Behandlung im Sinne

---

Kraft die Zeit aus obigem Integral eliminieren und alles auf *Raumelemente* reduzieren müsse." Dabei ist aber gerade *der* Umstand nicht erwähnt, welcher dem *damaligen* Verständnis entgegen war. Dass die Variation des Integrals vermöge der Gleichungen der Bewegung verschwindet, *wurde nie bezweifelt*; es handelt sich nur um die Umkehrung des Satzes (*Lagrange*, Méc. anal. 1, p. 211).

263) Das *Jacobi*'sche Prinzip ist daher von ganz speziellem Charakter; auch ist nur der *Form* nach eine neue Aussage darin enthalten. Siehe Fussn. 174.

des *Hamilton*'schen zu fassen sei[264]). Erst *Sloudsky*[265]) betonte wieder, auf *Rodrigues* zurückgehend, dass das letztere vom Prinzip der kleinsten Aktion wesentlich verschieden sei; sodann gab *A. Mayer*[266]) im Anschluss an diese Arbeiten den wahren Sachverhalt, der übrigens in England durch *Routh*[267]) z. B. längst bekannt war. *Helmholtz*[268]) lenkte von neuem das Interesse auf das Prinzip; erst *Hölder* hat alle Zweifel, welche dasselbe betrafen, völlig beseitigt und das Prinzip in seinem weitesten Umfange ausgesprochen[269]).

Nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung in seiner ursprünglichen Form ist $\delta\int T\,dt = 0$, also die Maximum-Minimum-Bedingung für das Integral erfüllt. Die Untersuchung nach dem *Vorzeichen der zweiten Variation*[270]), d. h. den Nachweis, dass es sich hier in der That um ein *Minimum* für hinlänglich kleine Intervalle handelt, berühren wir hier nicht, da sie vorzugsweise dem rein mathematischen Gebiet angehört.

C) Eigentliche Integralprinzipe.

45. Das Prinzip der lebendigen Kraft. Aus den Fundamentalgleichungen der Dynamik Nr. 37, 3)

$$m\ddot{x}_i = X_i + \sum \lambda_s a_{i_s}, \text{ etc.}$$

264) *M. Ostrogradsky,* Equations différentielles dans le problème des isopérimètres, Pétersb. Mém. de l'Acad. (6) 4 (1850), p. 385; vgl. besonders p. 415 f.

265) *Th. Sloudsky,* Nouv. ann. de math. (2) 18 (1866), p. 198.

266) *A. Mayer,* Die beiden allgemeinen Sätze der Variationsrechnung, welche den beiden Formen des Prinzips der kleinsten Wirkung entsprechen, Leipz. Ber. 38 (1886), p. 343.

267) *E. J. Routh* (Dynamics of a system of rigid bodies, 4. ed. 2, p. 244) benutzt wie *Rodrigues* die Multiplikatormethode; ohne dieselbe leitet *K. Uckermann,* Diss. Marburg 1893, das Prinzip her.

268) *H. v. Helmholtz,* Das Prinzip d. kleinsten Aktion, Berl. Ber. 1887, p. 225. Gegen seine Darstellung sind manche Einwendungen zu machen, vgl. *Hölder*'s Arbeit, Fussn. 269.

269) *O. Hölder,* Über die Prinzipien von *Hamilton* u. *Maupertuis,* Gött. Nachr. 1896, p. 150. Man sehe ferner *E. Mathieu,* Dynamique analytique, 1877, p. 42; *G. Sabinine,* Sur le principe de la moindre action, Ann. di mat. (2) 12 (1883), p. 237; Sur le minimum d'une intégrale, ibid. 14 (1887), p. 13; Sur les considérations d'*Ostrogradsky* et de *Jacobi* relatives au principe de la moindre action, ibid. 15 (1888), p. 27; *M. Réthy,* Über das Prinzip der kleinsten Wirkung und das Hamilton'sche Prinzip, Math. Ann. 48 (1897), p. 514; *A. Voss,* Gött. Nachr. 1900.

270) Siehe *J. A. Serret,* Paris C. R. 72 (1871), p. 697 oder Bull. sciences math. 2 (1871), p. 97; desgl. *G. Darboux,* Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. 2, p. 480, Paris 1896; *D. Bobylew,* Petersb. Abh. d. Akad. 59 (1889); *G. Kobb,* Sur le principe de la moindre action, Toul. Ann. 5 (1891), p. 1—3.

und den Bedingungsgleichungen, daselbst 2)

$$\sum(a_{si}\dot{x}_i + b_{si}\dot{y}_i + c_{si}\dot{z}_i) + c_s = 0$$

erhält man durch Multiplikation mit den $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ und Summation vermöge der Einführung der lebendigen Kraft oder kinetischen Energie T die Gleichung

$$\frac{dT}{dt} = \sum(X_i\dot{x}_i + Y_i\dot{y} + Z_i\dot{z}_i) - \sum\lambda_s c_s,$$

in der unter den X_i, Y_i, Z_i sämtliche Kräfte mit Ausnahme der aus den Bedingungsgleichungen hervorgehenden zu verstehen sind. Sind insbesondere die c_s alle gleich Null, so folgt durch Integration:

$$T - T_0 = \sum\int_{t_0}^{t_1}(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i).$$

Dieser allgemeine *Satz der lebendigen Kraft oder der kinetischen Energie*[271]: *Die Zunahme der lebendigen Kraft oder kinetischen Energie ist gleich der von den sämtlichen Kräften in der zugehörigen Zeit geleisteten Arbeit*, gilt daher bei allen auch nicht-holonomen Bedingungen, falls nur die $c_s = 0$ sind[272]; bei durch endliche Gleichungen vertretenen Bedingungen

$$f_1 = 0 \ldots f_k = 0$$

also jedenfalls dann, wenn dieselben von t explicite unabhängig sind.

Denkt man sich die X_i, Y_i, Z_i in die Bestandteile

$$X_i = X_i' + X_i'',$$
$$Y_i = Y_i' + Y_i'',$$
$$Z_i = Z_i' + Z_i''$$

zerlegt, von denen die ersteren eine von der Zeit explicite unabhängige Kräftefunktion U besitzen, so wird unter denselben Voraussetzungen

$$T - T_0 = U - U_0 + \int\sum(X''dx + Y''dy + Z''dz),$$

oder, wenn man an Stelle von U die Funktion

$$V = -U$$

einführt:

$$T + V = T_0 + V_0 + \int\sum(X''dx + Y''dy + Z''dz).$$

---

271) Einfacher erhält man diese Gleichung direkt aus dem d'Alembertschen Prinzip unter der Voraussetzung, dass die wirklichen Bahnelemente dx_i, dy_i, dz_i unter den virtuellen enthalten sind, wobei der holonome oder nicht holonome Charakter völlig gleichgültig ist.

272) So wohl zuerst bei *A. Voss*, Über die Differentialgleichungen der Mechanik, Math. Ann. 25 (1885), p. 266.

Ist insbesondere das Arbeitsintegral rechter Hand gleich Null, so erhält man

$$T + V = T_0 + V_0.$$

Dieser letztere Satz, der wieder *das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft oder der kinetischen Energie* ausspricht, liefert für alle mechanischen Systeme mit *einem* Freiheitsgrad, bei denen nur *konservative*, d. h. aus einer von t explicite unabhängigen Kräftefunktion entspringende, Kräfte wirken und bei den vorhin angegebenen Voraussetzungen über die Bedingungen, die Lösung durch Quadraturen, und ist überhaupt das Fundamentaltheorem, an das sich die weitere Diskussion jedes mechanischen Problems zunächst anschliesst.

Weit wichtiger für die gesamte mechanische Anschauung ist indessen die, wie es scheint, durch *Helmholtz*[273]) zuerst eingeführte Umformung, welche die negative Kräftefunktion als *potentielle*, T als *kinetische*, $T + V$ als *totale Energie* auffasst, womit der Satz von der lebendigen Kraft zum *Energieprinzip*, d. h. zur Lehre von der *Erhaltung der Energie* hinüberleitet.

Die Betrachtung der *Energie* in rein mathematischer Hinsicht bietet Vorteile, welche besonders deutlich bei den *Stabilitätsfragen* hervortreten. Wir erwähnen hier nur die weitreichenden Verallgemeinerungen, welche *Routh*[274]) in das *Lagrange*'sche, zuerst von *Dirichlet*[275]) vollständig bewiesene, Stabilitätskriterium eingeführt hat.

Andererseits stehen hiermit in enger Verbindung alle die Gesichtspunkte, welche mit der Fortbildung der analytischen Geometrie zur mehr-dimensionalen Raumauffassung hervortreten. Vor allem sei hier an die Untersuchungen über das *Linienelement*[276]), das als Quadratwurzel aus dem Differential der (doppelten) kinetischen Energie auftritt, an die Theorie der quadratischen Formen im *Problem der kleinen*

---

273) *Helmholtz*, Erhaltung der Kraft, *Ostwald*, K. B. Nr. 1, p. 11; auch von *Clausius* wird die Auffassung, die im einzelnen vielleicht schon früher bestanden hat, in ihrer allgemeinen Form auf *Helmholtz* zurückgeführt (Ann. Phys. Chem. 150 (1873), p. 109).

274) *Routh*, Essay on stability of motion; Dynamik 2, p. 75 f.

275) *P. G. Lejeune-Dirichlet*, Über die Stabilität des Gleichgewichts, J. f. Math. 32 (1846), p. 85; *A. Liapounoff*, Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction de forces n'est pas maximum, J. de math. (5) 3 (1897), p. 81; *J. Hadamard*, Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique, ibid. p. 364.

276) Sie beginnen mit *J. Liouville*'s Abhandlung: Expression remarquable de la quantité qui est un minimum en vertu du principe de la moindre action, J. de math. (2) 1 (1856), p. 297.

Schwingungen[277]), an die *Lehre von der Äquivalenz* der mechanischen Probleme[278]), sowie an die Vorstellungen der *Gruppen-* und *Transformationstheorie*[279]) erinnert.

Von prinzipieller Wichtigkeit ist endlich das Auftreten der totalen Energie $E = T + V$ in der *Poisson-Hamilton*'schen Transformation der *Lagrange*'schen Gleichungen, Nr. 37, (4). Zerlegt man die Variabelen q_s, $s = 1, 2, \ldots, r$ in zwei Gruppen q_{s_1} und r_σ, $s_1 = 1, 2, \ldots, l$; $\sigma = 1, 2, \ldots, l'$; $l + l' = r$ und setzt

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{s_1}} = p_{s_1},$$

so folgt für $T' = (T) - \sum p_{s_1} \dot{q}_{s_1}$, falls (T) der aus T durch die Substitution der p_{s_1} an Stelle der $\dot{q}_{s_1}$ entstehende Wert ist, sodass T' eine Funktion der q_{s_1}, p_{s_1}, r_σ, $\dot{r}_\sigma$ wird,

$$\frac{dp_{s_1}}{dt} = \frac{\partial T'}{\partial q_{s_1}} + Q_{s_1},$$

$$\frac{dq_{s_1}}{dt} = -\frac{\partial T'}{\partial p_{s_1}},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{r}_\sigma}\right) - \frac{\partial T'}{\partial r_\sigma} = Q_\sigma,$$

oder, wenn die Gruppen q_s und q_{s_1} zusammenfallen,

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial T'}{\partial q_s} + Q_s,$$

$$\frac{dq_s}{dt} = -\frac{\partial T'}{\partial p_s}.$$

In dem besonderen Falle, wo T eine homogene quadratische Funktion der $\dot{q}_s$ ist (Nr. 37), wird $T' = -(T)$; setzt man nun auch

$$Q_s = -\frac{\partial V}{\partial q_s}$$

voraus, so entsteht für

$$E = (T) + V$$

die *kanonische* Gestalt der Differentialgleichungen der Mechanik:

$$\frac{dq_s}{dt} = + \frac{\partial E}{\partial p_s},$$

$$\frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial q_s},$$

277) Siehe namentlich *E. J. Routh*, Dynamics of a system rigid bodies, vol. 1 u. 2.

278) *P. Stäckel*, J. f. Math. 107 (1891), p. 319.

279) Ausser den Gesamtarbeiten von *S. Lie* vgl. die Untersuchungen von *P. Painlevé*, *P. Stäckel* u. a., sowie die Artikel 11—14 von Bd. IV.

wodurch das ganze Problem nur von der Energiefunktion E abhängt[279a]).

46. Historische Bemerkungen über Arbeit, lebendige Kraft, Energie. Der Satz der lebendigen Kraft findet sich in seiner einfachsten Form schon bei *Galilei*[280]), dem bekannt war, dass die Endgeschwindigkeit des auf der schiefen Ebene fallenden Körpers nur von der Höhe abhängt; in weit prinzipiellerer Form aber tritt das *Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kräfte* bei *Huygens*[281]) als *Axiom* auf. *Joh. Bernoulli*[282]) spricht bereits von der *conservatio virium vivarum*, von der Fähigkeit der lebendigen Kraft, in verschiedenen Formen Arbeit zu leisten.

In seiner eigentlichen, der analytischen Mechanik angehörigen Form, findet sich der Satz aber zuerst bei *Dan. Bernoulli*, der ihn bereits für die Probleme der himmlischen Mechanik entwickelt[283]); bei *Lagrange*[284]) entstand dann der Begriff der Potentialfunktion für diskrete, bei *Laplace*[285]) für kontinuierliche Massen.

279a) Diese kanonische Form der Differentialgleichungen der Dynamik, in welche nach *Ostrogradsky*, Petersb. Mém. de l'Acad. (6) 4 (1850), p. 403, *jedes* isoperimetrische Problem gebracht werden kann, findet sich schon in einer unveröffentlichten Arbeit von *Cauchy* in Turin, Mém. (1831); vergleiche *A. Cayley*, Brit. Assoc. Rep. 1862, London 1863, p. 184; über das Auftreten der kanonischen Gleichungen bei *Lagrange, Poisson, Hamilton, Routh* vgl. Artikel 11a von Bd. IV.

280) Vgl. *Mach*, Mechanik, p. 342. Ähnliche Betrachtungen bei *P. Varignon*, Propriétés communes aux chutes rectilignes dans le vuide, Paris, Mém. de l'Acad. 1720, p. 107 (Paris 1722).

281) *Ch. Huygens* im horologium oscillatorium, Paris 1673. Vgl. ausser *Lagrange*, Mécanique 1, p. 249, *Mach*, Mechanik, p. 180: „Wir hoffen dieses Prinzip (des Schwingungsmittelpunkts) als identisch mit dem Satze der lebendigen Kräfte hier in das richtige Licht gestellt zu haben.“ Zur genaueren Untersuchung vgl. die grundlegenden Arbeiten von *Jacob Bernoulli*, Demonstration générale du centre de balancement, Paris, Mém. de l'Acad. 1703, p. 78; Opera, 2 Bde. Genevae 1744, Bd. 1, p. 930; Démonstration du principe de *M. Huyghens*, Paris, Mém. de l'Acad. 1704, p. 136; Opera 1, p. 947.

282) *Joh. Bernoulli*, Comm. Ac. Petrop. 2 (1729), p. 200, Theoremata selecta pro conservatione virium vivarum; desgl. Opera 3, p. 248 (aus den Acta erud. Lips. 1735), de vera notione virium vivarum, mit der merkwürdigen Bemerkung p. 246: „Hinc patet, *vim vivam* quae aptius vocatur *facultas agendi* esse aliquid reale et substantiale quod per se substitit et quantum in se est, non dependet ab alio.“

283) *D. Bernoulli*, Remarques sur le principe de la conservation des forces vives pris dans son sens général, Berlin, Mém. de l'Acad. 1748, p. 356; daselbst für das Problem der n Körper p. 363.

284) *Lagrange*, Berlin, Mém. de l'Acad. 1777, p. 155. Der Name *Potentialfunktion* stammt bekanntlich von *G. Green* (An essay of the application of

Aus der speziellen Formel $mv^2 = 2ghm$ ist nun auch die ganze Lehre von der Energie entsprungen. Ursprünglich galt als Ausdruck für die lebendige Kraft die Grösse mv^2. Ein ebenso primitiver Begriff ist ferner der einer gewissen *Leistung* Ph, welche stattfindet, wenn ein Gewicht P die Niveauänderung h erfährt; er wurde allmählich auf alle durch Gewichte ausdrückbare (zunächst konstante) Kräfte übertragen.

Diese Grösse wird bald als *Effekt* der Kraft, als puissance mécanique[286]), als moment d'activité[287]), als effet dynamique, als quantité d'action[288]) (*Coulomb*); von andern (*Ch. Dupin*[289]), *Hachette*[290]), *Prony*[291])) jedoch auch schon als *Arbeit, travail, labour,* bezeichnet.

Aber erst durch *Poncelet*'s Einfluss hat sich der von *Coriolis*[292]) vollkommen scharf definierte Begriff der *Arbeit, work, travail, lavoro, einer veränderlichen Kraft bei beliebiger Bahn* vollständig eingebürgert. Diese beiden französischen Forscher, deren Ideen sich vielfach berühren, zum Teil auch wohl durch gegenseitige Beeinflussung sich modifiziert haben, wenden den Satz der lebendigen Kraft in voller Allgemeinheit auf die zwangläufige *Bewegung der Maschinen* an[293]): so entsteht die *Coriolis-Poncelet*'sche Formel

$$\frac{1}{2}\sum m(v^2 - v_0^2) = T_m - T_r - T_f - T_c,$$

wo die Grössen rechter Hand die Arbeiten der bewegenden Kräfte und der verschiedenen Widerstände resp. Stösse bezeichnen.

---

math. analysis, Nottingham 1828), ausser in den Math. Papers auch abgedruckt J. f. Math. 39, 44, 47 (1850/54); deutsch herausg. v. *A. Wangerin, Ostwald,* K. B. Nr. 61.

285) *Laplace*, Paris, Mém. de l'Acad. 1782, p. 119.

286) So z. B. schon *J. Smeaton* in Lond. Phil. Trans. 66 (1776), p. 450 als mechanical power.

287) *Carnot*, Principes fondamentaux.

288) So *G. Monge* und *J. P. Hachette.*

289) *Ch. Dupin*, Géométrie et mécanique des arts, 3 (1826), p. 477.

290) *J. P. Hachette,* Traité élémentaire des machines, 4. éd. 1828, p. 19.

291) *R. Prony*, Annales des mines 1826, p. 33; vgl. die Angaben von *Poncelet* im Cours de mécanique, § 6.

292) *G. Coriolis* sagt in der Vorrede zur 1. éd. des Traité de la mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines 1829, éd. 2 (1844): „*Je désigne par le nom de travail* la quantité qu'on appelle assez communément puissance mécanique" etc. . . . Daselbst auch, sowie bei *Poncelet* der grundlegende Satz von der *Arbeit der Resultanten.*

293) Nach *C. L. Navier*, Details historiques sur l'emploi du principe des forces vives dans la théorie des machines (Ann. de chimie 9 (1818), p. 146), hat indessen schon *L. N. Carnot* in seinem Essai sur les machines en général (1783), mit dieser Ausdehnung begonnen.

Erst von *S. Carnot*[294]) wurde diese Gleichung auch auf in damaligem Sinne nicht mechanische Vorgänge, thermodynamische Probleme, angewandt, und damit der Grund zu der heutigen Lehre von der Energie gelegt, während namentlich durch *Green*'s Arbeiten und *Hamilton*'s allgemeinen Begriff der *Kräftefunktion* (force function)[295]) auch die mathematische Formulierung sich weiter entwickelte.

Die noch auf die rein mechanischen Vorgänge des Stosses von bewegten Massen etc. beschränkte Vorstellung von *Th. Young*[296]), den Körpern *Energie* zuzuschreiben, vermöge deren sie Arbeit leisten können, die schon bei *L. N. Carnot* als force vive virtuelle (die jetzige potentielle Energie) neben der force vive zum Ausdruck gekommen war, bildet sich unter *Coriolis*[297]) und *Poncelet*[298]) zu dem Prinzipe de la transmission du travail, d. h. der Lehre von dem Umsatz der Arbeitsgrösse in den Maschinen, aus.

Unter *R. Mayer*'s[299]) kühner und gänzlich origineller Gedanken-

---

294) *Sadi Carnot*, 1824; abgedruckt Ann. éc. norm. (2) 1 (1872), p. 393,

295) *W. R. Hamilton*, On a general method in dynamics, Lond. Phil. Trans. 1834, p. 249. Der Name Kräftefunktion ist durch *Jacobi* 1836, J. f. Math. 17 (1838). p. 97, eingeführt. Die prägnante Bezeichnung als *Ergal* durch *Clausius*, Ann. Phys. Chem. 150 (1873), p. 136, neuerdings wieder bei *E. Budde*, Mechanik 1, p. 430.

296) *Th. Young*, A course of lectures of natural philosophy, Bd. 1, p. 78; Bd. 2, p. 51; dort auch p. 79 die Bemerkung „The *labour* expended in producing any motion is proportional not to the momentum, but to the energy, which is obtained.“ *Energie* bewegter Körper indes schon bei *d'Alembert*, Encyclopédie (4 Bde., 2. éd. Paris 1785) Bd. 2, p. 82, Art. Mathématiques.

297) *Coriolis*, Traité éd. 1844, p. 39 u. 114. Von *Coriolis* rührt auch (avertissem. zur éd. 1, „je me suis encore permis une *légère innovation*, en appelant force vive le produit du poids par la hauteur“) die jetzige Definition der lebendigen Kraft her, welche gerade diese *Äquivalenz von Arbeit und lebendiger Kraft* ausdrückt; diese scheinbar nur formale Änderung ist ebenso wichtig, wie die in *Helmholtz'* Erhaltung der Kraft durch Umkehrung des Zeichens der Potentialfunktion gewonnene Erkenntnis, dass die totale Energie konstant ist. Erst sehr langsam ist der Ausdruck mv^2 aufgegeben; auch gegenwärtig besteht derselbe noch vielfach, so z. B. *W. Schell*, Theorie d. Bewegung 2, p. 530; namentlich bei französ. Autoren, z. B. *H. Resal*, Mécanique 2, p. 235; *R. Liouville*, Paris C. R. 114 (1892), p. 1171; *P. Appell*, J. de math. 12 (1896), p. 5; *J. Boussinesq* unterscheidet die énergie actuelle von der force vive de *Leibniz* (Acta erudit. Lips., 1695); fast durchgängig noch in der englischen Litteratur, siehe die Bemerkung von *Routh*, Dynamik 1, p. 315.

298) *J. V. Poncelet*, Cours de mécanique, p. 17: „La somme des travaux élémentaires développés tant par les différentes forces qui produisent la modification du mouvement que par les forces d'inertie qui naissent de cette modification, est constamment égale à zéro.“

299) *R. Mayer*, Manuscr. von 1841 für Ann., Phys. Chem. in: R. Mayer, kleinere Schriften u. Briefe, herausg. von *J. Weyrauch*, Stuttgart 1893.

entwicklung führt dies zu einer ganz allgemeinen Konzeption, vermöge der alle Erscheinungen unter dem einheitlichen Bilde mechanisch äquivalenter Arbeiten, die sich ineinander transformieren, aufgefasst werden. In mathematisch genauerer Form und unabhängig von *R. Mayer* wurden diese Ideen von *Helmholtz*[300]), der an Stelle der negativen Potentialfunktion die Vorstellung der *Spannkraft* V einführte[301]), in dem allgemeinen *Gesetz der Erhaltung der Energie*

$$\frac{1}{2}\sum m v^2 + V = \text{const.}$$

ausgesprochen und zugleich mit den weitgehendsten Anwendungen auf Thermodynamik, Elektrodynamik etc. bereichert.

Begrifflich wurden diese Ideen vor allem durch *Rankine* und *W. Thomson* weiter entwickelt, deren Terminologie schliesslich zu allgemeiner Geltung gekommen ist.

Nach *Rankine*[302]) steht aktuelle oder sensible Energie (vis viva, Wärme, Licht, elektrische Bewegung etc...), bald darauf von *W. Thomson* dynamische oder *kinetische* Energie genannt, der *potentiellen* (latenten) Energie (Molekularkräfte, Gravitation, chemische Affinität, elektrische Ladung etc...) gegenüber; alle Erscheinungen beruhen in einer fortwährenden Transformation dieser beiden Energieformen ineinander, deren Gesamtgrösse sich erhält, und es ist die Aufgabe der physikalischen Mechanik, die Gesetze zu finden, nach denen diese Verwandlungen erfolgen. Über die Weiterbildung dieser Ideen durch *Ostwald* siehe Nr. **49.**

47. Das Energieprinzip. Der Satz von der Erhaltung der Energie im alten Sinne, Nr. **42**, ist ein rein dynamischer. Ganz anders steht es aber[303]) mit dem Energieprinzip der modernen Physik, dass als ein auf eine umfangreiche Induktion gegründetes Axiom anzusehen ist.

Die *Energie eines materiellen Systems*[304]) ist der in mechanischen

300) *H. v. Helmholtz,* Über die Erhaltung der Kraft, Berlin, 23. Juli 1847 = Wiss. Abh. 1, p. 12—75; auch *Ostwald,* K. B. Nr. 1.

301) *Ostwald,* K. B. Nr. 1, p. 12.

302) *W. J. M. Rankine,* On the general law of the transformation of energy, Glasgow, Phil. Soc. Proc. 3 (1853) = Papers 1881, p. 203; Outlines of the science of energetics; ibid. 1855 = Papers, p. 209 mit der Bemerkung: „Any kind of energy may be made by the means of performing any kind of work", p. 218; desgl. *W. Thomson*, On the origin and transformations of motive power, 1856 = Papers 2, p. 182.

303) Vgl. z. B. *P. Duhem,* Traité élementaire de mécanique chimique, Paris 1897, p. 25.

304) *W. Thomson* 1851 Phil. Mag. (4) 9 (1855), p. 523: „The total mechanical Energy of a body might be defined as the mechanical value of all the effect it

Arbeitseinheiten gemessene Betrag aller Wirkungen, die „ausserhalb“ des Systems hervorgerufen werden, wenn dasselbe aus seinem Zustande[304a]) auf irgend eine Weise in einen gewissen Normalzustand übergeht; dieser Betrag ist von der Art des Überganges völlig unabhängig.

Wir nehmen an, dass ein materielles System, an dessen Teilchen ausser den dynamischen Erscheinungen noch verschiedene Zustände, thermische, elastische, magnetische, chemische Affinitäten ... hervortreten, hinsichtlich dieses Gesamtzustandes durch eine Reihe von Parametern $q_1, q_2 \ldots q_k$ und den Geschwindigkeiten derselben $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \cdots \dot{q}_k$ definiert sei. Geht nun das System aus irgend einem *Normalzustand* $Z_0(q_s^0, \dot{q}_s^0)$ in irgend einen neuen Zustand $Z(q_s, \dot{q}_s)$ über, so wird ein gewisser Betrag mechanischer Arbeit[305]) A ausserhalb des Systems hervorgerufen, wobei allerdings vorausgesetzt wird, dass es möglich sei, diese Wirkungen sämmtlich durch *Äquivalente mechanischer Arbeit* zu messen. Würde nun die Arbeit auf einem ersten Wege W von Z_0 nach Z gleich A_1, auf einem zweiten Wege W_2 gleich A_2 sein, und entspricht dem Wege W_3 von Z nach Z_0 die Arbeit A_3, so hat man zwei geschlossene Wege

$$W_1 + W_3 \text{ und } W_2 + W_3,$$

denen die Arbeiten $A_1 + A_3$, $A_2 + A_3$ entsprechen. Macht man nun die *Voraussetzung der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile*, dass nämlich die Arbeit auf einem geschlossenen Wege immer gleich Null ist[306]), so folgt hieraus

$$A_1 = A_2,$$

d. h. die totale Arbeit ist eine Funktion der Parameter, die nur vom Anfangs- und Endzustande abhängig ist, also

$$A = F(q_s, \dot{q}_s \mid q_s^0, \dot{q}_s^0).$$

---

would produce in heat omitted and in resistances overcome, if it were cooled to the utmost. But . . it is convenient, to choose a certain state as standard. Desgl. Quart. J. of math. 1 (1857), p. 57. Vgl. *M. Planck,* Energie, p. 99; *G. Helm,* Grundzüge d. math. Chemie, Leipzig 1894, p. 1; *Planck*, Vorlesungen über Thermodynamik, Leipzig 1897, p. 34 ff.

304a) Über die hier nach *Planck* gewählte Ausdrucksweise vgl. *Planck,* Prinzip der Erhaltung der Energie, p. 93.

305) Dasselbe wird von *P. Duhem*, Commentaire aux principes de la thermodynamique, J. de math. (4) 8 (1892), p. 290 als *Oeuvre* bezeichnet.

306) Natürlich kommen hier, sobald es sich um allgemeine Mannigfaltigkeiten handelt, die Sätze der Analysis situs in Betracht, welche *E. Betti*, Sopra gli spazii d'un numero qualunque di dimensioni, Ann. di mat. (2) 4 (1870/71), p. 140, desgl. *E. Lemmi*, Sur les cas d'exception du théorème des forces vives, J. de math. (3) 2 (1876), p. 233 entwickeln. Vgl. *Maxwell,* Elektrizität und Magnetismus 1, p. 19.

Da ferner bei Einschaltung eines Zustandes $\bar{Z}(\bar{q}_s, \bar{\dot{q}}_s)$ auch

$$A = F(\bar{q}_s, \bar{\dot{q}}_s \mid q_s^0, \dot{q}_s^0) + F(q_s, \dot{q}_s \mid \bar{q}_s, \bar{\dot{q}}_s)$$

sein muss, so wird man allgemein haben

$$A = \Phi(q_s, \dot{q}_s) + \Psi(q_s^0, \dot{q}_s^0)$$

oder, wenn man bedenkt, dass

$$0 = \Phi(\dot{q}_s^0, \dot{q}_s^0) + \Psi(q_s^0, \dot{q}_s^0),$$

$$A = \Phi(q_s, \dot{q}_s) - \Phi(q_s^0, \dot{q}_s^0).$$

Nimmt man nun an, dass Φ in zwei Teile zerfällt, von denen der eine nur die q_s enthält, der andere eine homogene quadratische Funktion der $\dot{q}_s$ ist, deren Koeffizienten von den q_s abhängen können, so wird

$$-\Phi = V(q_s) + T(q_s, \dot{q}_s),$$

also ist

$$-A = V - V_0 + T - T_0,$$

wobei A durch ein gewöhnliches Arbeitsintegral oder durch eine Summe von in mechanischem Masse ausdrückbaren thermischen, elektrischen, chemischen, $\cdots$ Arbeiten auszudrücken sein wird. So wird denn

$$-\bar{d}A = dV + dT$$ [307]

oder, wenn man die linke Seite, die kein vollständiges Differential in Bezug auf die q_s zu sein braucht, durch

$$\sum_1^m P_s dq_s + \sum_{m+1}^k E_s Q_s dq_s$$

bezeichnet, (der erste Teil bezieht sich auf die mechanischen Kräfte, der zweite auf die mit geeigneten Aquivalentzahlen ausgedrückten anderen Beträge)

$$dV + dT - \sum_1^m P_s dq_s - \sum_{m+1}^k E_s Q_s dq_s = 0$$

der Ausdruck des allgemeinen Satzes von der Erhaltung der Energie.

Definiert man nun

$$\delta P = \sum P_s \delta q_s$$

$$\delta Q = \sum Q_s E_s \delta q_s,$$

so kann man endlich als Grundformel für alle mechanischen Vorgänge das *erweiterte Hamilton'sche Prinzip*

$$\delta \int (T - V + P + Q)\, dt = 0$$

ansehen.

---

307) Diese zweckmässige Bezeichnung unvollständiger Differentiale *C. Neumann*'s (Leipz. Ber. 46 (1894), p. 1) auch bei *W. Voigt*, Kompendium 1, p. 22.

Es ist im Vorigen versucht worden[308]), mit Hülfe des Axioms von der Unmöglichkeit des perpetuum mobile die allgemeinen Gesichtspunkte der Energetik darzustellen. Diesen Weg hat *Helmholtz*[309]) bereits 1847 in seiner bekannten Abhandlung betreten, mit der Bemerkung, dass das Energieprinzip mit dem Satze von der Erhaltung der lebendigen Kraft zusammenfällt, wenn man alle Vorgänge auf reine Fernkräfte zurückführt[310]).

48. Das Virial und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik. Aus den Gleichungen von *Lagrange* Nr. 37 erhält man durch Multiplikation mit x, y, z und Summation für ein freies System (d. h. ein solches, in dem alle Bedingungen durch Kräfte ersetzt sind) und für r als Entfernung der Punkte vom Anfang der Koordinaten

$$(1) \qquad \frac{dR}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum m_i \ddot{r}_i^2 = T + \frac{1}{2}\sum(Xx + Yy + Zz).$$

Nimmt man nun an, dass nach Ablauf der Zeit t_0 bis t die linke Seite ungeändert geblieben ist, so wird

$$T - T_0 = \mathrm{V} - \mathrm{V}_0,$$

wenn man mit

$$\mathrm{V} = -\frac{1}{2}\sum(Xx + Yy + Zz)$$

das *Virial* der Kräfte bezeichnet[311]). Dieser sehr spezielle Satz lässt

---

308) Man vgl. *P. Duhem*, Commentaire aux principes de la thermodynamique, J. de math. (4) 8, p. 269; 9, p. 293; 10, p. 207 (1892/94); desgl. Traité de mécanique chimique 1, p. 25; desgleichen in Betreff einer schärferen Anwendung des Perpetuum mobile-Axioms als bei *Helmholtz*, *M. Planck*, Energie, p. 140; *L. Natanson*, Über die Gesetze nicht umkehrbarer Vorgänge, Zeitschr. f. phys. Chemie 21 (1896), p. 193.

309) Dasselbe Argument benutzt übrigens schon 1837 *G. Green* in der Abhandlung über die Arbeit der elastischen Kräfte: „Indeed if $\delta\varphi$ were not an exact differential a *perpetual motion* would be possible and we have every reason to think, that the forces of nature are so disposed, as to render this an natural impossibility" (*Green*, Papers, p. 248).

310) In dieser, von *Clausius*, Ann. Phys. Chem. 91 (1854), p. 604 bereits bestrittenen, von *Planck* (Energie, p. 187) als misslich bezeichneten, gegenwärtig wohl ziemlich allgemein aufgegebenen dogmatischen Weise formuliert z. B. *H. Klein* die „Deduktion des Satzes von der Erhaltung der Kraft", Schul-Progr. Dresden 1889, Nr. 508.

311) *R. Clausius*, Ann. Phys. Chem. 141 (1870), p. 124; Jubelband 1874, p. 411; *Y. Villarceau*, Sur un nouveau principe de mécanique, Paris C. R. 75 (1872), p. 232, 377. Über das Virial in *Jacobi*'s Dynamik, p. 22, vgl. *R. Lipschitz*, Bull. sciences math. 3 (1872), p. 349; in der Statik tritt das Virial schon 1837 bei *Möbius* als *Sicherheitsfunktion* auf (Statik 1, p. 230); später bei *F. Schweins*, J. f. Math. 38 (1849), p. 77 u. 47 (1854), p. 238, als Fliehmoment in Analogie zu den gewöhnlichen Momenten.

sich nach *Clausius* verallgemeinern, wenn man (1) nach der Zeit integriert,

$$R - R_0 = \int_{t_0}^{t_1} T dt - \int_{t_0}^{t_1} V dt,$$

woraus, wenn die linke Seite in verhältnismässig engen Grenzen schwankt, bei hinreichend grossem $t_1 - t_0$ für die Mittelwerte T_m, V_m von T, V folgt

$$T_m = V_m,$$

d. h. *die mittlere lebendige Kraft ist gleich dem (mittlern) Virial.*

Das Virial rückt die Betrachtung *mittlerer Zustände* eines Systems in den Vordergrund, wie sie namentlich in der kinetischen Theorie der Gase und den sich anschliessenden Untersuchungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung über die periodische Wiederkehr gewisser Zustände zum Ausdruck kommen. Wir verfolgen dieselben hier nur soweit, als sie mit dem *zweiten Hauptsatz der Thermodynamik* in seiner einfachsten Form in Verbindung stehen.

Setzt man bei allgemeinen Koordinaten q_s

$$T + U = H,$$

so ist

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} H dt = \left| H \delta t + \sum \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_s} (\delta q_s - \dot{q}_s \delta t) \right|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{\partial U}{\partial c_k} \delta c_k dt,$$

falls auch die Parameter der potentiellen Energie, welche beim *Hamilton*'schen Integral nicht variiert werden, eine durch δc bezeichnete Änderung erfahren. Bezeichnet man das letzte Integral durch W, so wird für die Gesamtenergie $T - U = E$ bei von der Zeit unabhängigen Bedingungen

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2 T dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} E dt - \left| E dt \right|_{t_0}^{t_1} + \left| \sum \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right|_{t_0}^{t_1} + W,$$

wenn T eine homogene Funktion zweiten Grades der $\dot{q}_s$ ist. Ist nun das System in einer solchen Bewegung, dass zur Zeit t_0 und t_1 die Punkte dieselben Lagen und Geschwindigkeiten annehmen[312]), so wird

312) Die sehr speziellen Annahmen des Textes in erweiterter Form bei *Clausius*, Über die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Prinzipien, Ann. Phys. Chem. 142 (1871), p. 433; Suppl. 7 (1876), p. 215; über einen neuen mechanischen Satz, Ann. Phys. Chem. 150 (1873), p. 106; über den Zusammenhang des zweiten Hauptsatzes . . mit dem *Hamilton*'schen Prinzip, Ann. Phys. Chem. 146 (1872), p. 585

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2\, T dt = (t_1 - t_0)\, \delta E + W,$$

also, wenn man das Integral durch seinen Wert $2\, T_m (t_1 - t_0)$ ersetzt:

$$2\, \delta\, [T_m (t_1 - t_0)] = (t_1 - t_0)\, \delta E + W.$$

Insbesondere folgt für $W = 0$

$$\frac{2\, \delta\, [T_m (t_1 - t_0)]}{T_m (t_1 - t_0)} = \frac{\delta E}{T_m}.$$

Wird daher eine Reihe von Bewegungszuständen durchlaufen, die einen *vollkommenen Kreisprozess* bilden, so dass schliesslich der ursprüngliche Bewegungszustand wieder entsteht, so wird

$$\int \frac{\delta E}{T_m} = 0,$$

was dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik für vollkommene Kreisprozesse entspricht, wenn T_m durch die absolute Temperatur T, δE durch die zugeführte Wärmemenge dQ ersetzt wird[313]).

Für die *Energie* E und die *Entropie* S

$$S = \int \frac{dQ}{T}$$

gelten nun auch die beiden, dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten nachgebildeten Fundamentalsätze von *Gibbs*[314]):

Zum Gleichgewicht eines materiellen von äusseren Einflüssen abgesonderten Systems ist notwendig und hinreichend, dass für alle möglichen Änderungen in seinem Zustande, die seine Energie ungeändert lassen, die Änderung der Entropie

$$\delta S \overline{\lessgtr} 0,$$

sowie dass bei ungeändertem S die Änderung der Energie

$$\delta E \overline{\gtrless} 0$$

sei.

Auf die weitere Fortbildung des Energie- und Entropiebegriffes, z. B. die Unterscheidung zwischen freier und gebundener Energie, kann hier nur hingewiesen werden; man sehe darüber Band V.

49. Die Lokalisierung der Energie. Es liegt nahe, die Energie eines Systems als eine primitive Qualität desselben anzusehen, welche

---

vgl. auch *C. Szily*, Das dynamische Prinzip von *Hamilton* in der Thermodynamik, Ann. Phys. Chem. 149 (1873), p. 74.

313) *Boltzmann*, Über die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes in der Wärmetheorie, Wien. Ber. 53 (1866), p. 195.

314) *J. W. Gibbs*, Thermodynamische Studien, p. 66.

ausser den Raum- und Zeitgrössen *allein* den mechanischen Arbeitswert des Systems ausdrückt. Die hierauf bezüglichen Ideen *Rankine's* hat *Ostwald*[315]) zu einem *System der Energetik* entwickelt, dessen Aufgabe darin besteht, die verschiedenen Formen der Energie nach ihren „Kapazitäts“- und „Intensitäts“-faktoren zu unterscheiden und zugleich die Grundregeln ihrer Umwandlungen anzugeben. Die Menge der Energie in einem unabhängigen System ist unveränderlich, und von allen Umwandlungen soll diejenige eintreten, die in dem grössten Umsatze an potentieller Energie in einer gegebenen Zeit besteht.

Diese Ideen, welche durch interessante, zum Teil allerdings auch mehr formale Analogieen eine Menge verschiedener Erscheinungen unter allgemeine Gesichtspunkte subsumieren, werden zwar gegenwärtig von verschiedenen Seiten vielfach bestritten[316]), erscheinen aber doch in ihrer Gesamtheit von nicht zu unterschätzendem induktiven Werte, und dürften noch manche weiteren Aufschlüsse über den inneren Zusammenhang der gegenwärtigen Naturerkenntnis gewähren[317]). Als einen Beleg hierfür wollen wir nur diejenige Vorstellung hervorheben, welche sich auf die *Wanderung der Energie* bezieht.

In einem kontinuierlichen Medium, in dem irgendwelche Prozesse stattfinden, wird in jedem Augenblicke an jeder Stelle ein gewisses von x, y, z, t abhängiges[318]) Energiequantum vorhanden sein. Man kann dann auch von einer Änderung der Energie in dem Sinne handeln, der den *Euler*'schen Differentialgleichungen der Hydrodyna-

---

315) *W. Ostwald,* Die Energie und ihre Wandlungen, Leipz. Antrittsrede 1888; Studien zur Energetik, Leipz. Ber. 43 (1891), p. 271; 44 (1892), p. 211; desgl. Lehrbuch der allgemeinen Chemie, Leipzig 1893, 2^1, p. 1—39.

316) *L. Boltzmann,* Über d. Entwicklung der Methoden d. theoretischen Physik, Deutsche Math.-Ver. 8 (1900), p. 71, insb. p. 87; Ein Wort der Mathematik an die Energetik, Ann. Phys. Chem. (2) 57 (1896), p. 39; *M. Planck,* Gegen d. neuere Energetik, Ann. Phys. Chem. (2) 57 (1896), p. 72; *L. Dressel,* Zur Orientierung in der Energielehre, Natur und Offenbarung 39, Münster 1893; p. 321, 390, 449.

317) Vgl. ausser *Ostwald,* Lehrbuch der allgemeinen Chemie, der Mécanique chimique von *Duhem, J. H. van't Hoff*'s Vorlesungen über theoretische und physikalische Chemie, Braunschweig 1898/99 (auch französisch von *Corvisy,* 3 Bde., Paris 1899/1900), auch die Energetik von *Helm.* Das in der deutschen Litteratur hervortretende Bestreben (vgl. z. B. *H Januschke*, Das Prinzip d. Erhaltung d. Energie, Leipzig 1897), an Stelle der klaren Einsicht, welche die exakte Mechanik gewährt, eine summarische Behandlung möglichst vielseitiger Fragen durch Anwendung des Energiebegriffes treten zu lassen, scheint zur Zeit noch verfrüht.

318) Vgl. *O. Lodge,* On the identity of energy, Phil. Mag. (5) 19 (1885), p. 482.

mik entspricht; so erhält man die Vorstellung von einer *Strömung oder Wanderung der lokalisierten Energie*, mit der noch die *Lagrange*'sche Auffassung der Flüssigkeitsbewegungen zu verbinden ist, welche nicht den Bewegungszustand an einer beliebigen Stelle, sondern die Bewegung jedes einzelnen Teilchens untersucht, wenn man auch die *Bahnen dieser Strömung* bestimmen will[319]). Derartige Vorstellungen sind übrigens nicht neu. Schon *Coriolis*[320]) vergleicht die kinetische Energie in einer Maschine mit einer Flüssigkeit, welche in derselben strömt und ähnliche Vorstellungen mögen sich auch sonst noch mehrfach finden; in bestimmterer Form sind sie aber erst in den letzten 25 Jahren aufgetreten.

In ganz allgemeiner Weise hat schon 1874 *N. Umow*[321]) das Problem der Wanderung der Energie in den flüssigen und elastischen Medien entwickelt. In hervorragendem Masse aber lenkte sich die Aufmerksamkeit auf diese Anschauung erst, als *Poynting*[322]) die Strömung der elektromagnetischen Energie auf Grund der *Maxwell*schen Formeln als durch ganz einfache Gesetze geregelt darstellte.

Die *Gleichung der Kontinuität* für jedes stetige Medium, dessen mit der Dichtigkeit ϱ verbreitete Masse als unveränderlich gedacht wird, lautet bekanntlich

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v}{\partial y} + \frac{\partial \varrho w}{\partial z} = 0,$$

wo u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung sind. Umgekehrt kann man in jeder Gleichung

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ als Strömungs- und U/E; V/E; W/E als Geschwindigkeitskomponenten bezeichnen.

---

319) Diese Analogie hat sich bisher nur in einzelnen Fällen durchführen lassen.

320) *Coriolis*, Traité de mécanique, p. 117: Ce fluide pourrait en outre s'accumuler dans certains corps et y rester en réserve . . ce travail en réserve, que nous assimilons à un fluide, est ce que nous avons appelé la force vive; p. 171: On peut comparer la transmission du travail par la machine à l'écoulement d'un fluide u. s. w.

321) *N. Umow*, Ableitung d. Bewegungsgleichungen der Energie in kontinuierlichen Medien, Zeitschr. f. Math. Phys. 19 (1874), p. 419.

322) *J. H. Poynting*, On the transfer of Energy in the electromagnetic field, Lond. Phil. Trans. 175 (1884), p. 343; vgl. *O. Heaviside*, Electrician 14 (1885), p. 178, 306; desgl. On the forces, stresses and fluxes of energy in the electromagnetic field, Lond. Phil. Trans. 183 (1892), p. 423; *W. Wien*, Über d. Begriff d. Lokalisierung d. Energie, Ann. Phys. Chem. (2) 45 (1892), p. 684.

Aus den Bewegungsgleichungen des elastischen, bez. flüssigen Mediums

$$(2)\qquad \begin{aligned} \varrho\ddot{x} &= \varrho X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ \varrho\ddot{y} &= \varrho Y + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ \varrho\ddot{z} &= \varrho Z + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \end{aligned}$$

und den *Euler*'schen Gleichungen für

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt},$$

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

folgt ferner durch Multiplikation der Gleichungen (2) mit $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$

$$(4)\qquad \frac{\varrho}{2}\frac{dq}{dt} = \varrho(Xu + Yv + Zw) - \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) + \Phi,$$

wenn

$$\begin{aligned} q &= u^2 + v^2 + w^2, \\ A &= X_x u + Y_x v + Z_x w, \\ B &= X_y u + Y_y v + Z_y w, \\ C &= X_z u + Y_z v + Z_z w, \end{aligned}$$

und endlich zur Abkürzung $-\Phi$ für den Ausdruck:

$$X_x\frac{\partial u}{\partial x} + Y_x\frac{\partial v}{\partial x} + Z_x\frac{\partial w}{\partial x} + X_y\frac{\partial u}{\partial y} + Y_y\frac{\partial v}{\partial y} + Z_y\frac{\partial w}{\partial y} + X_z\frac{\partial u}{\partial z} + Y_z\frac{\partial v}{\partial z} + Z_z\frac{\partial w}{\partial z}$$

gesetzt wird. Auch folgt nach (3) hieraus

$$(4)\qquad \frac{1}{2}\varrho\frac{\partial q}{\partial t} = \varrho(Xu + Yv + Zw) - \left\{\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\varrho}{2}\left(u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y} + w\frac{\partial q}{\partial z}\right)\right\} + \Phi$$

oder mit Hilfe der Gleichung der Kontinuität

$$(5)\qquad \begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{\partial(\varrho q)}{\partial t} &= \varrho(Xu + Yv + Zw) \\ &- \frac{\partial}{\partial x}\left(A + \frac{\varrho}{2}uq\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(B + \frac{\varrho}{2}vq\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(C + \frac{\varrho}{2}wq\right) + \Phi. \end{aligned}$$

Nimmt man noch der Übersichtlichkeit halber konservative Kräfte X, Y, Z an, d. h. setzt man

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

so folgt aus (5)

$$\begin{aligned}(6) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial(\varrho q)}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} V = & -\frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho u V + A + \frac{\varrho}{2} u q\right) \\ & -\frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho v V + B + \frac{\varrho}{2} v q\right) \\ & -\frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho w V + C + \frac{\varrho}{2} w q\right) + \Phi.\end{aligned}$$

Lässt sich nun unter Anwendung der *Green*'schen partiellen Integration zeigen, dafs — Φ der partielle Differentialquotient nach t von der Dichtigkeit S der *Deformationsenergie* ist[322a]), so erhält man aus (6)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\varrho q^2 + \varrho V + S\right] + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} = 0$$

oder, wenn man ausserdem annimmt, dass die potentielle Energie V nur von äusseren Kräften, nicht aber von den Fernewirkungen der Massen des Systemes auf einander herrührt, so dass nun

$$\frac{1}{2}\varrho q^2 + \varrho V + S$$

als die dem Volumelemente zukommende Dichtigkeit E der totalen Energie angesehen werden kann,

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} = 0.$$

Daher werden nun die Geschwindigkeitskomponenten der strömenden Energie

$$\frac{1}{E}\left(\varrho u V + A + \frac{1}{2}\varrho u q\right),$$

$$\frac{1}{E}\left(\varrho v V + B + \frac{1}{2}\varrho v q\right),$$

$$\frac{1}{E}\left(\varrho w V + C + \frac{1}{2}\varrho w q\right).$$

322a) Siehe Fussn. 309. *W. Thomson* hat übrigens schon 1857 (Quart. J. of math. 1 (1857), p. 57) unter Anwendung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie gezeigt, dass die elastischen Kräfte jedenfalls dann eine Kräftefunktion besitzen, wenn die Temperatur des Mediums entweder konstant bleibt oder adiabatisch geändert wird, während darüber hinaus im allgemeinen nichts behauptet werden kann; vgl. *Love*, Elasticity 1, p. 117. Im Texte ist von thermodynamischen Einwirkungen überhaupt abgesehen, bez. konstante Temperatur vorausgesetzt worden; die erweiterte Frage scheint bisher nicht in Betracht gezogen zu sein.

Bei einer reibungslosen Flüssigkeit tritt der Druck p an Stelle der X_x, Y_y, Z_z, die A, B, C werden daher ebenfalls den u, v, w proportional und die Strömung geschieht in der Bewegungsrichtung der Flüssigkeit[323]). — Als nun *Poynting* ähnliche Formeln für die elektromagnetische Energie entwickelte, ergab sich der *Poynting*'sche Satz, dafs im elektromagnetischem Felde die Energie mit einer gewissen Intensität senkrecht zur Ebene der Linien magnetischer und elektrischer Kraft strömt[324]); bei einem von einem Strom durchflossenen Leiter strömt dieselbe daher von aufsen in denselben ein, um dort als Wärme aufzutreten[325]).

Allerdings besteht noch eine Schwierigkeit in Bezug auf den realen Sinn, den man diesen Vorstellungen unterlegen soll. Denn wie aus der obigen Darstellung hervorgeht, können zu den Komponenten noch beliebige Funktionen u_1, v_1, w_1 hinzugefügt werden, welche der Gleichung

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0$$

genügen, d. h. Strömungskomponenten einer inkompressiblen Flüssigkeit sind. Es scheint daher die ganze Ansicht nur den Wert einer Vorstellung zu haben, welche noch vielfacher Abänderung fähig ist, so lange man nicht im Stande ist, in vollkommen scharfer Weise einen *wahren* Energiestrom von den unzähligen fingierten zu unterscheiden; wir lassen es dahingestellt, ob es zur Zeit möglich ist, eine solche Entscheidung, deren Möglichkeit von *Heaviside* und *Föppl* bestritten wird, zu treffen[326]).

Die vorstehenden Betrachtungen beziehen sich auf *kontinuierliche* Massen. Neuerdings hat *Volterra*[327]) vermöge einer Ausdehnung der *Maxwell*'schen Gleichungen in mehreren Arbeiten diese Vorstellungen auf *diskrete* Massen, zwischen denen auch Fernewirkungen auftreten, ausgedehnt. Auch hier ergeben sich analoge Werte für die U, V, W,

---

323) Für Flüssigkeiten mit Reibung bei *Umow*, Fussn. 321; *Wien*, Fussn. 322, p. 698.

324) *Poynting*, Fussn. 322, p. 349; über ähnliche Vorstellungen in der Mechanik *A. Föppl*, Technische Mechanik, p. 213 ff.

325) Nach *G. Mie*, Ein Beispiel zum Poynting'schen Theorem, Zeitschr. f. Phys. Chem. 34 (1900), p. 522 ist die Bewegungsrichtung des Energiestromes in unmittelbarer Nähe des Drahtes demselben nahezu parallel.

326) Vgl. *Föppl*, Einführung, p. 293; nach *G. Mie*, Entwurf einer allgemeinen Theorie der Energieübertragung, Wien. Ber. 107 (1898), p. 1113 ist dieselbe möglich.

327) *V. Volterra*, Sul flusso di energia meccanica, Torino, Atti dell' Accad. 34 (1899), desgl. Nuovo Cimento (4) 10 (1899).

da der Einfluss der Unstetigkeitsflächen, an denen sprungweise Änderungen der Dichtigkeit und der Geschwindigkeiten stattfinden, herausfällt; es wird aber dabei erforderlich, der Energie auch *negative* Werte beizulegen, was sich mit den gebräuchlichen physikalischen Voraussetzungen schwer vereinigen lässt.

50. Energetische Begründung der Mechanik. Wir erwähnen noch die Bestrebungen, aus dem Energieprinzip — zunächst in der einfachen Form

$$T + V = c —$$

die Differentialgleichungen der Bewegung zu gewinnen.

Wird bei einem völlig freien, nur konservativen Kräften unterworfenen System

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

gesetzt, und setzt man *voraus*, dass die Beschleunigungen *unabhängig* von den Geschwindigkeiten *und* der Konstanten c sein sollen, so hat man

$$0 = \sum \left[m_i (\dot{x}_i \ddot{x}_i + \dot{y}_i \ddot{y} + \dot{z}_i \ddot{z}_i) + \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \dot{z}_i \right].$$

Soll diese Gleichung für *alle* Werte der $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ bestehen, so folgt in der That:

$$m \ddot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad \text{etc.}$$

Ein ähnlicher Schluss lässt sich aber schon dann nicht mehr machen, wenn Bedingungsgleichungen zwischen x, y, z bestehen, wie bereits *R. Lipschitz*[328]) bemerkte. *Helm*[329]) suchte daher den Variationsprozess zu Hülfe zu nehmen, indem er dem Energieprinzip die Form gab: Die Änderung der totalen Energie nach jeder möglichen Richtung ist gleich Null. Aber unter dieser Änderung kann man nur den Energiezuwachs verstehen, welcher einer Variation der Koordinaten x, y, z um $\delta x, \delta y, \delta z$ entspricht. Dabei ist nun in der That

$$\delta V = \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z_i \right),$$

aber die Änderung der kinetischen Energie ist

328) Siehe *Helmholtz*, Über die Erhaltung der Kraft, *Ostwald*, K. B. Nr. 1 p. 55, auch Wiss. Abh. 1 (1882), p. 12.

329) So *J. Boussinesq*, Recherches sur les principes de la mécanique, 1872; J. de math. (2) 18 (1873), p. 315; Leçons p. 24. Vgl. auch die Bemerkungen von *C. Neumann* (*Helm*, Energetik, p. 229).

$$\sum m\left(\dot{x}\frac{\delta dx}{dt}+\dot{y}\frac{\delta dy}{dt}+\dot{z}\frac{\delta dz}{dt}\right)=d\sum m\left(\dot{x}\frac{\delta x}{dt}+\dot{y}\frac{\delta y}{dt}+\dot{z}\frac{\delta z}{dt}\right)$$
$$-\sum m(\ddot{x}\delta x+\ddot{y}\delta y+\ddot{z}\delta z)$$

und keineswegs gleich

$$\sum m(\ddot{x}\delta x+\ddot{y}\delta y+\ddot{z}\delta z),$$

welcher Ausdruck nur durch eine unzulässige, nicht für beide Teile der Energie gestattete Vertauschung der dx, dy, dz mit den $\delta x, \delta y, \delta z$ erhalten werden kann [330]). Definiert man aber als mögliche Energieänderung von vornherein diesen Ausdruck selbst, so hat man einen willkürlichen Formalismus, der nur zu dem Zwecke ersonnen wird, die Äquivalenz des Energieprinzipes mit dem *d'Alembert*'schen behaupten zu können.

Nach einer ganz anderen Richtung, nämlich auf die Begründung einer physikalischen Mechanik vom energetischen Standpunkt aus, zielen die wiederholt erwähnten Untersuchungen *P. Duhem*'s, der, unter sorgfältiger Hervorhebung der hypothetischen „Konventionen", eine abstrakte Begründung der Mechanik materieller Systeme insbesondere in Rücksicht auf den thermodynamischen Arbeitsbegriff zu geben sucht. Doch ist gegenwärtig noch nicht zu entscheiden, in welchem Maasse dieselben Einfluss auf die systematische Darstellung der Grundlagen der theoretischen Mechanik finden werden.

51. Schlussbemerkung. Die allgemeinen mathematischen Prinzipien der Mechanik erweisen sich so überall als Sätze und Methoden,

---

330) *G. Helm,* Zeitschr. f. Math. Phys. 35 (1890), p. 307; Energetik, p. 232; auch Ann. Phys. Chem. (2) 57 (1896), p. 646. Vgl. *Boltzmann,* ibid. p. 39.

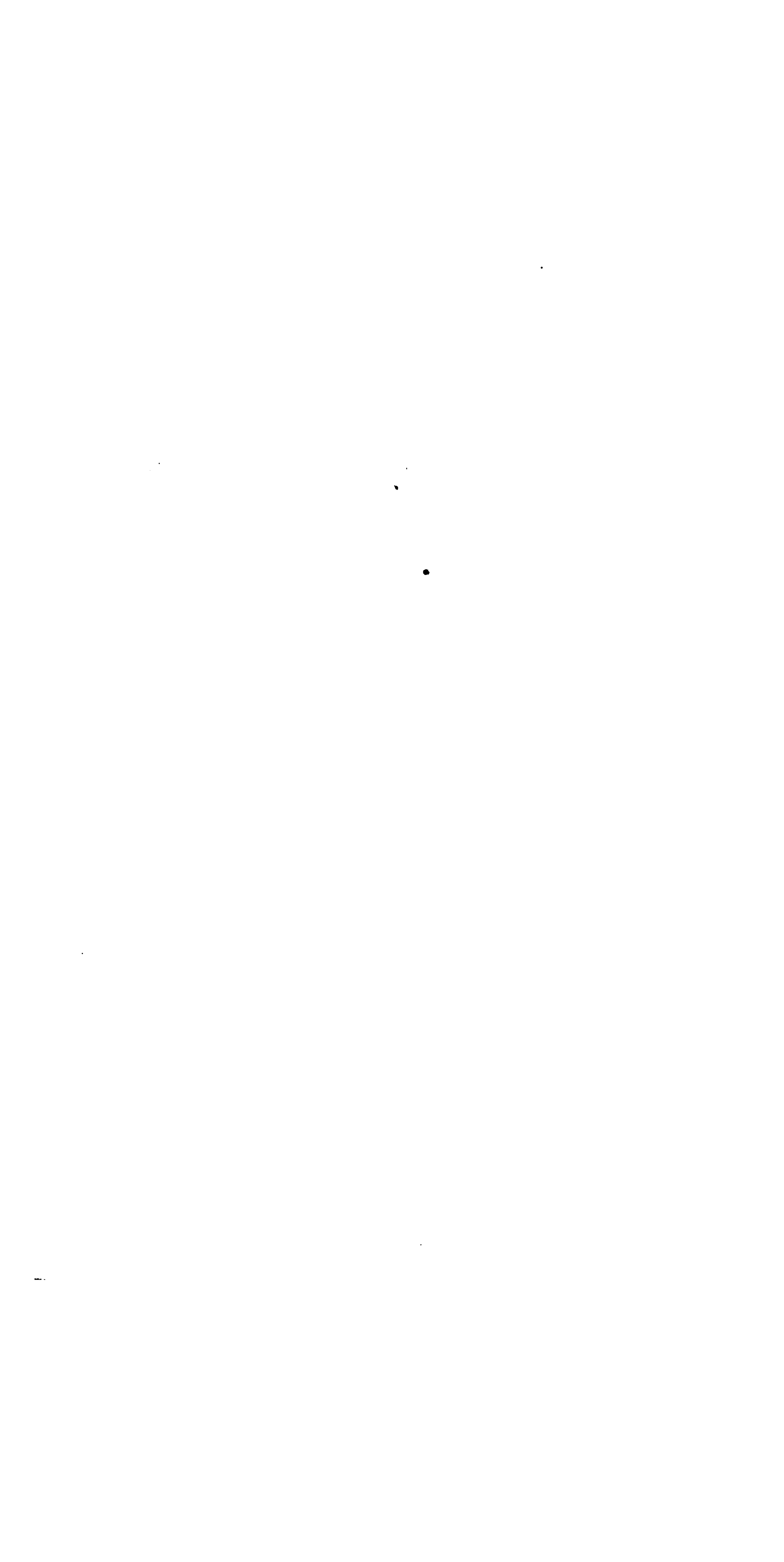
331) Eine in ähnlicher Absicht von *E. Padova,* Sulle equazioni della dinamica, Ist. Veneto (7) 5 (1893), p. 1641 ausgeführte Betrachtung scheint ebenfalls nicht einwandsfrei zu sein. Auf die im Texte besprochene Frage ist ausführlicher eingegangen, weil dieselbe zu einer nicht völlig entschiedenen Diskussion zwischen *Helm*, *Boltzmann* u. *Planck* Veranlassung gegeben hat [Ann. Phys. Chem. (2) 57 (1896)]. Ähnliche Gesichtspunkte sind übrigens auch von anderen Autoren ausgesprochen; so formuliert *Planck* ein Superpositionsprinzip der Energie, durch welches freilich das Energieprinzip formal mit dem *d'Alembert*'schen in Übereinstimmung gebracht wird; während *J. R. Schütz* (Gött. Nachr. 1897, p. 110) ein „Prinzip der absoluten Energieerhaltung" annehmen will, welches aber nur für *einen* materiellen Punkt das Verlangte leistet. Variiert man indessen auch die *Zeit,* so kann man leicht einen Variationsprozess definieren, bei dem die Variation der totalen Energie in die *d'Alembert*'sche Grundformel übergeht; der einfache Charakter des Energiegesetzes geht dabei aber völlig verloren, und die Herleitung gelingt nur, wenn man das zu Beweisende schon rückwärts in die Definition hinein verlegt. Vgl. *A. Voss,* Bemerkungen über die Prinzipe der Mechanik, Münch. Ber. 1901, p. 170.

welche in ihrer einfachsten Gestalt wohl auf den Grundanschauungen über den mechanischen, d. h. durch mathematische Begriffe ausgedrückten, *Zusammenhang der Erscheinungen beruhen, aber in ihrer weiteren Ausdehnung als induktive, heuristische Aussagen auftreten,* deren Gültigkeit sich erst durch ihre Anwendungsfähigkeit erprobt. Ist sonach auch das Ideal eines rein deduktiven Lehrgebäudes, wie es der Mechanik des 18. Jahrhunderts vorschwebte, wie es *Hertz* in ganz abstrakter Weise zu geben unternahm, in Wirklichkeit bisher nicht erreicht, so bietet dafür der heutige Standpunkt der Theorie die Möglichkeit, dass die fortschreitende Erkenntnis der Thatsachen nicht durch willkürliche, einem beschränkten Kreise von Thatsachen entnommene deduktive Prinzipien gehemmt wird. Dieser Standpunkt ist der schon von *Galilei* eingenommene, für die mathematische Naturbeschreibung charakteristische, welcher weder nach den unerkennbaren Ursachen fragt, noch von vornherein davon ausgeht, alle Erscheinungen dem Zwange einer oder einiger weniger fundamentalen physikalischen Hypothesen unterwerfen zu wollen, sondern unter der Voraussetzung, dass überhaupt ein zusammenhängendes widerspruchsloses Verständnis der Wirklichkeit möglich sei, zunächst die Formen aufsucht, welche zur Beschreibung der einfachsten Vorgänge ausreichen, und sich die Erweiterung und Korrektion derselben in dem Maasse vorbehält, als das Erfahrungsgebiet sich erweitert.

Namenverzeichnis*).

*) Ein * bedeutet, dass der betreffende Autor im Litteraturverzeichnis angeführt ist; die fettgedruckten Zahlen beziehen sich auf die Nummern der Artikel, die übrigen auf die Fussnoten.

(Abgeschlossen im Juli 1901.)



B. MECHANIK DER PUNKTE UND STARREN SYSTEME.



IV 2. GEOMETRISCHE GRUNDLEGUNG DER MECHANIK EINES STARREN KÖRPERS.

VON

H. E. TIMERDING

IN ELSFLETH (OLDENBURG).

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

1) Werke geometrischen Inhaltes.

H. Grassmann, Die lineale *Ausdehnungslehre**), Leipzig 1844, 1878 = Ges. Werke, ersten Bandes erster Teil 1[1], Leipzig 1894. Ebenda ist auch die „geometrische Analyse" abgedruckt.

— Die lineale *Ausdehnungslehre* (Neubearbeitung) 1862 = Ges. Werke, ersten Bandes zweiter Teil 1[2], Leipzig 1896.

Sir *W. R. Hamilton, Lectures on Quaternions,* London 1853.

— *Elements of Quaternions,* 1. ed., London 1866; 2. ed. in 2 Bänden, London 1899, 1901. (Deutsch von *P. Glan,* Leipzig 1882/84.)

J. Plücker, Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, Leipzig 1868—69. (In 2 Teilen, 2. Teil herausgegeben von *F. Klein.*)

---

*) In der durch cursiven Druck hervorgehobenen Abkürzung ist das betreffende Werk im folgenden citiert.

E. Study, Geometrie der *Dynamen*, Leipzig, 1. Lfg. 1901.
A. N. Whitehead, Universal Algebra, vol. 1, Cambridge 1898.

2) Lehrbücher der Statik und der Schraubentheorie.

P. Appell, Traité de *mécanique* rationelle, t. 1, Paris 1893.
Sir *R. S. Ball*, The theory of screws. A study in the dynamics of a rigid body, Dublin 1876.
— A treatise on the *theory of screws*, Cambridge 1900.
E. Budde, Allgemeine *Mechanik* der Punkte und starren Systeme, 2 Bde., Berlin 1890.
J. M. C. Duhamel, Cours de *mécanique*, 1. éd., Paris 1845.
H. Gravelius, Theoretische Mechanik starrer Systeme. Auf Grund der Methoden und Arbeiten von Sir *R. S. Ball*, Berlin 1889.
L. Henneberg, Statik der starren Körper, Darmstadt 1886.
F. Minding, Handbuch der theoretischen Mechanik, Berlin 1837.
A. F. Moebius, Lehrbuch der *Statik*, Leipzig 1837 = Werke, Bd. 3, Leipzig 1885.
F. N. M. Moigno, Leçons de *mécanique* analytique, Paris 1868.
G. Monge, Traité élémentaire de *statique*, 1. éd., Paris 1786.
J. Petersen, Lehrbuch der *Statik* fester Körper, Kopenhagen 1882.
L. Poinsot, Éléments de *statique*, 1. éd., Paris 1804. Seitdem zahlreiche Auflagen. (Deutsch u. a. von *J. H. Lambrecht*, Giessen 1828.)
— Théorie nouvelle de la rotation des corps, Paris 1834. (Deutsch von *K. Schellbach*, Berlin 1851.)
R. de Prony, *Leçons de mécanique* analytique, Paris 1815.
E. J. Routh, A treatise on *analytical statics*, 2 Bde., Cambridge, 2. Aufl. Bd. I 1896, Bd. II 1902.
W. Schell, *Theorie der Bewegung* und der Kräfte, 1. Aufl., Leipzig 1870; 2. Aufl. ebenda 1879—80.
J. Somoff, Theoretische Mechanik, übersetzt von *A. Ziwet*. 1. Bd.: Kinematik; 2. Bd.: Statik, Leipzig 1879.
S. Stevin, de Beghinselen der Weegkonst, Leyden 1586, vgl. auch Oeuvres mathématiques (Vol. 4: De la statique), Leyden 1636.
P. Varignon, Projet d'une nouvelle mécanique, Paris 1687.

3) Kürzere Referate über die Ball'sche Schraubentheorie.

Sir *R. S. Ball*, A dynamical parable*), Nature 36 (1887), British Ass. Rep. 1887. Wiederabgedruckt im Anhange des Treatise on the theory of screws.
W. Fiedler, Geometrie und Geomechanik, Zürich, Vierteljahrsschrift der naturf. Gesellschaft 21 (1876).
J. B. Goebel, Die wichtigsten Sätze der neueren Statik, Diss. Zürich 1877.
O. Henrici, The theory of screws, Nature 62 (1890), p. 127.
D. Padeletti, Osservazioni sulla teoria delle dinami, Napoli, Rend. 21 (1882).

Man vgl. übrigens die Zusammenstellung der Litteratur in *Ball's* Treatise.

---

*) Die Parabel besteht darin, dass die verschiedenen Methoden als Personen verkörpert auftreten. Hierbei wird der in England vielfach verbreiteten Geringschätzung der alten analytischen Methoden in der komischen Figur des Mr. Cartesian Ausdruck verliehen.

Vorbemerkung. Die folgende Darstellung hat den Zweck, die Grundlagen der Statik und Kinematik eines starren Körpers in ihrem organischen Zusammenhange mit der Geometrie zu entwickeln und so auf die Abschnitte, in denen die weitergehenden Resultate dieser Disziplinen enthalten sind, vorzubereiten. Es werden deswegen auch eine Reihe geometrischer Sätze anzuführen sein, die in den hier berührten Teilen der Mechanik Verwendung finden. Es geschieht dies jedoch nur in abgekürzter Form und mit derjenigen Einschränkung, die durch die Anwendung in der Mechanik bedingt ist; die ausführliche und systematische Darlegung dieser Sätze ist in Band III (Geometrie) zu suchen*). Ebenda ist auch die bezügliche Litteratur vollständig zusammengestellt. Im folgenden sind nur diejenigen Werke citiert, welche beim Studium der Mechanik unmittelbar in Betracht kommen dürften. Ebenso betreffen die Litteraturangaben zur Statik und Kinematik nur die im gegenwärtigen Artikel berührten Fragen. Ausführlichere Nachweise sind in den Artikeln IV 3 (*Schoenflies*) und IV 5 a (*Henneberg*) enthalten.

I. Geometrische Grundbegriffe.

1. Der Vektor. Ein *Vektor* (vgl. IV 14, *Abraham*) soll dadurch definiert sein, dass er die Lage eines Punktes P im Raume gegen einen anderen Punkt P_0 bestimmt[1]). Sind x, y, z die Koordinaten des Punktes P, x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Punktes P_0, so legen die drei Grössen

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0, \quad Z = z - z_0,$$

die sogenannten *Komponenten*, den Vektor fest. Dieser erscheint gleichsam als die Differenz[2]) der beiden Punkte P und P_0. Er kann durch die der Länge, Richtung und dem Sinne nach gegebene Strecke, die von

---

*) Insbesondere wird im Text nur ganz beiläufig auf imaginäre Raumelemente und die Verallgemeinerungen auf Nichteuklidische Geometrie eingegangen, ebenso bleibt die Verwendung höherer komplexer Zahlen ausgeschlossen.

1) *Hamilton*, Lectures on Quaternions, London 1853, Introduction.

2) *Hamilton*, Lectures, sowie *Grassmann*, Die lineale Ausdehnungslehre (1844), Werke 1^1, besonders aber die zweite Ausdehnungslehre (1862), Werke 1^2.

Grassmann rechnet in Anlehnung an *Moebius*' barycentrischen Kalkül direkt mit Punkten, indem er für einen beliebigen Punkt P den Ausdruck $P = O + xe_1 + ye_2 + ze_3$ ansetzt, wenn O den Koordinatenursprung, x, y, z die Koordinaten von P und e_1, e_2, e_3 Einheiten bedeuten. Dann wird $P - P_0 = (x - x_0)e_1 + (y - y_0)e_2 + (z - z_0)e_3$ ein Vektor oder, wie *Grassmann* sagt, eine *Strecke*. *Hamilton* hat diesen symbolischen Ausdruck für den Vektor auch, nur schreibt er i, j, k für e_1, e_2, e_3.

seinem Anfangspunkte P_0 nach seinem Endpunkte P hinführt, vollkommen dargestellt werden, und jede Grösse im Raume, der ausser einem zahlmässigen Betrage eine bestimmte Richtung und ein Sinn zukommt, kann, weil sie eine solche Darstellung zulässt, als ein Vektor betrachtet werden. Wenn man die einen Vektor darstellende Strecke parallel mit sich verschiebt, so bleiben die Komponenten X, Y, Z dieselben, der Vektor ändert sich also nicht. Jeder Vektor ist mithin ursprünglich ein *freier* Vektor, indem sein Anfangspunkt beliebig bleibt. Ist dieser Anfangspunkt aber im Raume festgelegt, so soll im folgenden von einem *gebundenen* Vektor gesprochen werden. Das Quadrat der *Länge* des Vektors, $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, ist die einzige Invariante[3]) des Vektors, indem jede Funktion seiner Komponenten, die von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist, sich als Funktion dieser Grösse R^2 darstellen lassen muss.

Die Komponenten X, Y, Z selbst bleiben wohl bei einer Parallelverschiebung des Koordinatenkreuzes ungeändert, bei Drehung desselben verändern sie sich aber wie die Punktkoordinaten, und bei Inversion, wenn die Punktkoordinaten ihr Vorzeichen wechseln, kehrt sich auch ihr Vorzeichen um. Drei Grössen, welche sich in dieser Weise verhalten, lassen sich andererseits immer als Komponenten eines (freien) Vektors interpretieren[4]).

2. Addition und Subtraktion der Vektoren. Hieraus folgt, dass wenn X, Y, Z und X', Y', Z' die Komponenten zweier Vektoren $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}'$ sind,

$$X + X', \quad Y + Y', \quad Z + Z'$$

wieder die Komponenten eines Vektors werden; derselbe wird als *Summe* der beiden ersten Vektoren bezeichnet. Analog sind

$$X - X', \quad Y - Y', \quad Z - Z'$$

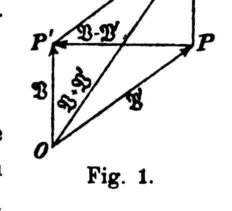


Fig. 1.

die Komponenten eines Vektors, welcher als die *Differenz* der beiden gegebenen Vektoren anzusehen ist. Stellt die Strecke von einem Punkte O nach einem Punkte P den ersten Vektor $\mathfrak{V}$ dar, eine Strecke OP' den zweiten Vektor $\mathfrak{V}'$, so wird die Summe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}'$ durch die Strecke OP''

---

3) Sowie im Texte durchgehends nur rechtwinklige Cartesische Koordinaten benutzt werden, bezieht sich der Ausdruck Invarianz daselbst immer nur auf den Wechsel solcher Koordinatensysteme.

4) Wegen dieser Art, geometrische Grössen durch ihr Verhalten bei Koordinatentransformation zu charakterisieren, vergl. *F. Klein*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 47 (1902), p. 237.

dargestellt, wenn P'' gegen P' dieselbe Lage hat wie P gegen O und damit P'' gegen P dieselbe Lage wie P' gegen O. $OPP''P'$ sind dann die Ecken eines Parallelogramms, PP'' ist dessen eine Diagonale, und die andere Diagonale $P'P$ repräsentiert die Differenz $\mathfrak{V} - \mathfrak{V}'$ der beiden gegebenen Vektoren $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}'$.[5])

3. Plangrössen. Projiziert man das in Rede stehende Parallelogramm auf die drei Koordinatenebenen, so werden die Flächeninhalte dieser drei Projektionen

$$L = YZ' - ZY', \qquad M = ZX' - XZ', \qquad N = XY' - YX'.$$

Ihre Verhältnisse legen die Stellung der Ebene des Parallelogrammes fest, indem die Richtungscosinus einer Normalen der Ebene sich zu einander verhalten wie diese Grössen L, M, N. Die Quadratwurzel aus $F^2 = L^2 + M^2 + N^2$ ist dem Flächeninhalte des Parallelogrammes gleich. Zu dem Parallelogramme gehört noch ein bestimmter durch die Vorzeichen der L, M, N gegebener Umlaufssinn, der geometrisch durch die Forderung fixiert werden kann, dass der erste Vektor $\mathfrak{V}$ vor dem zweiten Vektor $\mathfrak{V}'$ durchlaufen werden soll.

Wir gelangen auf diese Weise zu einer dem Vektor analogen Grösse, die geometrisch durch ein Parallelogramm von bestimmtem Inhalte und bestimmtem Umlaufssinne in einer Ebene von bestimmter Stellung veranschaulicht wird und hier mit einem von *Grassmann* herrührenden Ausdruck als eine *Plangrösse*[6]) bezeichnet werden soll und zwar als eine *freie* Plangrösse, indem wir von einer *gebundenen* Plangrösse sprechen, wenn das Parallelogramm einer völlig bestimmten Ebene angehören soll. Letzteres ist beispielsweise der Fall, wenn $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}'$ zwei gebundene Vektoren mit demselben Anfangspunkte sind. Die Projektionen L, M, N des Parallelogrammes auf die Koordinatenebenen sind die *Komponenten* der Plangrösse. Wird nun

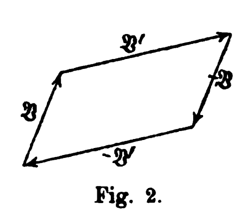


Fig. 2.

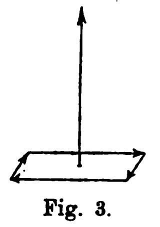
---

5) Die Regeln für die Addition und Subtraktion der Vektoren hat wohl zuerst *G. Bellavitis* gegeben, Annali di Scienze del Regno Lombardo Veneto 5 (1835), p. 244. Er bezeichnet die Vektorengleichheit als *Äquipollenz*.

6) *Grassmann* gebraucht das Wort (Ausdehnungslehre von 1844) nur für den an eine *bestimmte* Ebene gebundenen Flächeninhalt, also für das, was im Text gebundene Plangrösse genannt ist. Für die freie Plangrösse hat er nur das Wort Parallelogramm. Statt Plangrösse sagte er später lieber Ebenengrösse (Ausdehnungslehre von 1862). *H. Grassmann d. J.* bringt in seiner Abhandlung: Schraubenbewegung und Nullsystem, Halle 1899, den Ausdruck: *Blatt* in Vorschlag.

das Koordinatenkreuz um den Ursprung gedreht, so ist auf X, Y, Z und X', Y', Z' dieselbe homogene, lineare Transformation anzuwenden wie auf die Punktkoordinaten selbst. Infolge der Bedingungen, denen die Koeffizienten einer solchen Transformation unterliegen, resultieren für die L, M, N genau dieselben Transformationsformeln. Eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems übt auf die Komponenten der Plangrösse keinen Einfluss aus. Aber auch durch Inversion werden diese Komponenten im Gegensatz zu den Komponenten eines Vektors nicht geändert. Zeigen andererseits drei Grössen bei Koordinatentransformation das angegebene Verhalten, so lassen sie sich immer als die Komponenten einer Plangrösse interpretieren.

Trägt man in einer zu der Ebenenstellung des Parallelogrammes senkrechten Richtung unter Zugrundelegung eines beliebigen Maassstabes eine Strecke gleich dem Inhalte des Parallelogrammes ab, ordnet endlich den Sinn der Strecke in bestimmter Weise dem Umlaufssinne des Parallelogrammes zu, z. B. so, dass für einen in der Richtung der Strecke auf der Ebene des Parallelogrammes aufrecht stehenden Beobachter der Umlauf des Parallelogrammes im Sinne des Uhrzeigers erfolgt, dann hat man so der Plangrösse einen bestimmten Vektor zugeordnet[7]), und man findet die Summe beliebig vieler Plangrössen, indem man zu ihnen allen den zugehörigen Vektor sucht, diese Vektoren gemäss der Parallelogrammkonstruktion vereinigt und an die Stelle des resultierenden Vektors wieder die entsprechende Plangrösse setzt. Der so jeder Plangrösse zugeordnete Vektor heisst nach *Grassmann* deren *Ergänzung*. Die Zuordnung von Plangrössen und Vektoren bleibt bei beliebiger Verrückung des Koordinatensystems ungestört, durch Inversion aber wird sie aufgehoben; hat man eine Inversion angewandt, so muss man den Sinn jedes Vektors erst umkehren, damit er der Plangrösse, der er vorher zugeordnet war, aufs neue entspreche.


Fig. 3.

7) Infolge Voranstellung einer solchen Verabredung gelangt *Hamilton* überhaupt nicht zu dem selbständigen Begriffe der Plangrösse, da er dieselbe sofort durch den zugehörigen Vektor ersetzt; er bleibt in dieser Hinsicht hinter *Grassmann* zurück. Erst *J. Cl. Maxwell* (Treatise on electricity and magnetism, London 1873, Einleitung, ausserdem Lond. Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 224 = Papers 2, p. 257) unterschied wieder die eigentlichen Vektoren als *translatorische* von den Plangrössen als *rotatorischen* Vektoren. *W. Voigt* sagt statt translatorisch *polar*, statt rotatorisch *axial* (Kompendium d. theoretischen Physik, Leipzig 1895). Vgl. die näheren Angaben in IV 14, 3 (*Abraham*).

4. Skalare erster und zweiter Art. Bildet man aus den Komponenten X, Y, Z und X', Y', Z' zweier Vektoren $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}'$ den Ausdruck

$$XX' + YY' + ZZ',$$

so heisst dieser nach *Grassmann* das *innere Produkt*[8]) der beiden Vektoren und ist gleich dem Produkte aus deren Längen und dem Cosinus des Winkels, den ihre Richtungen einschliessen. Er ist somit eine simultane Invariante der beiden Vektoren und hat die Eigenschaft, bei Koordinatentransformation, die Inversion inbegriffen, völlig ungeändert zu bleiben. Eine Grösse, die von Bewegungen des Koordinatensystems unabhängig ist, wird heutzutage allgemein ein *Skalar*[9]) genannt, und wenn sie ausserdem bei Inversion ungeändert bleibt, wie der vorliegende Ausdruck, kann man sie als einen *Skalar erster Art* bezeichnen (vgl. *F. Klein*, Fussn. 4, sowie IV 14, **14** (*Abraham*)).

Vereinigt man nun in entsprechender Weise die Komponenten L, M, N einer Plangrösse mit den Komponenten X'', Y'', Z'' eines Vektors $\mathfrak{V}''$ zu dem Ausdrucke

$$LX'' + MY'' + NZ''$$

oder bildet man, was dasselbe ist, aus den Komponenten der *drei* Vektoren $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathfrak{V}''$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix},$$

so stellt diese das Volumen des Parallelepipeds (Spates) dar, das die mit den Anfangspunkten an einander gerückten Vektoren $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathfrak{V}''$ bestimmen. Dieser Ausdruck heisst nach *Grassmann*[10]) das *äussere Produkt der drei Vektoren.* Er bleibt bei Verschiebung und Drehung des Koordinatensystems ungeändert, wechselt aber bei Inversion sein Vorzeichen und ist deshalb ein *Skalar zweiter Art.* Die Plangrösse mit den Komponenten L, M, N ist selbst als das *äussere Produkt* der *zwei* Vektoren $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}'$ anzusehen.

5. Linienteile. *Grassmann* hat nun weiter sogenannte *Linienteile*[11]) betrachtet, die durch sechs Grössen

---

8) Ausdehnungslehre (1844) und bes. Geometrische Analyse (Werke 1[1], p. 349 ff.).

9) Der Ausdruck rührt von *Hamilton* her. Zuerst Phil. Mag. (3) 25 (1843), dann in den Lectures on Quaternions (1853) und den nach des Verfassers Tode herausgegebenen Elements of Quaternions.

10) Ausdehnungslehre (1844), § 33 ff.

11) Ausdehnungslehre von 1862. In der ersten Ausdehnungslehre (1844)

$$X = x_1 - x_2, \quad Y = y_1 - y_2, \quad Z = z_1 - z_2,$$
$$L = y_1 z_2 - z_1 y_2, \quad M = z_1 x_2 - x_1 z_2, \quad N = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

als ihre *Koordinaten* festgelegt werden und durch das Symbol $[PQ]$ bezeichnet werden können, indem P der Punkt mit den Koordinaten x_2, y_2, z_2, Q der Punkt mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 sein soll. Das Linienstück PQ kann dann in seiner geraden Linie noch beliebig verschoben, sonst aber nicht abgeändert werden, ohne dass die sechs Grössen X, Y, Z, L, M, N sich ändern. Die in Rede stehenden sechs Grössen charakterisieren sonach eine Strecke $[PQ]$ von bestimmter Länge und bestimmtem Sinne, auf einer bestimmten geraden Linie[12]). Übrigens zerfallen die angeschriebenen Koordinaten in die Komponenten X, Y, Z eines Vektors und die Komponenten L, M, N einer an den Koordinatenursprung gebundenen Plangrösse. Wenn man das Koordinatenkreuz parallel verschiebt, erhält man die neuen Koordinaten des Linienteils

$$X' = X, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z,$$
$$L' = L - Zy_0 + Yz_0, \quad M' = M - Xz_0 + Zx_0, \quad N' = N - Yx_0 + Xy_0,$$

wo x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des neuen Ursprunges P_0 im alten Systeme bezeichnen. Bei Drehung des Koordinatenkreuzes transformieren sich X, Y, Z und L, M, N wie Punktkoordinaten. Bei Inversion wechseln X, Y, Z ihr Vorzeichen, während L, M, N ungeändert bleiben. Die Grösse $X^2 + Y^2 + Z^2$, nämlich das Quadrat seiner Länge, ist die einzige Invariante des Linienteils, der Ausdruck $LX + MY + NZ$, welcher bei der Koordinatentransformation ebenfalls formal ungeändert bleibt, ist von Hause aus identisch Null. Umgekehrt lassen sich sechs Grössen X, Y, Z, L, M, N, die bei Koordinatenverwandlung das angegebene Verhalten zeigen und für welche $LX + MY + NZ$ verschwindet, immer als Koordinaten eines Linienteils auffassen.

Die *Verhältnisse* der sechs Grössen X, Y, Z, L, M, N legen die gerade Linie, welcher der Linienteil angehört, eindeutig fest. Diese sechs Grössen, als blosse Verhältnisgrössen betrachtet, werden deshalb seit *Plücker*[13]) und *Cayley*[14]) als *Linienkoordinaten* bezeichnet.

---

sagt *Grassmann* hierfür Liniengrösse. Vgl. insbesondere die §§ 197—205. In neuerer Zeit sind die Bezeichnungen „linienflüchtiger Vektor" und „Stab" vorgeschlagen worden (*Budde*, Mechanik 2, p. 555, bez. *H. Grassmann d. J.* in der in Fussn. 6 genannten Abhandlung). Letztere Bezeichnung wird auch von *Study* verwendet (Dynamen).

12) Vgl. *J. Plücker*, Fundamental views regarding mechanics, Lond. Phil. Trans. 156 (1866) = Ges. Abh. 1, Leipzig 1892, p. 546.

13) Man vgl. ausser den vorläufigen Mitteilungen Lond. Roy. Soc. Proc. 14

6. Ein Linienteil als Summe zweier anderen Linienteile. Poinsot'sche Paare. Wenn die Linien l und l' zweier Linienteile sich *schneiden*, so genügen ihre Koordinaten $X, \ldots$ und $X', \ldots$ der Bedingung

$$XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ' = 0.$$

Die Summen entsprechender Koordinaten $X + X', \ldots$ sind dann wieder die Koordinaten eines neuen Linienteils, der als die Summe der beiden gegebenen Linienteile anzusehen ist; die Linie dieses neuen Linienteiles geht durch den Schnittpunkt der Linien l und l' und liegt mit denselben in einer Ebene. Die beiden gegebenen Linienteile können durch zwei Strecken $[PQ]$ und $[PQ']$ mit gemeinsamem Anfangspunkte P dargestellt werden, und ihre Summe wird dann durch die Strecke $[PQ'']$ gegeben, wenn $PQQ''Q'$ die Ecken eines Parallelogrammes sind. Man nennt den so gefundenen Linienteil die *Resultante* der beiden gegebenen.

Wenn die Linien l_1 und l_2 zweier Linienteile $[P_1 Q_1]$ und $[P_2 Q_2]$ *parallel* sind, so ist die Summe derselben wieder ein Linienteil $[PQ]$, dessen Linie den Linien l_1 und l_2 parallel in deren Verbindungsebene verläuft und ihren Abstand im umgekehrten Verhältnisse zu der Länge der zugehörigen Linienteile teilt. Die Länge von $[PQ]$ ist gleich der Summe der Längen von $[P_1 Q_1]$ und $[P_2 Q_2]$. Sind jedoch diese Längen gleich, der Sinn der Linienteile aber entgegengesetzt, so haben wir einen Ausnahmefall, indem der resultierende Linienteil in unendliche Entfernung rückt, während seine Länge gleichzeitig unendlich klein wird.

Eine solche Grösse, die sich aus zwei entgegengesetzt gerichteten, gleich langen Linienteilen zusammensetzt, wollen wir hier im Hinblick auf ihre Bedeutung in der Statik des starren Körpers ein *Poinsot*'sches Paar[15]) nennen. Sie ist nichts anderes als eine freie Plangrösse. Da nämlich $X + X' = 0$, $Y + Y' = 0$, $Z + Z' = 0$ sein soll, ist sie durch die drei Koordinaten $\mathfrak{L} = L + L'$, $\mathfrak{M} = M + M'$, $\mathfrak{N} = N + N'$ vollständig charakterisiert, die sich bei Koordinatentransformation in der That wie die Komponenten einer Plangrösse verhalten. Die beiden

---

(1865), p. 53; Lond. Phil. Trans. 155 (1865), p. 725 = Ges. Abh. 1, besonders p. 525—541, vor allem seine Neue Geometrie des Raumes. Die Idee der Linienkoordinaten hat er schon 1846 in seinem *System der Geometrie des Raumes* (Düsseldorf) auseinandergesetzt.

14) Quart. J. of math. 3 (1860), p. 225; ibid. 5 (1862), p. 81 = Collected Papers 4, p. 446, 490.

15) *Poinsot,* Éléments de statique, 1. éd., Paris 1804. Vgl. im Texte Nr. 25. *Study* (Dynamen) sagt „Stäbepaar".

parallelen und gleichen Linienteile bilden ein Parallelogramm, welches die Plangrösse geometrisch repräsentiert, und hieraus ist klar, dass ein *Poinsot*'sches Paar vollkommen bestimmt ist durch die *Stellung* der Verbindungsebene der beiden Linienteile, das *Moment* des Paares, nämlich den Inhalt des von den Linienteilen gebildeten Parallelogrammes, und den *Sinn*, in dem das Parallelogramm durchlaufen werden muss, wenn dieser Umlaufssinn in zwei Seiten mit der Richtung der beiden Linienteile zusammenfallen soll.

Nach dem Gesagten vereinigen sich auch beliebig viele Linienteile in den beiden besonderen Fällen, dass entweder die Linien aller Linienteile durch einen Punkt gehen oder sie alle zu einander parallel sind oder in einer Ebene liegen, immer wieder zu einem Linienteile, wobei nur im letzteren Falle möglicherweise ein *Poinsot*'sches Paar als Resultante auftritt.

7. Liniensummen. Im allgemeinen Falle ist die Summe $[PQ] + [P'Q']$ zweier Linienteile $[PQ]$ und $[P'Q']$ nicht wieder ein Linienteil, sondern eine neue geometrische Grösse, die wir, um einen kurzen Ausdruck zu haben, als *Liniensumme* bezeichnen wollen[16]. Durch die sechs Grössen

$$\mathfrak{X} = X + X', \quad \mathfrak{Y} = Y + Y', \quad \mathfrak{Z} = Z + Z',$$
$$\mathfrak{L} = L + L', \quad \mathfrak{M} = M + M', \quad \mathfrak{N} = N + N'$$

ist diese Liniensumme rein formal definiert, indem vorläufig nur festgesetzt sein soll, dass aus zwei Paaren von Linienteilen dieselbe Liniensumme resultiert, wenn in jedem Paare entsprechende *Koordinaten* der Linienteile dieselbe Summe ergeben. Die so definierten Koordinaten einer Liniensumme verhalten sich bei Koordinatentransformation wie die Koordinaten eines Linienteils.

Als Invarianten einer Liniensumme erweisen sich die Ausdrücke

$$\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{Z},$$

und zwar ist der erste ein Skalar erster, der zweite ein Skalar zweiter Art. Der erste ist das Quadrat der Länge $\mathfrak{R}$ des Vektors, der sich ergiebt, wenn man die Linienteile $[PQ]$ und $[P'Q']$ wie freie Vektoren behandelt und zusammenfügt. Der zweite Ausdruck

16) Vielfach wird dafür das Wort Streckensystem gebraucht, so von *Schell* (Theorie der Bewegung und der Kräfte) und von *H. Mohr* in seinen zahlreichen Arbeiten (die meistens im Civilingenieur erschienen). *E. Budde* (Mechanik 2, p. 611) sagt Vektorensystem, indem er den Linienteil als linienflüchtigen Vektor bezeichnet, oder spricht auch von einer *heteraptischen* Summe solcher linienflüchtigen Vektoren, d. h. einer Summe, die von verschiedenen Linien hergenommen ist. *Study* sagt Stäbesumme.

stellt sich in den Koordinaten der beiden komponierenden Linienteile folgendermassen dar:

$$XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ'.$$

Das ist nichts anderes als $[PQP'Q']$, wenn man hierunter die vierreihige, aus den Koordinaten der vier Punkte P, Q, P', Q' gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 1 \end{vmatrix}$$

versteht, welche das sechsfache Volumen des von den vier Punkten gebildeten Tetraeders darstellt. So ergiebt sich ein zuerst von *M. Chasles* aufgestellter Satz[17]), der in unserer Terminologie folgendermassen lautet: Wie eine Liniensumme auch aus zwei Linienteilen zusammengesetzt werden mag, immer ist das Volumen des Tetraeders, das die zwei Linienteile bestimmen, dasselbe.

Die Gleichung $\mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{Z} = 0$ drückt die Bedingung dafür aus, dass die Liniensumme sich auf einen Linienteil reduziert; wir kommen dann wieder auf die Entwickelungen der vorigen Nummer zurück. Die Gleichung $\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = 0$ fällt, wenn man sich auf das reelle Gebiet beschränkt, in die drei Gleichungen $\mathfrak{X} = 0$, $\mathfrak{Y} = 0$, $\mathfrak{Z} = 0$ auseinander, welche die Gleichung $\mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{Z} = 0$ nach sich ziehen und ausdrücken, dass die Liniensumme sich auf ein *Poinsot*'sches Paar reduziert.

Wenn irgend sechs Grössen im Raume, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sich bei Parallelverschiebung des Koordinatenkreuzes so transformieren, dass $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und die Verbindung $\mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{Z}$ ungeändert bleiben, und wenn bei Drehung $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sich wie Punktkoordinaten transformieren, während bei Inversion $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ungeändert bleiben, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ ihr Zeichen wechseln, dann definieren diese sechs Grössen eine Liniensumme. Es liefert also insbesondere die Addition beliebig vieler Linienteile keine allgemeinere Grösse wie die Addition nur zweier Linienteile.

8. **Die Centralaxe einer Liniensumme.** Eine beliebige Liniensumme mit den Koordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ lässt sich zusammensetzen aus einem *Poinsot*'schen Paare und einem Linienteile, der

---

17) Mitgeteilt von *Gergonne* in seinen Ann. de math. 18 (1828), p. 372. Man vgl. auch den Aufsatz von *A. F. Moebius*, J. f. Math. 4 (1829), p. 179 = Werke 3, p. 499.

gegen die Ebenenstellung des *Poinsot*'schen Paares normal ist. Die Linie dieses Linienteils heisst dann die *Centralaxe* der Liniensumme[18]). Die Komponenten des *Poinsot*'schen Paares haben in diesem Falle die Form $k\mathfrak{X}$, $k\mathfrak{Y}$, $k\mathfrak{Z}$, also werden die Koordinaten des resultierenden Linienteils

$$\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z},\ \mathfrak{L} - k\mathfrak{X},\ \mathfrak{M} - k\mathfrak{Y},\ \mathfrak{N} - k\mathfrak{Z},$$

und aus der notwendigen Bedingungsgleichung zwischen diesen Koordinaten

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{L} - k\mathfrak{X}) + \mathfrak{Y}(\mathfrak{M} - k\mathfrak{Y}) + \mathfrak{Z}(\mathfrak{N} - k\mathfrak{Z}) = 0$$

ergiebt sich

$$k = \frac{\mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{Z}}{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2},$$

sodass die Ausdrücke für die Koordinaten des Linienteils in $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ bis zum dritten Grade ansteigen. Da andererseits das Moment dieses *Poinsot*'schen Paares

$$\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{Z}}{\sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}}$$

ist, so wird auch $k = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{R}}$. Diese Grösse soll in Anlehnung an *J. Plücker* weiterhin der *Parameter* der Liniensumme heissen. Reduziert sich die Liniensumme auf einen einzelnen Linienteil, so ist $\mathfrak{F} = 0$ und also $k = 0$. $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{R}$ können, ohne dass $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ alle drei Null werden, nur für imaginäre Liniensummen gleichzeitig verschwinden. Für ein *Poinsot*'sches Paar, d. h. wenn $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} = 0$, werden $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{R}$ ebenfalls gleich Null und von der Centralaxe ist dann nur die Richtung festgelegt.

Für die Zusammensetzung der Liniensumme aus zwei Linienteilen kann die Linie des einen Linienteiles willkürlich angenommen werden, dann ist dadurch die Länge dieses Linienteiles und Linie und Länge des anderen Linienteiles eindeutig bestimmt. Die gemeinsame Normale der beiden Linien trifft die Centralaxe der Liniensumme unter rechtem Winkel, und wenn r_1, r_2 die kürzesten Abstände der beiden Linien von der Centralaxe bedeuten, φ_1, φ_2 die Winkel, unter denen sie dieselbe kreuzen, so ist nach *M. Chasles*[19]) $r_1 \operatorname{tang} \varphi_2 = r_2 \operatorname{tang} \varphi_1 = k$.

9. Das gegenseitige Moment zweier Liniensummen. Sind $[PQ] + [P'Q']$ und $[P_1 Q_1] + [P_1' Q_1']$ zwei Liniensummen, deren Koordinaten mit $\mathfrak{X} \ldots$ und $\mathfrak{X}_1 \ldots$ bezeichnet seien, dann ist der Ausdruck

---

18) Vgl. *Poinsot*, J. éc. polyt. 13 (1806), p. 182.

19) Paris C. R. 16 (1843), p. 1420.

$$\mathfrak{X}\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{Y}\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{Z}\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{L}\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{M}\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{N}\mathfrak{Z}_1$$

eine simultane Invariante dieser beiden Liniensummen. Er heisst ihr *gegenseitiges Moment*[20]) und hat den Wert

$$[PQP_1Q_1] + [PQP_1'Q_1'] + [P'Q'P_1Q_1] + [P'Q'P_1'Q_1'].$$

Er ist also gleich der sechsfachen Summe aus den mit dem richtigen Vorzeichen genommenen Volumina der vier Tetraeder, welche sich aus je einem Linienteil der ersten Liniensumme zusammen mit einem Linienteile der zweiten Liniensumme bilden lassen[21]), und diese Volumensumme bleibt sonach ungeändert, wie auch die beiden Liniensummen aus je zwei Linienteilen zusammengesetzt werden mögen.

Tritt an die Stelle einer der beiden Liniensummen ein Linienteil, so reduzieren sich die vier Tetraeder auf zwei, und wenn die Länge des Linienteils insbesondere $= 1$ ist, so heisst die Summe der beiden Tetraedervolumina das *Moment* der Liniensumme *für die gerade Linie* g, welcher der Linienteil angehört[22]). Diese Definition lässt sich auf den Fall erweitern, dass die Liniensumme sich aus beliebig viel gegebenen Linienteilen zusammensetzen soll. Nennt man dann R_i die Länge eines dieser Linienteile, φ_i den Winkel, unter dem seine Linie die Linie g kreuzt und d_i den kürzesten Abstand der beiden Linien, so ist das Moment der Liniensumme für die gerade Linie g durch den Ausdruck

$$\sum_i R_i d_i \sin \varphi_i$$

dargestellt. Verschwindet dieses Moment für eine gerade Linie, so heisst die Gerade nach *Moebius* eine *Nulllinie*[23]) der Liniensumme. Ist r ihr kürzester Abstand von der Centralaxe, φ der Winkel, unter dem sie dieselbe kreuzt, so wird $r \operatorname{tang} \varphi = k$, und in dieser Linie liegt kein Linienteil, der mit einem Linienteile einer *anderen* geraden Linie zusammen die vorliegende Liniensumme ergiebt[24]). Sind X, Y, Z, L, M, N die Koordinaten einer Nulllinie, so muss

20) Vgl. die im Text folgenden Erörterungen über Liniengeometrie und die weiter unten folgende Fussnote 40.

21) Vgl. *G. Battaglini*, Napoli, Rend. 8 (1869).

22) Dieser Begriff ist, seiner statischen Bedeutung nach, schon sehr alt. Man findet ihn bei *L. Euler* (Nova Acta Petropolitana 7 (1791)) und ausführlich erörtert bei *Prony* (Leçons de mécanique), *Poisson* (Traité de mécanique) und *Moebius* (Lehrbuch der Statik).

23) Lehrbuch der Statik 1, § 84—88 = Werke 3, p. 178 ff.

24) Man kann den Sachverhalt auch dahin ausdrücken, dass in unendlicher Nachbarschaft eine Linie liegt, von der ein Linienteil zusammen mit einem

$$\mathfrak{L}X + \mathfrak{M}Y + \mathfrak{N}Z + \mathfrak{X}L + \mathfrak{Y}M + \mathfrak{Z}N = 0$$

werden, wenn $\mathfrak{X}\ldots$ die Koordinaten der Liniensumme sind. Die Nulllinien bilden nach *Plücker*'s Ausdruck einen *linearen Komplex*, indem ihre Koordinaten der vorstehenden linearen Gleichung genügen (deren Koeffizienten die Koordinaten der zugehörigen Liniensumme sind). Der lineare Komplex ist durch fünf seiner Strahlen eindeutig bestimmt, und insbesondere lässt sich die Centralaxe aus diesen fünf Strahlen konstruieren. Hier kommen wir also in Kontakt mit den Grundbegriffen der *Liniengeometrie*, deren ausführlichere Darlegung nach Bd. III gehört.

Die historische Entwickelung ist geradezu die gewesen, dass eine Reihe von Beziehungen für die Liniengeometrie von *J. Plücker*, *F. Klein* u. a. vorab entwickelt waren, ehe sie die für die Mechanik der starren Körper typische Ausbildung erhielten. Wir werden hierauf in den Anmerkungen noch wiederholt zurückkommen, und erwähnen hier betreffs der liniengeometrischen Entwickelungen nur Folgendes:

Sind $U = 0$ und $U' = 0$ die Gleichungen zweier linearen Strahlenkomplexe, so nennt man alle Komplexe von der Gleichungsform $U + \lambda U' = 0$ ein *Komplexbüschel* und die gemeinsamen Strahlen eine lineare *Strahlenkongruenz*; die Strahlen dieser Kongruenz treffen zwei bestimmte gerade Linien, die aber auch konjugiert imaginär werden oder zusammenfallen können. Drei lineare Strahlenkomplexe (und damit alle Komplexe des durch sie bestimmten Komplexbündels) haben im allgemeinen die eine Regelschar einer quadratischen Regelfläche mit einander gemein.

10. Das vektorielle Moment einer Liniensumme für einen beliebigen Punkt und das Moebius'sche Nullsystem. Ist $[PQ]$ ein Linienteil, P_0 irgend ein Punkt des Raumes mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0, so legen die beiden Vektoren P_0P und P_0Q eine gebundene Plangrösse fest (vgl. Nr. 3), deren Komponenten durch die Grössen L', M', N' (vgl. Nr. 5) gegeben sind. Diese Plangrösse soll das *vektorielle Moment* des Linienteils für den Punkt P_0 heissen. Tritt nun an die Stelle des Linienteils eine Liniensumme, deren Koordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ seien, so fügen sich die vektoriellen Momente aller einzelnen Linienteile der Liniensumme zu dem vektoriellen

---

Linienteile auf der Nulllinie die vorgelegte Liniensumme ergiebt, nur dass diese beiden Linienteile unendlich gross werden.

Momente dieser letzteren selbst zusammen, und man findet für die Komponenten dieses Momentes[25])

$$\mathfrak{L} - \mathfrak{Z} y_0 + \mathfrak{Y} z_0, \quad \mathfrak{M} - \mathfrak{X} z_0 + \mathfrak{Z} x_0, \quad \mathfrak{N} - \mathfrak{Y} x_0 + \mathfrak{X} y_0.$$

So erscheint an jeden Punkt des Raumes eine Plangrösse, nämlich das *vektorielle Moment der Liniensumme,* gebunden. Diese Plangrösse kann man für jeden einzelnen Punkt P zur Anschauung bringen, indem man in einer bestimmten, durch ihn gelegten Ebene π ein Flächenstück von bestimmtem Inhalte $\mathfrak{J}$ markiert. Dieser seinem absoluten Werte nach zu nehmende Inhalt $\mathfrak{J}$ ist dann das *skalare Moment* der Liniensumme für den Punkt P.

Jede durch diesen Punkt gehende gerade Linie, welche gleichzeitig in der Ebene π liegt, hat die Eigenschaft, dass für sie das Moment der Liniensumme verschwindet. *Moebius* nennt deswegen die Ebene π die *Nullebene* des Punktes P und diesen den *Nullpunkt* von π. Die Beziehung zwischen Nullpunkt und Nullebene ist wechselweise eindeutig[26]). Bewegt sich ein Punkt auf einer geraden Linie, so dreht sich seine Nullebene um eine andere gerade Linie, und die beiden Linien sind solche zwei Geraden (siehe oben Nr. 5) dass sich durch zwei ihnen angehörende Linienteile die zugehörige Liniensumme ersetzen lässt. Das Moment der Liniensumme wird unter allen durch einen Punkt P gehenden geraden Linien für diejenige Linie p, welche auf der Nullebene π dieses Punktes senkrecht steht, am grössten, und zwar gleich dem skalaren Momente $\mathfrak{J}$ des Punktes P. Für irgend eine andere Linie durch P wird es gleich $\mathfrak{J} \cos \omega$, wenn ω der Winkel ist, den diese Linie mit der Linie p bildet. Trägt man also das Moment auf allen den Linien, die durch P gehen, von diesem Punkte aus als Längen auf, so erfüllen die Endpunkte der so gewonnenen Strecken eine Kugel vom Durchmesser $\mathfrak{J}$, welche in dem Punkte P dessen Nullebene π berührt[27]).

---

25) Durch diese Komponenten definiert, spielt das Moment schon bei *Prony* eine grosse Rolle. Er nennt aber (Leçons de mécanique 1, p. 200) *P. S. Laplace* als den eigentlichen Urheber der Theorie, mit dessen Prinzip der invariablen Ebene sie in der That zusammenhängt (Mécanique céleste 1, Paris 1799, ch. 5). Vgl. hierzu auch die Abhandlung von *Poinsot:* Sur le plan invariable du monde, die den späteren Auflagen seiner Éléments de statique angehängt ist.

26) Diese Punkt-Ebenenverwandtschaft ist schon vor *Moebius* von dem Italiener *G. Giorgini* (Modena, Mem. della Soc. Ital. detta dei Quaranta 20 (1828), p. 243; vgl. auch ebenda 21 (1836), p. 1), ebenfalls von der *Poinsot*'schen Statik aus, gefunden worden.

27) Um den Nullpunkt P einer Ebene π für eine vorgelegte Liniensumme zu finden, hat *E. Carvallo* (Nouv. ann. (3) 12 (1893), p. 454) das folgende Verfahren

Das *Moebius*'sche *Nullsystem* steht zu der *Centralaxe* der Liniensumme in einer einfachen Beziehung, die *Moebius* selbst gefunden hat. Ist nämlich r der Abstand des Nullpunktes von der Centralaxe, so geht die Nullebene durch die Linie dieses Abstandes hindurch und bildet mit der Centralaxe einen Winkel φ, der aus der Gleichung

$$r \operatorname{tang} \varphi = k$$

zu bestimmen ist (wobei der Sinn, in welchem dieser Winkel positiv zu rechnen ist, vom Koordinatensysteme abhängt). Die Ebene, welche einem gegebenen Punkte als Nullebene zugeordnet ist, bleibt ihm also *erstens* zugeordnet, wenn man Punkt und Ebene um ein beliebiges Stück in der Richtung der Centralaxe verschiebt oder durch einen beliebigen Winkel um die Centralaxe dreht. Bewegt sich *zweitens* der Punkt auf einer Schraubenlinie, deren Axe die Centralaxe ist und deren Ganghöhe den für alle Lagen des Punktes konstanten Betrag $2\pi k$ hat, so bleibt die Nullebene immer senkrecht zu der Bewegungsrichtung des Punktes gestellt. Auf solchen Schraubenlinien bewegen sich aber alle Punkte des Raumes bei einer bestimmten Schraubenbewegung um die Centralaxe, sodass diese *Schraubung* der Liniensumme in eindeutiger Weise zugeordnet ist, sofern man nicht nur von ihrer Geschwindigkeit, sondern auch von ihrem Sinne absieht, indem die Bewegung auch immer in entgegengesetzter Richtung erfolgen kann. Betrachten wir von dieser Bewegung einen Teil, der in einer so kurzen Zeit dt erfolgt, dass die Wege aller Punkte von einer geraden Linie nur unmerklich abweichen, so wird die Länge dieses Weges für einen beliebigen Punkt P dem skalaren Momente der Liniensumme für diesen Punkt proportional, und die Richtung des Weges ist gleichzeitig zu der Ebene des vektoriellen Momentes normal. Das letztere wird also durch die Wegstrecke des Punktes genau so repräsentiert, wie oben die Plangrösse durch ihren ergänzenden Vektor[28]).

---

angegeben: Man bringe in dem Schnittpunkte der Axe einer jeden Kraft mit der Ebene π eine Masse an, welche der Projektion der Kraft auf die zu der Ebene senkrechte Richtung proportional ist, dann ist der Schwerpunkt aller dieser Massen der Nullpunkt P.

28) Um dieses nachzuweisen, ist nur nötig, die Liniensumme in den Linienteil auf der Centralaxe von der Länge $\mathfrak{R}$ und das dazu normale *Poinsot*'sche Paar von dem Momente $k\mathfrak{R}$ zu zerlegen. Dann zerfällt auch das vektorielle Moment der Liniensumme für einen beliebigen Punkt, der im Abstande r von der Centralaxe liegt, in zwei Teile. Der Vektor, welcher in der angegebenen Weise den ersten Teil repräsentiert, ist zu der Centralaxe normal und hat die Länge $\mathfrak{R}r$, der Vektor, welcher dem anderen Teile entspricht, ist zu der Central-

In neuester Zeit hat *E. Study* (Dynamen, 1. Lieferung) eine systematische Neudarstellung des ganzen hier berührten Gebietes in seiner Bedeutung für die Mechanik begonnen, wobei er die Einzelfälle von dem jeweiligen allgemeinen Falle sehr viel sorgfältiger absondert und studiert, als es in dem vorliegenden, nur die grossen Züge wiedergebenden Bericht geschieht. Es ist unmöglich gewesen die *Study*'schen Entwickelungen hier einzuarbeiten, zumal dieselben noch nicht vollständig vorliegen und der Verfasser eine von der sonst üblichen vielfach abweichende Terminologie gebraucht. Um so nachdrücklicher sei auf das *Study*'sche Werk an dieser Stelle hingewiesen; dieser Hinweis möge insbesondere auch für den nun folgenden Abschnitt II des vorliegenden Referates mit gelten.

II. Die ersten Sätze der Kinematik des starren Körpers und die Ball'schen Schrauben.

11. Jede unendlich kleine Bewegung eine Schraubung. Durch die in Nr. **10** gegebenen Bemerkungen sind die vorhergehenden Entwickelungen mit der Kinematik in Verbindung gebracht, indem an die Stelle einer Liniensumme eine unendlich kleine Bewegung oder Verrückung des Raumes getreten ist. Die so gewonnene Bewegung ist eine *Schraubung um die Centralaxe der Liniensumme.* Sie ist indessen durch die Liniensumme nicht eindeutig bestimmt, vielmehr darf noch für irgend einen Punkt, wie schon gesagt, innerhalb der Grenzen des Unendlichkleinen die Grösse und der Sinn der Verschiebung, die er erleiden soll, willkürlich festgesetzt werden. Was speziell den Sinn angeht, so kann man z. B. verabreden, dass, in der Richtung des in der Centralaxe liegenden Linienteiles gesehen, die in der Schraubung enthaltene Drehung in dem Sinne des Uhrzeigers erfolgen soll; es wird dann auch, in der Richtung der in der Schraubung enthaltenen Translation gesehen, der Sinn des zur Centralaxe normal gestellten *Poinsot*'schen Paares mit dem Sinne des Uhrzeigers zusammenfallen.

In erster Linie interessiert die Frage, ob die Schraubenlinien, welche bei der in Frage stehenden Schraubung von den Punkten des Raumes durchlaufen werden, *links* oder *rechts* gewunden sind. Wir denken uns das rechtwinklige Koordinatensystem immer so gewählt, dass ein in der Richtung des positiven z aufrecht gestellter Beobachter,

axe parallel und hat die Länge $k\mathfrak{R}$. Der aus diesen beiden resultierende Vektor repräsentiert in der That das Bahnelement des Punktes bei einer Schraubung um die Centralaxe von der Ganghöhe $2\pi k$.

wenn er in die Richtung des positiven x sieht, die positive Seite der y-Axe zur Rechten hat. Es gehören dann zu positivem k *Linksschrauben*, zu negativem k *Rechtsschrauben*. Bei der Linksschraube ist für einen längs der Axe aufrecht stehenden Beobachter mit einer Drehung von vorne nach rechts eine Verschiebung nach oben verknüpft und bei der Rechtsschraube eine Verschiebung nach unten.

Der noch fehlende Nachweis, dass jede unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers wirklich mit einer Schraubung übereinkommt[29]), lässt sich am einfachsten führen, indem man die Formeln für eine solche Bewegung aufstellt. Ist O ein beliebiger Punkt des Körpers, der zum Koordinatenursprung gewählt wird, so muss sich die unendlich kleine Bewegung auf jeden Fall erreichen lassen durch eine unendlich kleine Parallelverschiebung und eine unendlich kleine Drehung des Körpers um eine durch O gehende Axe. Durch die Parallelverschiebung erleiden die Koordinaten aller Punkte dieselben Änderungen, die mit $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$ bezeichnet seien. Ist ferner $\varrho\,dt$ der unendlich kleine Winkel der Drehung und sind p/ϱ, q/ϱ, r/ϱ die Richtungscosinus der Drehungsaxe, so dass $\varrho^2 = p^2 + q^2 + r^2$, dann werden die Komponenten der Verrückung, die bei der unendlich kleinen Bewegung ein beliebiger Punkt des Körpers, mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0, erleidet:

$$\begin{aligned} dx_0 &= (u - ry_0 + qz_0)\,dt, \\ dy_0 &= (v - pz_0 + rx_0)\,dt, \\ dz_0 &= (w - qx_0 + py_0)\,dt. \end{aligned}$$

Soll nun die Bewegung zu einer Liniensumme mit den Koordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ gehören, so muss die so definierte Verrückung in der angegebenen Weise auf das vektorielle Moment der Liniensumme bezogen sein. Vergleicht man daraufhin die angeschriebenen Gleichungen für dx_0, dy_0, dz_0 mit den Ausdrücken für die Komponenten des vektoriellen Momentes (Nr. **10**), so sieht man, dass die verlangte Beziehung in der That erreicht wird, indem man unter Wegwerfung des Faktors dt setzt:

$$\mathfrak{L} = u, \quad \mathfrak{M} = v, \quad \mathfrak{N} = w, \quad \mathfrak{X} = p, \quad \mathfrak{Y} = q, \quad \mathfrak{Z} = r.$$

Aus der gegebenen Betrachtung folgt zugleich, dass die beiden Schrau-

---

29) Diesen Satz gab zuerst *G. Mozzi* in einer kleinen Schrift: Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi, Napoli 1763. Der Beweis *Mozzi's* ist aber nicht richtig. Mit ausreichender Begründung veröffentlichte *A. Cauchy* denselben Satz, ohne *Mozzi's* Arbeit zu kennen, in seinen Exercices de mathématiques 2, Paris 1827, p. 87 = Oeuvres (2) 7, Paris 1889, p. 94.

bungen, die auf diese Weise bei Benutzung desselben dt zwei gegebenen Liniensummen entsprechen, nach einander ausgeführt die Schraubung ergeben, welche der Summe dieser beiden Liniensummen zugeordnet ist. Einem einzelnen Linienteil entspricht eine *Drehung*. Unendlich kleine Bewegungen sind im Gegensatze zu endlichen immer vertauschbar; sie addieren sich wie die entsprechenden Liniensummen.

12. Analogie der Schraubungen und Liniensummen [30]). Nach dem Gesagten muss sich jeder Satz des ersten Abschnittes über Liniensummen auf die *Kinematik* der *unendlich kleinen* Bewegungen eines starren Körpers übertragen lassen [31]). Wir geben nur die einfachsten Sätze, indem wir übrigens auf IV 3 (*Schönflies*) verweisen.

1) Wie jede Liniensumme aus zwei Linienteilen, so lässt sich jede Schraubung aus zwei einfachen Drehungen zusammensetzen. Die Axe u der einen Drehung kann beliebig angenommen werden, dann ist die konjugierte Rotationsaxe v sowie von beiden Drehungen Grösse und Sinn bestimmt. Bei der resultierenden Schraubung erfährt die Linie u eine blosse Drehung um die Linie v. Alle Punkte von u verschieben sich also normal zu der konjugierten Rotationsaxe v. Die Linien dieser Verschiebungen erfüllen ein Paraboloid, und die Normalen desselben in den Punkten von u ein zweites Paraboloid; dieses wird von denjenigen normalen Sekanten der Linie u gebildet, welche die Linie v treffen. Der Scheitel des erstgenannten Paraboloids ist der Punkt, in dem die gemeinsame Normale der Schraubungsaxe und der Linie u die letztere trifft, und die Tangentialebene in diesem Scheitel ist der Schraubungsaxe parallel, während sie gleichzeitig die Linie u selbst enthält.

2) Wie zwei Kräfte, die in zwei sich schneidenden oder in parallelen Linien wirken, zu einer resultierenden Kraft, setzen sich auch zwei Drehungen um sich schneidende Axen wieder zu einer Drehung zusammen, und ebenso zwei Drehungen um parallele Axen. Für unendlich kleine Drehungen gilt sonach das Parallelogramm- und das Hebelgesetz, sobald man sich jede Drehung durch ein Stück ihrer Axe,

---

30) Die erste richtige Darstellung der Analogie, welche die Linienteile und unendlich kleine Drehungen in ihrer Zusammensetzung zeigen, gab *Moebius*, J. f. Math. 18 (1838), p. 189 = Werke 1, p. 545.

31) Die folgenden Sätze rühren zum grossen Teile von *Chasles* her (Paris C. R. 16 (1843), p. 1420). Man vgl. die zusammenfassenden Darstellungen von *A. Mannheim*, Géométrie cinématique, Paris 1894; *A. Schoenflies*, Geometrie der Bewegung, Leipzig 1886, und das Referat IV 3 von *Schoenflies; G. Koenigs*, Leçons de cinématique, Paris 1897; endlich *E. Study*, Dynamen.

das dem unendlich kleinen Drehungswinkel proportional ist, repräsentiert denkt. Zwei Drehungen um parallele Axen ergeben nur dann keine resultierende Drehung, wenn sie gleiche Grösse, aber entgegengesetzten Sinn haben. Dann vereinigen sie sich vielmehr zu einer Parallelverschiebung oder *Translation*, deren Richtung senkrecht zu beiden Drehungsaxen ist, während ihre Grösse gleich dem Produkte aus dem Winkel der Drehungen und dem Abstande ihrer Axen wird. Eine Translation ist ein freier Vektor, und beliebig viele Translationen setzen sich nach den Regeln, die für die Addition der Vektoren gelten, immer wieder zu einer Translation zusammen.

3) Dem *vektoriellen Momente* einer Liniensumme für einen Punkt entspricht die Verrückung, die der Punkt bei der zugehörigen Schraubung erfährt. Dem *Momente* der Liniensumme für eine *gerade Linie* ist die Grösse der Verschiebung analog, die bei der Schraubung die Punkte der geraden Linie in der Richtung derselben erfahren. Diese Verschiebung ist für alle diese Punkte in der That gleich gross. Jeder Linie, für welche das Moment verschwindet, entspricht sonach eine Linie, deren sämtliche Punkte sich normal zu ihr verschieben[32]. Der geraden Linie, für welche unter allen durch einen bestimmten Punkt gehenden Linien das Moment der Liniensumme am grössten wird, ist die Linie analog, in welcher sich der angenommene Punkt verschiebt; andererseits erfährt dieser Punkt unter allen Punkten einer solchen geraden Linie die kleinste Verschiebung. Alle diese Linien bilden einen speziellen quadratischen Komplex[33].

4) Die Linie p, in der sich ein Punkt P verschiebt, steht senkrecht zu der aus P auf die Centralaxe gefällten Normalen l, und ist r der Abstand des Punktes P von der Centralaxe, so wird für den Winkel φ, unter dem die Linie p die Centralaxe kreuzt, $\operatorname{tang} \varphi = \frac{r}{k}$. Man findet dann auf demselben Lote l der Centralaxe im Abstande $r' = k \operatorname{cotg} \varphi$ von der letzteren einen Punkt P', der sich in einer zu der Linie p senkrechten Linie p' verschiebt. Die beiden Linien p und p' haben die Eigenschaft, dass sich die Schraubung durch zwei einfache Drehungen um sie ersetzen lässt. Legt man durch eine von ihnen, etwa p', und das Lot l der Centralaxe eine Ebene π, so steht diese auf der anderen Linie p senkrecht

32) *O. Rodrigues*, J. de math. 5 (1840), p. 380.

33) Den besonderen Charakter dieses Komplexes erörtert *A. Schoenflies* (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 28 (1883), p. 229), siehe auch *Study* (Math. Ann. 39 (1891) p. 486 ff.). Vgl. den folgenden Artikel IV 3 (*Schoenflies*).

und wird von derselben in ihrem Nullpunkte P getroffen. Die Linie p', die in der Ebene π liegt, ist dieser Ebene in eindeutiger Weise zugeordnet, und in ihr wird die Ebene π von der unendlich benachbarten Ebene geschnitten, in die sie durch die Schraubung übergeht. p' ist nach *Chasles'* Ausdruck die *charakteristische* Linie der Ebene π.

Diese sämtlichen Sätze lassen sich natürlich auch unabhängig von der Theorie der Liniensummen und ihrer Koordinaten rein kinematisch beweisen.

13. Die Ball'schen Schrauben. Um das den beiden Begriffen Liniensumme und Schraubung Gemeinsame und andererseits wieder das Unterscheidende auszudrücken, kann man beide unter der Bezeichnung *Schraubengrösse* zusammenfassen und die Schraubung als *Schraubengrösse erster Art* von der Liniensumme als *Schraubengrösse zweiter Art* unterscheiden. Der Unterschied der beiden Grössenarten (p, q, r, u, v, w) und $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ offenbart sich bei Koordinatentransformation. Während ihre Koordinaten sich bei Parallelverschiebung und Drehung des Koordinatenkreuzes gleichartig verhalten, wechseln bei Inversion u, v, w ihr Zeichen, während p, q, r ungeändert bleiben, und wechseln bei der Liniensumme umgekehrt die drei ersten Koordinaten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ ihr Vorzeichen, während $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ungeändert bleiben[34]).

Die Schraubengrössen erster Art finden in der Kinematik des starren Körpers ihre unmittelbare Anwendung, wie wir gerade sehen. Aber die Schraubengrössen zweiter Art sind für die Mechanik des starren Körpers nicht minder wichtig, indem sie das allgemeinste an einem solchen Körper angreifende Kräftesystem darstellen. Sie sind dann nach einem *Plücker*'schen Ausdruck als *Dyname* zu bezeichnen. Dies wird weiterhin (in dem der Statik gewidmeten Teile III des vorliegenden Referates) ausführlich zu behandeln sein; es sei aber schon hier erwähnt, um beiläufig darauf Bezug nehmen zu können.

Sir *Robert Stawell Ball*[35]) hat nun den Gedanken verfolgt, in der Gesamtheit aller Schraubenlinien mit gemeinsamer Axe und Ganghöhe, die sich durch das grob sinnliche Bild einer Wendeltreppe veranschaulichen lässt und die er einfach *Schraube* (screw) nennt, den gemeinsamen Träger für die Schraubungen und Dynamen[36]) aufzu-

34) Der Ausdruck $A' = \mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w + \mathfrak{L}p + \mathfrak{M}q + \mathfrak{N}r$ ist also ein Skalar erster Art. Diese Verhältnisse erörtert *F. Klein*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 47 (1902); vgl. auch die Ausführungen weiter unten in Nr. 28.

35) Die ersten Mitteilungen finden sich im Quart. J. of math. 10 (1870), p. 220; Dublin, Trans. 25 (1871), p. 137; Lond. Phil. Trans. 164 (1874), p. 15. Vgl. für alles Weitere die zusammenfassende Theory of screws, Cambridge 1900.

36) Schraubung ist bei *Ball* twist, Dyname wrench. Wrench und twist

stellen, und daher rührt seine Definition der Schraube als einer geraden Linie (der Axe), mit der ein Parameter k (pitch)[37]) verknüpft ist. Ist die Schraube gegeben, so gehören zu ihr unendlich viele Schraubungen, die sich völlig festlegen lassen, indem man den Winkel oder die Winkelgeschwindigkeit ϱ[38]) der in ihnen enthaltenen Drehung um die Schraubenaxe, seiner Grösse und seinem Sinne nach, angiebt. Die Grösse oder Geschwindigkeit der Translation in der Richtung der Axe ist dann $\tau = k\varrho$. Ebenso wird jede Liniensumme oder Dyname, die zu einer gegebenen Schraube gehört, völlig fixiert durch die Länge $\mathfrak{R}$ des in der Axe gelegenen Linienteils, die man als Intensität der Liniensumme bezeichnen könnte; das Moment des dazu normalen *Poinsot*'schen Paares wird dann $\mathfrak{F} = k\mathfrak{R}$.

Zu jeder Schraube findet sich ein linearer Strahlenkomplex, der von den Nulllinien der zu der Schraube gehörigen Liniensumme gebildet wird. Umgekehrt ist die *Ball*'sche Schraube durch diesen Linienkomplex völlig definiert. So steht die Schraubentheorie im unmittelbarsten Zusammenhange mit der Liniengeometrie[39]); vor dieser hat ihre Vorstellungsweise nur den Vorzug einer grösseren Anpassung an den Ideenkreis der Mechanik und der in ihr gewöhnlich zur Verwendung kommenden Zweige der Mathematik. Zudem beschränkt sich *Ball* immer auf die sogenannten allgemeinen Fälle und auf die im Reellen unmittelbar hervortretenden Verhältnisse. Auch hierdurch wird seine Darstellung für manchen Leser leichter zugänglich, bedarf

---

verdeutscht *Fiedler* (Geometrie und Geomechanik) mit Winder und Windung; *Schell* gebraucht (Theorie d. Bewegung) statt Winder wieder die Bezeichnung Dyname. *Study* (Dynamen) verwendet die Bezeichnungen Motor und Impulsor. Der Ausdruck twist war in England auch sonst üblich, vgl. z. B. *Thomson* und *Tait*, Treatise on natural philosophy, 1. Aufl., Oxford 1867.

37) Bei italienischen Autoren passo. *Fiedler* verwendet dafür (Geometrie und Geomechanik) den Ausdruck Pfeil, *Schell* (Theorie d. Bewegung) sagt Pfeil, während er die Schraube auch einen Axenparameter nennt.

38) In dem Worte Drehung liegt ein Doppelsinn, indem man einmal nur die Anfangs- und Endlage des Körpers ins Auge fasst, das andere Mal auch die Zeit, in der die Bewegung erfolgt, berücksichtigt. Denselben Doppelsinn kann man auch dem Worte Schraubung lassen. Die Schraubungskoordinaten sollen aber, wo sie im Text vorkommen, ein- für allemal Geschwindigkeitskomponenten sein, und bedeutet also die Schraubung gelegentlich eine unendlich kleine Verrückung, so sollen dementsprechend die Komponenten derselben noch durch eine sehr kleine Zeit dt, die als Einheit festgesetzt werden kann, dividiert werden.

39) Dieser Zusammenhang ist der Hauptgegenstand des Buches von *J. Santschewsky*, Theorie der Schrauben und ihre Anwendung in der Mechanik (russisch), Odessa 1889. Vgl. auch einen kleinen Aufsatz von *K. Küpper*, Monatshefte f. Math. 1 (1890), p. 95.

dann aber freilich vom mathematischen Standpunkte noch der genaueren Durcharbeitung[39a]).

Sind k und k' die Parameter zweier Schrauben, d der kürzeste Abstand ihrer Axen, φ der Neigungswinkel derselben, sind ferner ϱ und ϱ' die Amplituden zweier zu diesen Schrauben gehörenden Schraubungen, deren Koordinaten mit $u\ldots$ und $u'\ldots$ bezeichnet seien, so findet man

$$pu' + qv' + rw' + up' + vq' + wr' = \varrho\varrho'\{(k + k')\cos\varphi - d\sin\varphi\}.$$

Der eingeklammerte Faktor von $\varrho\varrho'$, der von den Amplituden unabhängig ist, heisst nach *Ball* der *virtuelle Koeffizient* der beiden Schrauben[40]). Wenn er verschwindet, heissen die beiden Schrauben bei ihm *reziprok*. Eine Schraube lässt sich so bestimmen, dass sie zu fünf gegebenen reziprok ist.

14. Schraubenkoordinaten und allgemeinste lineare Transformation derselben. Die sechs Grössen p, q, r, u, v, w lassen sich, sofern sie nicht ihren absoluten Werten, sondern bloss ihren Verhältnissen nach festgelegt sind, als Schraubenkoordinaten betrachten. Statt ihrer kann man aber irgend welche homogene, lineare Verbindungen von ihnen einführen. Liniengeometrisch wurde dies von *F. Klein*[41]) ausgeführt. *Ball* gelangt dazu direkt auf folgende Weise[42]). Eine beliebige Schraubung Ω lässt sich ersetzen durch sechs Schraubungen, welche zu sechs gegebenen Schrauben $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ gehören. Die Amplituden $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$ dieser sechs Schraubungen nennt *Ball* dann die Komponenten der Schraubung Ω nach den sechs gegebenen Schrauben. Führt man ausser den letzteren noch die zu je fünf von ihnen reziproken Schrauben $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_6$ ein und bezeichnet mit $[\omega_i\eta_i]$ den virtuellen Koeffizienten von ω_i und η_i, mit ϱ

39a) Vgl. *E. Study* (Dynamen), sowie den bereits genannten Aufsatz von *F. Klein*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 47 (1902).

40) Die Formel des Textes als gegenseitiges Moment zweier linearer Strahlenkomplexe gab zuerst (1869) *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1870), p. 366. Verschwindet derselbe, so nennt *Klein* die Komplexe in Involution (ebenda, p. 198). Involutorische lineare Komplexe entsprechen also reziproken Schrauben. Insbesondere hat *Klein* dort sechs wechselseitig in Involution liegende Komplexe. Das entspricht dem später von *Ball* eingeführten korreziproken System von sechs Schrauben.

41) Math. Ann. 2 (1870), p. 198.

42) Es ist hier noch darauf hinzuweisen, dass *Ball* selbst zur Festlegung einer Schraube eigentlich nicht die *Verhältnisse* der Koordinaten benutzt, sondern statt dessen die Intensität der Schraubung = 1 nimmt (wobei natürlich eine Unbestimmtheit im Vorzeichen bleibt).

die Amplitude der Schraubung Ω, mit ω ihre Schraube, so werden die sechs Komponenten:

$$\xi_\mu = \varrho \cdot \frac{[\omega\, \eta_i]}{[\omega_i\, \eta_i]}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 6).$$

Die *Verhältnisse* derselben sind als die allgemeinen Koordinaten der zu der Schraubung Ω gehörenden Schraube ω anzusehen, ihre *absoluten Werte* fixieren die Schraubung selbst[43]). Die letztere lässt sich durch das Symbol $\varrho\omega$ bezeichnen, indem so ω zugleich eine Schraubung von der Amplitude 1 bedeutet, und wenn dann ξ_μ' die Koordinaten einer zweiten Schraubung $\varrho'\omega'$ mit der Amplitude ϱ' sind, so haben wir unter $\varrho\omega + \varrho'\omega'$ die Schraubung mit den Koordinaten $\xi_\mu + \xi_\mu'$ zu verstehen. Die Amplitude ϱ ist eine quadratische Form der sechs Koordinaten ξ_μ, welche im einzelnen Falle berechnet werden muss. Für den virtuellen Koeffizienten zweier Schrauben ω und ω' ergiebt sich dann ein Ausdruck von der Form

$$[\omega\omega'] = \frac{\sum\limits_{\mu,\nu} [\omega_\mu\, \omega_\nu]\, \xi_\mu\, \xi_\nu'}{\varrho\varrho'},$$

wo $[\omega_\mu \omega_\nu]$ den virtuellen Koeffizienten von ω_μ und ω_ν bezeichnet.

Besonders ausgezeichnet ist nun der Fall, wo die sechs Schrauben η_μ mit den sechs Schrauben ω_μ zusammenfallen. Solche sechs Schrauben bilden nach *Ball*'s Ausdruck ein *korreziprokes System*. Der virtuelle Koeffizient $[\omega_\mu\, \eta_\mu]$ wird dann dem doppelten Parameter k_μ der Schraube ω_μ gleich und man findet demnach für diese besonderen Schraubenkoordinaten:

$$\xi_\mu = \varrho\, \frac{[\omega\omega_\mu]}{2k_\mu}.$$

Sind ξ_μ' wieder die Koordinaten einer zweiten Schraubung $\varrho'\omega'$, so ergiebt sich für den virtuellen Koeffizienten der beiden Schrauben ω und ω':

$$[\omega\omega'] = \frac{1}{\varrho\varrho'} \sum_\mu 2k_\mu\, \xi_\mu\, \xi_\mu',$$

und hieraus für den Parameter k_ω einer Schraube ω:

$$k_\omega = \frac{1}{\varrho^2} \sum k_\mu\, \xi_\mu^2.$$

Eine Schraube reduziert sich auf eine gerade Linie (als Axe der Drehung, auf die sich die zugehörige Schraubung reduziert), wenn für ihre Koordinaten ξ_μ die quadratische Form $\sum k_\mu\, \xi_\mu^2$ verschwindet;

---

43) *Ball*, Dublin, Trans. 25 (1874), p. 259; Theory of screws, chap. IV.

sie ist eine Links- oder Rechtsschraube, je nach dem Vorzeichen des Wertes, den diese Form erhält[44]).

15. Lineare Schraubensysteme und ihre Bedeutung in den Fällen beschränkter Bewegungsfreiheit eines starren Körpers. In der *Ball*'schen Schraubentheorie spielt die Betrachtung linearer Schraubensysteme eine bedeutende Rolle. Diese sind auf folgende Art zu definieren: Wenn $\omega', \omega'', \ldots, \omega^{(n)}$ $(n < 6)$ irgend welche Schraubungen von der Amplitude 1 sind, so bilden alle Schraubungen $\varrho'\omega' + \varrho''\omega'' + \cdots + \varrho^{(n)}\omega^{(n)}$ ein lineares System n^{ter} Stufe; dasselbe lässt sich auch durch $6 - n$ homogene lineare Gleichungen zwischen den Koordinaten der Schraubungen festlegen. Das zugehörige Schraubensystem von $n - 1$ Dimensionen lässt sich ebenfalls als ein System n^{ter} Stufe bezeichnen. Es ist durch n Schrauben eindeutig bestimmt, und wenn $n + 1$ Schrauben demselben linearen System n^{ter} Stufe angehören, so lassen sie sich stets als Träger (oder Bahnen) von ebensoviel Schraubungen ansehen, die zusammen die Lage des Körpers nicht ändern. Die Schrauben, welche zu sämtlichen Schrauben eines linearen Systemes n^{ter} Stufe reziprok sind, bilden selbst ein lineares System $(6 - n)^{\text{ter}}$ Stufe, welches das zu dem ersten *reziproke System* genannt wird.

Wenn nun ein Körper in seiner Bewegung irgend welchen Hemmungen unterliegt, so müssen die Schraubungskoordinaten u, v, w, p, q, r, welche mit dt multipliziert die in der sehr kurzen Zeit dt erfolgende *Lagenänderung* des Körpers angeben, für jeden Zeitpunkt t gewissen Bedingungsgleichungen genügen. Diese Bedingungen wird man im allgemeinen für jeden Zeitmoment als homogene lineare Gleichungen ansetzen können. Wenn man nämlich die Gleichungen, welche zufolge der Hemmungen zwischen irgend sechs, die Lage des Körpers in jedem Augenblicke festlegenden Grössen[45]) bestehen, nach der Zeit differentiiert und beachtet, dass die Grössen u, v, w, p, q, r mit den Differentialquotienten jener sechs Grössen teils möglicherweise identisch, teils lineare Funktionen von ihnen sind, so sieht man, dass die in Rede stehenden partiellen Derivierten der Bedingungsgleichungen zufälligerweise verschwinden müssten, wenn die Hemmung in einem bestimmten Augenblicke nicht durch lineare Gleichungen zwischen den sechs Schraubungskoordinaten dargestellt werden sollte. Lässt

44) Vgl. wieder *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1870), p 198.

45) Etwa den Koordinaten des Schwerpunktes und drei *Euler*'schen Winkeln φ, ψ, ϑ zur Fixierung der Drehung, die der Körper um diesen Schwerpunkt erfahren hat.

man diese Ausnahmefälle, welche die *Ball*'sche Theorie nicht berücksichtigt, bei Seite, so gelangt man also zu der Theorie der linearen Schraubensysteme, indem man die Gesamtheit aller möglichen Bewegungen betrachtet, welche der Körper bei verschiedenartiger Hemmung seiner Bewegungsfreiheit in einem gegebenen Augenblicke ausführen kann.

Die Beschreibung des linearen Schraubensystems n^{ter} Stufe geschieht bei *Ball* nun so, dass er unter den Axen aller Schrauben des Systems immer diejenigen zusammenfasst, deren zugehörige Schrauben den gleichen Parameter haben. Diese Axen bilden jedesmal ein *lineares* Strahlensystem, und die Axen sämtlicher Schrauben des Schraubensystems setzen sich aus diesen unendlich vielen Strahlensystemen derart zusammen, dass sie ein *quadratisches* Strahlensystem der nächst höheren Stufe bilden. Die Theorie hat so einen wesentlich geometrischen Charakter, ihre Sätze haben aber doch eine bestimmte kinematische Bedeutung und mögen insofern hier kurz berührt werden.

16. Schraubensysteme zweiter Stufe. Das Cylindroid. Hat ein Körper Freiheit zweiter Stufe, so kann sich ein beliebiger Punkt in ihm momentan in einer Ebene verschieben. Ist für *einen* solchen Punkt die Verschiebungsrichtung festgelegt, so ist sie es auch für jeden anderen Punkt. Nur für die Punkte zweier gewissen Linien u und v, die aber auch zusammenfallen oder konjugiert imaginär werden können, ist die Fortschreitungsrichtung von vornherein völlig bestimmt. Jede Bewegung, die der Körper ausführen kann, lässt sich aus zwei Rotationen um diese Linien zusammensetzen, sodass letztere konjugierte Rotationsaxen für jede der Bewegungen sind; dies ist die einfachste Definition der in Betracht kommenden zweifach unendlich vielen Bewegungen. Im allgemeinen erfüllen die Linien, die mit einer gegebenen Linie g zusammen zwei konjugierte Rotationsaxen für eine der möglichen Bewegungen bilden, eine quadratische Regelfläche, die g enthält, so dass es unter diesen Bewegungen eine giebt, bei der g sich selbst konjugiert ist[46]). Die Ebene, in der sich ein beliebiger Punkt verschieben kann, steht senkrecht auf der Linie, die von diesem Punkte aus so gezogen wird, dass sie die beiden Linien u und v trifft. Diese Sätze sind von *G. Schönemann* gegeben worden[47]).

Betrachten wir das zugehörige lineare Schraubensystem zweiter Stufe, das wir kurz als eine Schrauben*schar* bezeichnen wollen, so erfüllen die Axen der Schrauben einer solchen Schar eine besondere

46) *Thévenet*, Thèse Paris 1886. Vgl. den Artikel IV 3 (*Schoenflies*).

47) Berl. Ber. 1855, p. 255 und J. f. Math. 90 (1880), p. 43.

Regelfläche dritten Grades, welche nach *A. Cayley* als *Cylindroid* bezeichnet wird[48]). Um die Gleichung desselben in ihrer einfachsten Form zu erhalten, hat man die gemeinsame Normale der Axen zweier Schrauben, welche die Schar bestimmen sollen, zur z-Axe zu wählen. Dann lassen sich auf eine einzige Art der Koordinatenursprung und die Richtungen der x- und y-Axe so annehmen, dass die Koordinaten einer beliebigen Schraubung des zu der Schraubenschar gehörigen Systems von Schraubungen den vier Gleichungen genügen[49])

$$u - \alpha p = 0, \quad v - \beta q = 0, \quad w = 0, \quad r = 0.$$

Indem wir dann $m = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ setzen, wird die Gleichung des Cylindroids

$$z(x^2 + y^2) = 2mxy;$$

alle Cylindroide sind also einander ähnlich.

Die Koordinaten p und q der Schraubung können willkürlich gewählt werden; die anderen vier Koordinaten ergeben sich dann aus den obigen Gleichungen. Die Axen aller Schrauben der Schar treffen die z-Axe unter rechten Winkeln, und lassen sich durch die zwei Gleichungen

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q}, \qquad z = \frac{2mpq}{p^2 + q^2}$$

darstellen, während der Parameter der zugehörigen Schraube

$$k = \frac{\alpha p^2 + \beta q^2}{p^2 + q^2}$$

wird. Setzt man also $\frac{p}{q} = \operatorname{cotg} \omega$, so wird für den Schnittpunkt der Schraubenaxe mit der z-Axe $z = m \sin 2\omega$ und der Schraubenparameter

$$k = k_0 + m \cos 2\omega,$$

wo k_0 der Abkürzung halber für $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ gesetzt ist.

---

48) Dasselbe fand *G. Battaglini* (Napoli, Rend. 8 (1869), p. 87), indem er den Ort der Centralaxen aller Dynamen (Liniensummen) suchte, die sich aus zwei in gegebenen Linien wirkenden Kräften (Linienteilen) zusammensetzen. Diese Erzeugung des Cylindroids ist ersichtlich ein Spezialfall der im Texte gegebenen. Die letztere fällt übrigens mit der Betrachtung, die *Plücker* (Neue Geometrie des Raumes, p. 97) schon vor *Battaglini* auf das Cylindroid geführt hat, dem Wesen nach zusammen, nur ersetzt *Plücker* die Schrauben durch die zugehörigen linearen Strahlenkomplexe. Er bezeichnet das Cylindroid als Conoid und hat von ihm ein Modell konstruiert. Neuerdings ist ein Modell bei *M. Schilling* (Halle) erschienen. Bei *Ball* tritt das Cylindroid zuerst in der Abhandlung Dublin, Trans. 25 (1871), p. 137 auf. *Cayley* hatte den Namen Cylindroid vorgeschlagen, weil er eine Art gefunden hatte, dasselbe mit Hülfe eines Cylinders zu konstruieren.

49) Vgl. *D. Padeletti*, Napoli, Rend. 22 (1883).

Wenn α und β entgegengesetztes Zeichen haben, ergeben sich zwei reelle Werte von ω und damit zwei reelle Strahlen u und v des Cylindroids, für welche k verschwindet und von denen bei allen Schraubungen der zugehörigen Schar der eine um den anderen ohne Gleitung gedreht wird. Für $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{2}$ erhält k seinen grössten und kleinsten Wert. Die zugehörigen Linien sind die x- und y-Axe und sonach die Axen zweier Schrauben der Schar, die auch sich gegenseitig (und nicht bloss die z-Axe) unter rechtem Winkel schneiden. Sie sollen die *Hauptaxen* des Cylindroids heissen.

Zu jeder Schraube der Schar gehört eine zweite mit demselben Parameter k. Die Axen dieser beiden Schrauben wollen wir *konjugierte Linien des Cylindroids* nennen. Sie kreuzen die Hauptaxen immer unter gleichen, aber in entgegengesetztem Sinne zunehmenden Winkeln und sind von ihnen nach oben und unten gleich weit entfernt.

Zu jedem Cylindroid gehören (wegen der Willkürlichkeit von k_0) einfach unendlich viele Schraubenscharen. Die Parameter der Schrauben irgend einer derselben gehen aber aus denen der Schrauben jeder anderen Schar alle durch Addition desselben Betrages hervor.

Die *Gestalt* des Cylindroids ist aus den mitgeteilten Gleichungen ohne weiteres klar. Die z-Axe ist eine Doppellinie. Durch jeden Punkt derselben gehen zwei Strahlen der Regelfläche. Deren Ebene ist zur Ebene der Hauptaxen ($z = 0$) parallel. Das ganze Cylindroid ist zwischen den beiden Parallelebenen zur Ebene $z = 0$, welche von ihr den Abstand m haben, enthalten. Jede dieser Ebenen enthält zwei zusammenfallende Strahlen des Cylindroids. In einer Ebene durch die Doppellinie, welche mit der y-Ebene den Winkel ω bildet, liegt nur ein Regelstrahl der Fläche, und zwar haben dessen sämtliche Punkte von der z-Ebene den Abstand $z = m \sin 2\omega$.

Ebenso leicht erkennt man die Verteilung der Parameter k auf die verschiedenen Erzeugenden des Cylindroids. Betrachtet man die Ebene durch die Doppellinie des Cylindroids als eine veränderliche Ebene, die sich um diese Doppellinie dreht und deren jedesmalige Lage durch den Winkel ω festgelegt wird, trägt man ferner auf dem in ihr gelegenen Strahle der Regelfläche von der Doppellinie aus eine dem Parameter der zugehörigen Schraube gleiche Strecke ab, so genügen die Koordinaten $k = k_0 + m \cos 2\omega$, $z = m \sin 2\omega$ des Endpunktes P dieser Strecke in der veränderlichen Ebene der Gleichung $(k - k_0)^2 + z^2 = m^2$ eines Kreises. Denkt man sich also, dass der Punkt P sich auf diesem Kreise bewegt und gleichzeitig seine Ebene sich mit halb so grosser Drehungsgeschwindigkeit um die Doppellinie dreht derart, dass wenn

sie durch eine der beiden Hauptaxen geht, der Punkt P gleichzeitig in dieselbe Hauptaxe fällt, dann beschreibt das durch den Punkt P gehende Lot der Doppellinie das Cylindroid. Diese sehr elegante Konstruktion hat *C. T. Lewis*[50]) angegeben. Zu jedem Punkte P des Kreises in der veränderlichen Ebene, die man nunmehr als *Bildebene*[51]) wieder fest lassen kann, gehört so ein Strahl des Cylindroids, und der Abstand dieses Punktes von der z-Axe, die *Ball* als die *Parameteraxe* der Bildebene bezeichnet, giebt gleichzeitig den Parameter der zu diesem Strahle gehörigen Schraube an. Der Abstand der aus zwei Punkten P, P_1 auf die Parameteraxe gefällten Lote misst die kürzeste Entfernung der beiden entsprechenden Linien des Cylindroids, während der Winkel, unter dem diese Linien sich kreuzen, ebenso gross ist wie der Peripheriewinkel über dem von den beiden Kreispunkten P, P_1 begrenzten Bogen.

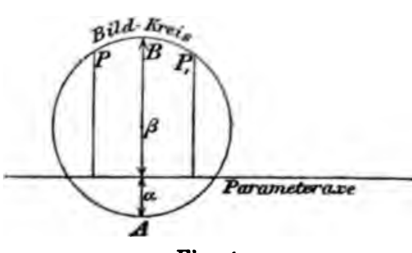


Fig. 4.

Drei Schraubungen des zu der Schraubenschar gehörigen Systems zweiter Stufe ändern dann und nur dann die Lage des Körpers nicht, wenn ihre Amplituden sich verhalten wie die Sinus der Winkel, die jedesmal von den Axen der beiden anderen Schraubungen gebildet werden, oder was dasselbe ist, wie die Seiten des Dreiecks, welches die zugehörigen Punkte auf dem Bildkreise bestimmen. So kann jede Schraubung des Systems von der Amplitude ϱ zerlegt werden in zwei Schraubungen, die in zwei beliebigen Schrauben der Schraubenschar stattfinden, und insbesondere in zwei Schraubungen von den Amplituden $\varrho \cos \omega$ und $\varrho \sin \omega$ in den *Hauptschrauben* (principal screws)[52]), die zu den Hauptaxen des Cylindroids gehören[53]).

17. Schraubensysteme dritter Stufe[54]). Wenn ein Körper Freiheit dritter Stufe besitzt, so kann ein beliebiger Punkt in ihm, aber immer nur durch *eine* der augenblicklich möglichen Bewegungen, jede

50) Mess. of math. 9 (1879), p. 1.

51) *Ball,* Dublin, Proc. (2) 4 (1883), p. 29; *Dublin,* Cunningham Memoirs Nr. 4 (1886); Theory of screws, chap. V.

52) *Ball,* Theory of screws, p. 21.

53) Sehr zahlreiche Litteratur das Cylindroid betreffend ist von *E. Wölffing* und *E. Lampe* im Archiv d. Math. (3) 2 (1901), p. 288, 289 zusammengestellt.

54) *Ball,* Dublin, Trans. 25 (1871), p. 191; 29 (1888), p. 247; Theory of screws, chap. XIV, XV.

beliebige unendlich benachbarte Lage einnehmen. Ist die Richtung, in der *ein* solcher Punkt sich bewegt, festgelegt, so ist sie es auch für jeden anderen Punkt des Körpers. Das zugrunde zu legende Cartesische Koordinatensystem lässt sich nun insbesondere so annehmen, dass es in dem Systeme dritter Stufe drei Schraubungen giebt, welche die Koordinatenaxen zu Axen haben. Sind dann α, β, γ die Parameter der zugehörigen Schrauben, so genügen die Koordinaten einer beliebigen Schraubung des Systems den drei Gleichungen

$$u - \alpha p = 0, \quad v - \beta q = 0, \quad w - \gamma r = 0,$$

hingegen die Koordinaten einer Schraubung des reziproken Schraubensystems, das ebenfalls von der dritten Stufe ist, den drei Gleichungen

$$u + \alpha p = 0, \quad v + \beta q = 0, \quad w + \gamma r = 0.$$

Die Axen aller Schrauben des ersten Systems, denen ein bestimmter Parameter k zukommt, liegen auf einer quadratischen Regelfläche und bilden deren eine Regelschar, während die andere Regelschar von den Axen der Schrauben des zweiten Systems mit dem Parameter $-k$ gebildet wird. Diese Regelfläche hat die Gleichung:

$$(k - \alpha)x^2 + (k - \beta)y^2 + (k - \gamma)z^2 + (k - \alpha)(k - \beta)(k - \gamma) = 0.$$

Alle Flächen, die man aus ihr durch Veränderung des Parameters k gewinnt, sind konzentrisch, und die Richtungen ihrer Hauptaxen fallen zusammen. Besonders ausgezeichnet ist die Fläche, die zu dem Parameter $k = 0$ gehört, deren Gleichung also lautet[55])

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \alpha\beta\gamma = 0.$$

Ball bezeichnet sie als die Parameterfläche (pitch quadric). Jeder Punkt dieser Fläche kann sich instantan bloss in einer Ebene verschieben, und die vorliegende Beschränkung der Bewegungsfreiheit im Unendlichkleinen lässt sich dementsprechend so herstellen, dass man irgend drei Punkte der Parameterfläche an bestimmte Ebenen oder Flächen bindet[56]). Diese Ebenen oder Flächen stehen zu den Strahlen der zum reziproken Schraubensysteme gehörigen, auf der Parameterfläche gelegenen Regelschar, welche durch die angenommenen drei Punkte gehen, senkrecht. Durch die drei Punkte und die drei Ebenen sind also umgekehrt sofort drei Regelstrahlen der Parameterfläche und damit diese selbst bestimmt. Der Parameter k der einen Schraube des Schraubensystems dritter Stufe, deren Axe eine beliebig gegebene

55) Vgl. *J. Plücker*, Neue Geometrie des Raumes, p. 130. Die Fläche ist nichts anderes wie der Ort der Regelschar, welche die zu den Schrauben des Systems gehörigen linearen Strahlenkomplexe gemein haben.

56) *A. Mannheim*, J. éc. polyt. 43 (1870), p. 57.

Richtung hat, steht mit dem Halbmesser $\mathfrak{r}$ der Parameterfläche, welcher die gleiche Richtung hat, in der Beziehung

$$k = -\frac{\alpha\beta\gamma}{\mathfrak{r}^2}.$$

Die Axen dreier zu einander reziproken Schrauben in dem Systeme sind drei konjugierten Durchmessern der Parameterfläche parallel, woraus in Verbindung mit der vorstehenden Gleichung folgt, dass die Summe der reziproken Werte ihrer Parameter konstant ist. Insbesondere sind die Koordinatenaxen als Hauptaxen der Fläche die Axen dreier zu einander reziproken Schrauben des Systems mit den Parametern α, β, γ. *Ball* nennt sie die *Hauptschrauben* des Systems.

Vermöge der Gleichungen, welchen die Koordinaten der Schrauben des Systems genügen, lässt sich der Parameter einer beliebigen unter ihnen in der Form darstellen

$$k = \frac{\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2}{p^2 + q^2 + r^2}.$$ [57])

18. Schraubensysteme vierter und fünfter Stufe. Ein lineares Schraubensystem *vierter* Stufe[58]) ist immer zu einer Schrauben*schar* reziprok. Die Doppellinie des Cylindroids, welches zu der letzteren gehört, hat die Eigenschaft, dass der Körper bei seinen vier Graden der Freiheit beliebig um sie gedreht und in ihrer Richtung verschoben werden kann, und sie ist die einzige Linie von dieser Eigenschaft. Sie kann die *Grundaxe des Systems vierter Stufe* genannt werden. Die Axen aller Schraubungen, welche der Körper ausführen kann, bilden einen besonderen quadratischen Strahlenkomplex, den *d'Emilio*[59]) untersucht hat. Denselben gewinnt man aus dem Cylindroid, das zu der reziproken Schraubenschar gehört, indem man alle Linien zieht, welche je zwei konjugierte Strahlen dieses Cylindroids schnei-

57) Von den Axen der Schrauben des Systems liegen zwei in einer beliebigen Ebene und gehen drei durch einen beliebigen Punkt. Lässt man eine Ebene sich um einen ihrer Punkte P drehen, so bewegt sich der Schnittpunkt der in ihr gelegenen beiden Schraubenaxen auf einer *Steiner*'schen Fläche vierter Ordnung. Dieselbe hat bekanntlich drei gerade Doppellinien, die sich in einem Punkte schneiden. Dieser Punkt ist der Punkt P, um den die Ebene gedreht wird, und die drei Doppellinien sind die Schraubenaxen, die durch ihn hindurchgehen. Diese Sätze sind *Ball* von *C. J. Joly* mitgeteilt worden (s. Theory of screws, p. 182 Note). Die gemeinsame Normale der Axen irgend zweier Schrauben des Systems ist zu jeder Axe einer Schraube des Systems, welche sie trifft, normal. Sie selbst ist die Axe einer Schraube des reziproken Systems, und jede zu einer Schraube dieses Systems gehörige Axe lässt sich so erhalten.

58) *Ball*, Theory of screws, chap. XVI.

59) Ist. Veneto Atti (6) 3 (1885), p. 1135.

den. Der quadratische Komplex besteht somit aus unendlich vielen linearen Kongruenzen. Die Schrauben, die zu den Linien einer dieser Kongruenzen gehören, haben alle gleichen Parameter, und derselbe ist dem Parameter der beiden Schrauben der reziproken Schar, deren Axen die Leitlinien der Kongruenz sind, entgegengesetzt gleich[60]). Die Grundaxe des Systems wird von doppelt unendlich vielen Linien des quadratischen Komplexes getroffen, durch jeden ihrer Punkte gehen einfach unendlich viele und diese liegen allemal in zwei Ebenen, welche die Grundaxe selbst beide enthalten. Wählt man die Axen der beiden Hauptschrauben der reziproken Schar, deren Parameter wieder α und β seien, zur x- und y-Axe eines Cartesischen Koordinatensystems, so lässt sich das lineare Schraubensystem vierter Stufe durch die beiden Gleichungen

$$u + \alpha p = 0, \quad v + \beta q = 0,$$

und der quadratische Komplex der Schraubungen durch die Gleichung

$$(\alpha - \beta) XY + LY - MZ = 0$$

darstellen (wo $X : Y : Z : L : M : N$ die Linienkoordinaten bezeichnen sollen). Die Komplexstrahlen, die in einer Ebene liegen, umhüllen eine Parabel: alle unendlich fernen Linien gehören zu dem Komplexe. Die Komplexstrahlen, die eine bestimmte Richtung haben, liegen auch in einer bestimmten Ebene.

Die Schrauben eines beliebigen linearen Systems *fünfter* Stufe[61]) sind alle zu einer bestimmten Schraube η reziprok. Jede gerade Linie des Raumes ist Axe einer Schraube θ des Systems. Für den Parameter k dieser Schraube findet sich, wenn die gerade Linie die Axe der zu dem Systeme reziproken Schraube η unter dem Winkel φ kreuzt und von ihr den kürzesten Abstand d hat, wenn ferner k_0 der Parameter von η ist:

$$k = d \cdot \operatorname{tang} \varphi - k_0 .$$ [62])

60) Während die durch einen beliebigen Punkt gehenden Strahlen eines quadratischen Komplexes im allgemeinen einen irreducibelen quadratischen Kegel erfüllen, zerfällt dieser Kegel für die Punkte einer bestimmten Fläche vierter Ordnung in zwei Ebenen. Diese Fläche nennt *F. Klein* die Singularitätenfläche des Komplexes. Für den vorliegenden besonderen Komplex zerfällt nun die Singularitätenfläche in das Cylindroid und die unendlich ferne Ebene.

61) *Ball*, Theory of screws, chap. XVII.

62) Lässt man die gerade Linie durch einen festen Punkt P gehen und trägt auf ihr von diesem Punkte aus eine Strecke $= k_0 + k$ ab, so ist der geometrische Ort für den Endpunkt dieser Strecke eine Fläche vierter Ordnung. Die Gleichung derselben erhält man in der einfachsten Form, wenn man den Punkt P zum Koordinatenursprung wählt, die z-Axe parallel der Axe der

Die Axen der Schrauben des Systems von bestimmtem Parameter k, die durch einen gegebenen Punkt P gehen, liegen in einer Ebene. Diese Ebene enthält die aus dem Punkte P auf die Axe der Schraube η gefällte Normale, und ist φ der Winkel, unter dem sie diese Axe schneidet, r der Abstand des Punktes P von derselben, so wird

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{k_0 + k}{r}.$$

Thomson und *Tait*[63]) haben einen Mechanismus angegeben, durch den man einem Körper auf die allgemeinste Weise Freiheit fünften Grades erteilen kann. Dieser Mechanismus besteht einfach in der Verbindung zweier *Hooke*'schen Schlüssel und einer Schraubenspindel, an der sich der Körper entlang schrauben lässt.

19. Homographische Schraubensysteme. Die Bedürfnisse der Mechanik starrer Körper haben *Ball* veranlasst, die Geometrie der Schrauben als selbständiger Elemente eines höheren Raumes noch weiter zu studieren und insbesondere die *projektive Geometrie dieses Raumes* heranzuziehen[64]). Man kann sich davon auf folgende Weise Rechenschaft geben:

Sind ω und ω' zwei Schrauben, k und k' ihre Parameter, $[\omega\omega']$ ihr virtueller Koeffizient, so werde ein Winkel $(\omega\omega')$ durch die Gleichung eingeführt:

$$\cos(\omega\omega') = \frac{[\omega\omega']}{2\sqrt{kk'}}\ ^{65}).$$

Ferner verstehe man unter dem Doppelverhältnis von vier Schrauben 1, 2, 3, 4 einer Schar den folgenden Ausdruck:

$$\frac{\sin(12)\cdot\sin(34)}{\sin(13)\cdot\sin(24)}.$$

Eine Schraubenschar heisse nun zu einer anderen projektiv, wenn die Schrauben beider eindeutig aufeinander derart bezogen sind, dass das Doppelverhältnis von vier Schrauben der einen Schar gleich

---

Schraube η und die y-Axe so annimmt, dass sie diese Schraubenaxe, im Abstande h vom Ursprunge, trifft, und zwar lautet, weil dann $d \cdot \operatorname{tang}\varphi = hx/z$ wird, die Flächengleichung:

$$(x^2 + y^2 + z^2)\,z^2 = h^2 x^2.$$

Ball bezeichnet diese Fläche wegen ihrer Ähnlichkeit mit den Schalen einer Kammmuschel als *Pectenoid* (Dublin, Trans. 25 (1871), p. 137). Die y-Axe ist eine Schneide der Fläche und längs ihr stossen die beiden Schalen zusammen.

63) Treatise on natural philosophy, Art. 201.

64) *Ball*, Dublin, Proc. (2) 3 (1881), p. 435; Theory of screws, chap. XIX.

65) Vgl. *F. Klein*, Math. Ann. 5 (1871), p. 271.

ist dem Doppelverhältnisse der vier entsprechenden Schrauben in der anderen Schar. Ebenso heissen zwei beliebige lineare Schraubensysteme gleicher Dimension *homographisch* (kollinear) aufeinander bezogen, wenn die Schrauben beider Systeme einander derart wechselweise eindeutig entsprechen, dass jeder Schar von Schrauben in dem einen Systeme eine zu ihr projektive Schar in dem anderen Systeme zugeordnet ist. Dann sind die Koordinaten der Schrauben des einen Systems homogene lineare Funktionen von den Koordinaten der Schrauben des anderen Systems, und hierdurch lässt sich umgekehrt die homographische Beziehung analytisch definieren.

Wenn man auf solche Weise die Gesamtheit aller Schrauben linear in sich transformiert, so giebt es im allgemeinen sechs Schrauben, die hierbei ungeändert bleiben, und die Transformation ist bestimmt, sobald zu irgend sieben Schrauben, die keinem linearen Systeme angehören, die entsprechenden Schrauben bekannt sind.

Ein *quadratisches Schraubensystem fünfter Stufe* werde nunmehr durch eine quadratische Gleichung $T = 0$ zwischen den sechs Schraubenkoordinaten ξ_μ dargestellt. Befriedigen dann die Koordinaten θ_μ und ζ_μ zweier Schrauben die bilineare Gleichung

$$\sum_\mu \frac{\partial T}{\partial \theta_\mu} \zeta_\mu = 0,$$

so nennt *Ball* dieselben polare Schrauben (polar screws). Zu allen so definierten Schrauben ζ giebt es eine reziproke Schraube η. Bilden die Fundamentalschrauben der zugrunde gelegten Koordinaten ein korreziprokes System und sind k_μ ihre Parameter, so sind die Koordinaten η_μ der so definierten Schraube η durch die Gleichungen gegeben:

$$\mathsf{H}\eta_\mu = \frac{1}{k_\mu} \frac{\partial T}{\partial \theta_\mu},$$

wo H einen gemeinsamen, willkürlich bleibenden Faktor bezeichnet.

Auf diese Weise erhält man eine besondere Art der homographischen Beziehung, die *Ball* als *chiastische Homographie* bezeichnet. Dieselbe ist dadurch ausgezeichnet, dass wenn zwei Schrauben η und η' den Schrauben θ und θ' entsprechen und η zu θ' reziprok ist, dann auch η' zu θ reziprok ist. Ist η'', θ'' ein drittes Paar entsprechender Schrauben, so lässt sich leicht die Formel beweisen:

$$[\eta\theta'][\eta'\theta''][\eta''\theta] = [\eta\theta''][\eta'\theta][\eta''\theta'],$$

in der $[\eta^{(\varrho)}\theta^{(\sigma)}]$ den virtuellen Koeffizienten zweier Schrauben $\eta^{(\varrho)}$ und $\theta^{(\sigma)}$ bedeuten soll[66]). Danach verschwindet $[\eta'\theta]$, wenn $[\eta\theta'] = 0$ ist.

---

66) Geht man nämlich von der im Text unmittelbar folgenden kanonischen

Durch besondere Wahl des Koordinatensystems lässt sich, ohne dass die Fundamentalschrauben aufhören alle zu einander reziprok zu sein, die quadratische Form T im allgemeinen auf die Gestalt bringen:

$$T = \sum \alpha_\mu \eta_\mu^2.$$

Dann wird

$$\mathsf{H}\,\eta_\mu = \frac{\alpha_\mu \theta_\mu}{2k_\mu},$$

und so sieht man, dass die sich selbst entsprechenden Schrauben im vorliegenden Falle der chiastischen Homographie ein korreziprokes System bilden. Ist die quadratische Form T definit, so müssen diese sich selbst entsprechenden Schrauben gemäss der allgemeinen Theorie der quadratischen Formen immer reell sein[67]).

III. Die Grundzüge der elementaren Statik.

20. Der statische Kraftbegriff. Das Parallelogramm der Kräfte. Der statische Kraftbegriff (vgl. IV 1, *Voss*) stammt wesentlich aus dem ursprünglichen Gefühle der Muskelanstrengung bei Überwindung eines Widerstandes. Indem man nun in der Statik den Zug der Hand oder überhaupt die durch den menschlichen Körper verrichtete Arbeit durch ein gehobenes Gewicht maass und illustrierte, schöpfte man fernerhin die in den einzelnen Beispielen zur Verwendung kommenden Kräfte immer aus der Schwere, dadurch dass man an den Körper geknüpfte Schnüre über Rollen führte und daran Gewichte hing. Dann ist Richtung und Grösse der vorausgesetzten Kraft sofort gegeben, indem die erstere durch die Richtung der Schnur zwischen Körper und Rolle angegeben

Form der Gleichungen für diese Homographie aus und schreibt dieselbe Formel noch einmal für ein zweites Paar entsprechender Schrauben η' und θ':

$$\mathsf{H}'\eta_\mu' = \frac{\alpha_\mu \theta_\mu'}{2k_\mu'},$$

so kann man aus den beiden Formeln die Identität herleiten:

$$\sum \alpha_\mu\,\theta_\mu\,\theta_\mu' = 2\mathsf{H}\sum k_\mu\,\eta_\mu'\,\theta_\mu = 2\mathsf{H}'\sum k_\mu\,\eta_\mu\,\theta_\mu'.$$

Dieser Gleichung lassen sich mit Hinzuziehung eines dritten Paares entsprechender Schrauben η'' und θ'' zwei analoge an die Seite stellen und durch Multiplikation dieser drei Gleichungen gewinnt man mit Rücksicht auf die Bedeutung der Ausdrücke $\sum k_\mu \eta_\mu^{(\varrho)} \theta_\mu^{(\sigma)}$ (vgl. Nr. **14**) die angegebene Formel.

67) Diese Theorie kommt bei der Kinetik der starren Körper zur Verwendung. Vgl. den Artikel IV **6**.

und die letztere durch das angebrachte Gewicht gemessen wird. Der Punkt des Körpers, an dem die Schnur befestigt wird, ist der *Angriffspunkt* der Kraft. Das Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte (IV 1, **19**) erscheint bei diesem Ausgangspunkte als ein reines Ergebnis der Erfahrung, indem man es durch einen einfachen Mechanismus nach Belieben prüfen kann. In diesem Sinne machte es *Varignon*[68]) zur Grundlage der Statik, nachdem schon vor ihm *Stevin*[69]) die Bedingung für das Gleichgewicht zwischen drei an demselben Punkte angreifenden Kräften dahin formuliert hatte, dass diese Kräfte in einer Ebene wirken und die darstellenden Strecken, indem man sie parallel verschiebt, sich zu einem Dreiecke schliessen lassen müssen.

21. Der starre Körper. Das Hebelgesetz. Systeme paralleler Kräfte. Der von *Newton* formulierte dynamische Kraftbegriff (vgl. IV 1, besonders Nr. **22** f.) setzt mit Notwendigkeit die Abstraktion einer punktförmigen Masse voraus, der statische Kraftbegriff hingegen enthält nichts über die Natur des Körpers, auf den die Kraft wirkt, wesentlich ist für ihn nur die Existenz eines bestimmten Angriffspunktes. Man nennt nun einen Körper *starr*, sofern es gestattet ist, den Angriffspunkt irgend einer auf ihn wirkenden Kraft in der Kraftrichtung beliebig zu verschieben. Aus der Verbindung dieses *Axioms des starren Körpers* mit dem Parallelogrammgesetze erwächst dann ein anderes, bis auf *Archimedes* zurückgehendes Gesetz, das sich insbesondere auf gleichgerichtete Kräfte bezieht und das *Hebelgesetz* heisst. Zwei parallele Kräfte vereinigen sich im allgemeinen zu einer gleichgerichteten Resultanten, und das Hebelgesetz lehrt diese Resultante finden. Nur dann, wenn die beiden parallelen Kräfte gleiche Grösse und entgegengesetzten Sinn haben, liegt ein Ausnahmefall vor; wir kommen dann auf den schon in Nr. 8 besprochenen Fall eines *Poinsot*'schen *Paares* (couple, Kräftepaar) zurück.

22. Allgemeine Kräftesysteme. Ihre Reduktion auf zwei zu einander normale Kräfte. *G. Monge*[70]) hat zuerst die allgemeine

68) Projet d'une nouvelle mécanique, Paris 1687. Genau gleichzeitig gab *I. Newton* die *kinetische* Begründung des Parallelogrammgesetzes aus dem Parallelogramme der Bewegungen (Philosophiae naturalis principia mathematica, Axiomata, Cor. 1), und erschien eine Schrift von *B. Lami*, in der dasselbe Gesetz aufgestellt wurde. Man vgl. die Einleitung zu *Lagrange*'s Mécanique analytique = Oeuvres 11.

69) Vgl. das Citat in der Literaturübersicht.

70) Traité élémentaire de statique. Zuerst erschienen 1786, später wiederholt aufgelegt.

Aufgabe behandelt, die Bedingungen für das Gleichgewicht eines Systems *beliebig gerichteter* Kräfte, die an einem starren Körper angreifen, aufzusuchen. Mit dieser Aufgabe steht die Lehre von der statischen Äquivalenz der Kräftesysteme an einem starren Körper (also der *Dynamen*, nach der *Plücker*'schen Bezeichnung) in engstem Zusammenhange, indem zwei Kräftesysteme dann äquivalent heissen, wenn das eine mit überall umgekehrter Kraftrichtung dem anderen hinzugefügt den Körper ins Gleichgewicht bringt.

Um nun ein gegebenes Kräftesystem auf ein äquivalentes, möglichst einfaches System zurückzuführen, ist von dem Axiome des starren Körpers, nach dem sich der Angriffspunkt jeder Kraft in deren Richtung beliebig verschieben lässt, auszugehen. *Die Kraft am starren Körper ist damit ihrer geometrischen Bedeutung nach nichts anderes als ein Linienteil*, und das Parallelogramm- und Hebelgesetz zeigen dann, dass zwei Kräftesysteme äquivalent sind, wenn die den einzelnen Kräften entsprechenden Linienteile beidemal dieselbe Summe ergeben. Daher kommt hier die oben (unter I) entwickelte Geometrie der Linienteile zur unmittelbaren Geltung. Es hat sich aber historisch die Zusammensetzung der Kräfte nicht auf der Geometrie der Linienteile aufgebaut, sondern diese sich vielmehr umgekehrt aus der Statik entwickelt, wie schon oben an verschiedenen Stellen angedeutet wurde.

Um das Problem der Reduktion eines gegebenen Kräftesystems zu lösen, dachte sich *Monge* die Angriffspunkte aller Kräfte so verschoben, dafs sie in eine und dieselbe Ebene π fallen. Dann lässt sich jede Kraft in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine in der Ebene π wirkt, die andere senkrecht dazu gerichtet ist. Nun ist es eine einfache Folge aus dem Axiome des starren Körpers und dem Parallelogramme der Kräfte, dass sich die in der Ebene wirkenden Kräfte im allgemeinen zu einer resultierenden Kraft vereinigen, und gleiches gilt von den parallel, nämlich senkrecht zu der Ebene π gerichteten Kräften. So wird das ganze Kräftesystem auf zwei Kräfte zurückgeführt, deren Richtungen zu einander normal sind. Der beliebig gewählten Ebene π, welcher die eine Kraft angehören soll, ist die Axe p' dieser Kraft, nämlich die Linie, in der sie wirkt, in eindeutiger Weise zugeordnet, und ebenso der Punkt P, in welcher die Ebene von der Axe p der zweiten, zu ihr senkrecht gerichteten Kraft geschnitten wird. Diese Zuordnung, die jeder Ebene π einen in ihr gelegenen Punkt P zuweist, ist keine andere als die des zur Dyname gehörigen *Moebius*'schen Nullsystems (Nr. **10**), und die Linie p' in der Ebene ist deren charakteristische Linie (Nr. **12**, 4). So streifte *Monge*

sehr nahe an die Entdeckung dieser Beziehungen, ohne aber ganz bis zu ihnen vorzudringen.

23. Reduktion eines Kräftesystems auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar. Beziehungen zur Schraubentheorie. Wir bemerkten bereits, dass sich die Theorie der Linienteile ohne weiteres auf die Dynamen überträgt. Dies gilt insbesondere für die oben (Nr. **10**) entwickelte Theorie des vektoriellen Momentes einer Liniensumme[71]). *Poinsot*[72]) hat der hiermit bezeichneten mechanischen Theorie dadurch eine sehr elegante Form gegeben, dass er sie an die Betrachtung der nach ihm benannten Kräftepaare knüpfte (vgl. oben Nr. **6** und Nr. **21**). Sein Verfahren ist folgendes: Er fügt zu jeder Kraft eines gegebenen Systems zwei ebenso grosse und einander entgegengesetzt gerichtete Kräfte hinzu, die an einem festen Punkte O angreifen und sich somit in ihrer Wirkung aufheben. Die an O angreifenden, mit den gegebenen gleich gerichteten Kräfte vereinigt er dann als Kräfte an demselben Punkte zu einer Resultierenden, deren Komponenten nach drei durch den Punkt gehenden Axen gleich $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ werden mögen. Die entgegengesetzt gerichteten Kräfte bilden mit den gegebenen Kräften lauter Kräftepaare. Diese Paare vereinigen sich wie Plangrössen (Nr. **3**) zu einem resultierenden Paare, das mit der resultierenden Einzelkraft zusammen das gegebene Kräftesystem statisch ersetzt. Die Komponenten dieses Paares seien $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$. So gelangt man wieder zu den sechs Grössen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, die im vorliegenden Referate als Koordinaten einer Dyname auftreten[73]). Nur wenn sie alle verschwinden, ist der Körper im Gleich-

71) Dies vektorielle Moment hat die statische Bedeutung, dass, wenn es für einen Punkt verschwindet, der Körper im Gleichgewichte ist, sofern dieser Punkt festgehalten wird. Ebenso halten sich für einen Körper, der nur um eine bestimmte Axe drehbar ist, die vorhandenen Kräfte das Gleichgewicht, wenn die Summe ihrer Momente für diese Axe verschwindet. Auf Grund dieser Momente für eine gerade Linie hat *G. Zeuthen* (Tidsskr. for Math. (5) 4 (1887), p. 145) die Bedingungen für das Gleichgewicht leicht und elegant entwickelt.

72) Eléments de statique, 1804.

73) Statt der „rechtwinkligen" Koordinaten lassen sich zur Festlegung einer Dyname auch tetraedrale Koordinaten verwenden, deren Einführung auf dem Satze von *A. F. Moebius* (J. f. Math. 18 (1838), p. 207 = Werke 1, p. 564) beruht, wonach sich ein beliebiges Kräftesystem durch sechs in den Kanten eines gegebenen Tetraeders wirkende Kräfte ersetzen lässt. Von denselben hat *G. Battaglini* in seinen Untersuchungen (Napoli, Rend. 8 (1869), p. 87; ibid. 9 (1870), p. 89; Giorn. di mat. 10 (1872), p. 133, 207) ausgiebigen Gebrauch gemacht. S. auch *G. Zeuthen*, Math. Ann. 1 (1869), p. 432. *H. Mohr* im Civiling. (2) 34 (1888), p. 691, hat im Besonderen drei sich schneidende Kanten des

gewichte. Die Centralaxe eines Kräftesystems (Nr. 8) ist nach *Poinsot* als die Wirkungslinie einer Kraft ($\mathfrak{R}$) definiert, welche in Verbindung mit einem zu ihrer Richtung senkrechten Kräftepaare (vom Momente $\mathfrak{F}$) dem Kräftesysteme statisch äquivalent ist.

Die Analogie der Liniensummen und Schraubungen führt ferner dazu, dem Kräftesysteme eine Schraubung um die Centralaxe von der Ganghöhe $2\pi\mathfrak{F}/\mathfrak{R}$ zuzuweisen, und die Sätze der Statik dementsprechend auf die Kinematik der starren Körper zu übertragen (Nr. 12). Da die so resultierende Analogie aber bereits oben, nur in anderer Fassung, erörtert ist, sollen jetzt nur solche Dinge hervorgehoben werden, die sich im Falle der Statik in eigenartiger Weise aussprechen. Die Dynamen sind wie die Liniensummen als Schraubengrössen zweiter Art anzusehen, wenn Schraubungen als Schraubengrössen erster Art bezeichnet werden. (Vgl. Nr. 13).

24. Vereinigung zweier Kräftesysteme. Zwei Kräftesysteme Δ_1 und Δ_2 werden zu einem dritten Δ zusammengesetzt, wie aus zwei Schraubungen eine dritte hervorgeht. Die Centralaxen der drei Dynamen liegen also auf dem zugehörigen Cylindroide, und sind $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ die Winkel, unter denen sich dieselben kreuzen, R, R_1, R_2 die resultierenden Einzelkräfte, die in ihnen wirken, dann wird (vgl. Nr. 16):

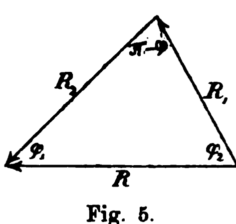


Fig. 5.

$$\frac{\sin\varphi}{R} = \frac{\sin\varphi_1}{R_1} = \frac{\sin\varphi_2}{R_2}.$$

Sind ferner k, k_1, k_2 die Parameter der Schrauben, zu denen die drei Dynamen gehören, d der kürzeste Abstand der Centralaxen von Δ_1 und Δ_2, so ergiebt sich für k folgender Ausdruck

$$k = \frac{k_1 R_1^2 + k_2 R_2^2 + k_{12} R_1 R_2}{R^2},$$

wenn

$$k_{12} = (k_1 + k_2)\cos\varphi - d\sin\varphi$$

den virtuellen Koeffizienten der zu Δ_1 und Δ_2 gehörigen Schrauben bezeichnet. Die Abschnitte d_1 und d_2, in welche die Centralaxe der resultierenden Dyname Δ den kürzesten Abstand d der Centralaxen von Δ_1 und Δ_2 teilt, sind

$$d_1 = \frac{R_1^2}{R^2}d + \frac{R_1 R_2}{R^2}(d\cos\varphi + (k_1 - k_2)\sin\varphi),$$

$$d_2 = \frac{R_2^2}{R^2}d + \frac{R_1 R_2}{R^2}(d\cos\varphi + (k_2 - k_1)\sin\varphi).$$

Tetraeders zu einander normal und an Länge gleich angenommen. Alle diese Systeme sind nur Spezialfälle der ganz allgemeinen Koordinaten einer Dyname, welche den allgemeinen Schraubenkoordinaten entsprechen.

In diesen drei Sätzen hat man die von *Ball* gegebene Verallgemeinerung des für den Fall zweier sich schneidenden Kräfte geltenden gewöhnlichen Parallelogrammsatzes[74]).

25. Kräfte im Gleichgewicht. *J. Sylvester*[75]) sagte von einer Anzahl gerader Linien, dass sie in Involution seien, wenn eine und damit jede von ihnen dem durch die übrigen bestimmten linearen Strahlensysteme angehört, und diesen Ausdruck übertrug *G. Battaglini*[76]) auf die Kräfte und Dynamen. Von n Kräften $f_1, \ldots, f_n$ ($n = 4, 5, 6$), die in diesem Sinne eine Involution bilden, lassen sich immer die Koordinaten der einen aus den Koordinaten der anderen linear zusammensetzen, und die Intensitäten P_i der Kräfte bestimmen sich, wie *W. Spottiswoode*[77]) zuerst angegeben hat, aus den linearen Gleichungen

$$\sum_j P_j (ji) = 0, \qquad i = 1, 2 \cdots n, \quad i \neq j.$$

Hierbei ist (ji) das Produkt aus dem kürzesten Abstande der Axen von f_j und f_i und dem Sinus des Winkels, unter dem dieselben sich kreuzen, nach *Cayley*'s Ausdruck das Moment dieser Wirkungslinien[78]). Aus den obigen Gleichungen folgt, dass im Falle der Involution die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 0 & (12) & \ldots & (1n) \\ (21) & 0 & \ldots & (2n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n1) & (n2) & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

verschwinden muss, was schon *Sylvester*[79]) gefunden hatte. Bezeichnet man mit $D_{11}, D_{22}, \ldots, D_{nn}$ die Hauptunterdeterminanten von D, so ergiebt sich für die Verhältnisse der Intensitäten P_i:

$$P_1 : P_2 : \ldots : P_n = \sqrt{D_{11}} : \sqrt{D_{22}} : \ldots : \sqrt{D_{nn}},$$

und diese Verhältnisse sind allein bestimmt, so dass die Intensität *einer* Kraft willkürlich bleibt.

74) Die Sätze lassen sich auch in folgender Weise formulieren: Fügt man die drei Resultanten R, R_1, R_2 zu einem Dreiecke zusammen, so sind die Winkel in diesem Dreiecke $\pi - \varphi$, φ_1, φ_2. In derselben Weise kommen in dem Dreiecke, dessen Seiten $\sqrt{k}R$, $\sqrt{k_1}R_1$, $\sqrt{k_2}R_2$ sind, die in Nr. 19 für je zwei Schrauben eingeführten Winkel vor. Die verschiedenen möglichen Arten, wie sich das Parallelogrammgesetz für allgemeine Verrückungen oder Kräftesysteme geometrisch erweitern lässt, hat *Study* (Dynamen) ausführlich behandelt.

75) Paris C. R. 52 (1861), p. 741, 815.

76) Napoli, Atti 4 (1869), Nr. 14; Napoli, Rend. 8 (1869), p. 166.

77) Paris C. R. 66 (1868), p. 97.

78) Paris C. R. 61 (1865), p. 829 = Collected Papers 5, p. 542.

79) Paris C. R. 52 (1861), p. 815. Dazu *Chasles*, ebenda, p. 745, 1042.

Im Falle nur vier Kräfte vorhanden sind, ergiebt sich das schon von *Moebius*[80]) gefundene Resultat

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 =$$
$$\sqrt{(23)(34)(42)} : \sqrt{(34)(41)(13)} : \sqrt{(41)(12)(24)} : \sqrt{(12)(23)(31)},$$
$$\sqrt{(23)(14)} + \sqrt{(31)(24)} + \sqrt{(12)(34)} = 0.$$

Hiernach ist der von *Chasles* herrührende Satz[81]) leicht zu beweisen, dass, wenn man die vier Kräfte irgendwie in zwei Paare einteilt, die beiden Tetraeder, von denen die als Strecken dargestellten Kräfte eines Paares jedesmal zwei Gegenkanten bilden, einander inhaltsgleich sind, und dass die Axen der vier Kräfte derselben Regelschar einer Regelfläche zweiten Grades angehören[82]).

26. Arbeit eines Kräftesystems bei einer unendlich kleinen Verrückung. Die Arbeit, welche bei einer unendlich kleinen Verrückung eines starren Körpers von einem auf denselben wirkenden Kräftesysteme geleistet wird, ist durch den Summenausdruck

$$dA = \sum (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

gegeben, in dem die Summation sich auf die Komponenten X_i, Y_i, Z_i aller Kräfte des Systems und die Veränderungen dx_i, dy_i, dz_i der Koordinaten x_i, y_i, z_i ihrer Angriffspunkte zu erstrecken hat. Als Funktionen dieser Koordinaten werden die Differentiale gemäss Nr. 11 durch die Gleichungen

$$dx = (u - ry + qz)dt, \quad dy = (v - qz + rx)dt, \quad dz = (w - qx + pq)dz$$

ausgedrückt. Sind dann noch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die Koordinaten des Kräftesystems, so findet man

$$dA = (\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w + \mathfrak{L}p + \mathfrak{M}q + \mathfrak{N}r)\,dt.$$ [83])

Der rechts in der Klammer stehende Ausdruck muss, sofern Gleichgewicht bestehen soll, bei freier oder irgendwie beschränkter Beweglichkeit des Körpers für jede unendliche kleine Verrückung, welcher derselbe unterworfen werden kann, nach dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten (vgl. IV 1, 30, *Voss*) verschwinden. Hiermit

---

80) Lehrbuch der Statik, 1, § 103.

81) Es ist dies derselbe Satz wie oben in Nr. 7, da irgend zwei der vier Kräfte dieselbe Liniensumme darstellen müssen wie die übrigen zwei, wenn man deren Richtungen umkehrt.

82) Für den Inhalt dieses ganzen Abschnittes vgl. *R. Sturm*, Ann. di mat. (2) 7 (1876), p. 217, und *F. Zucchetti*, Torino, Atti 12 (1876), p. 44.

83) Vgl. *A. F. Moebius*, Lehrbuch der Statik, 1, § 181; *F. Klein*, Math. Ann. 4 (1871), p. 403.

haben wir die einzig mögliche Art, allgemein auf dynamischem Wege (ohne auf die Massenverteilung in dem starren Körper einzugehen) den Kräftesystemen unendlich kleine Bewegungen zuzuordnen. Jedem Kräftesysteme werden nämlich diejenigen Verrückungen oder Schraubungen zugewiesen, bei welchen es *keine* Arbeit verrichtet. Die Koordinaten dieser Verrückungen genügen der linearen Gleichung $dA = 0$, und die Koeffizienten dieser Gleichung sind den Koordinaten des Kräftesystems gemäss der vorstehenden Gleichung proportional, so dass die Kräftesysteme und Schraubungen, wie *F. Klein* sich ausdrückt, in der Beziehung kontragredienter Grössen stehen. Der obige Ausdruck für die Arbeit kann geradezu zur Definition der Koordinaten einer Dyname verwendet werden. Sind dann $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$ die Koordinaten einer zweiten Dyname, so wird die von den beiden Dynamen zusammen geleistete Arbeit $(\mathfrak{X} + \mathfrak{X}')u + (\mathfrak{Y} + \mathfrak{Y}')v + \cdots$; sie sind also zusammengenommen einer Dyname mit den Koordinaten $\mathfrak{X} + \mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y} + \mathfrak{Y}'$, ... statisch äquivalent. So leitet sich auch die Regel für die Zusammensetzung der Dynamen sofort aus dem Arbeitsausdrucke ab. Des weiteren ergiebt sich die Analogie zwischen den Dynamen und den unendlich kleinen Verrückungen, wenn man bemerkt, dass die Gleichung $dA = 0$ eine gegenseitige Beziehung zweier Schrauben aussagt, nämlich dass sie reziprok sind[84]).

Ist nun die Beweglichkeit des Körpers *gehemmt*[85]), so dass zwischen den Koordinaten jeder Schraubung, die er ausführen kann, bestimmte lineare Bedingungsgleichungen bestehen, so ergiebt sich ein zugehöriges lineares System von Dynamen, welche die Eigenschaft haben, dass durch sie das Gleichgewicht des Körpers nicht gestört wird. Die Schrauben, die zu diesen Dynamen gehören, sind einfach zu den sämtlichen Schrauben, welche den dem Körper freistehenden Schraubungen entsprechen, *reziprok*. Allgemeiner: Der in seiner Bewegung gehemmte Körper bewegt sich für gewöhnlich in jedem Augenblicke anders als wenn er frei wäre, und diese Änderung in der Bewegung wird durch eine Dyname bewirkt, welche die Hemmungen liefern. Da hierbei aber, wenn man von der Reibung absieht, keine Arbeit geschehen kann, so

---

84) Dass die Analogie von Kräften und Drehungen aus dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten abgeleitet werden kann, hat schon *O. Rodrigues* bemerkt (J. de math. 5 (1840), p. 436). Vgl. übrigens wieder *F. Klein*, Math. Ann. 4 (1871), p. 403.

85) Man vgl. ausser *Ball*'s Theory of screws die Darstellungen in *Thomson* und *Tait*'s Treatise on natural philosophy und *J. Somoff*'s Theoretischer Mechanik (s. auch des letzteren Arbeit, Petersb. Bull. 18 (1873), col. 162).

gehört die Schraube jeder durch die Hemmungen gelieferten Dyname dem soeben genannten reziproken Systeme an. Man hat damit eine schöne mechanische Bedeutung solcher reziproken Schraubensysteme.

27. Unrichtige Auffassungen der Analogie zwischen Kräften und unendlich kleinen Drehungen. Obwohl die einfache Thatsache, dass sich unendlich kleine Drehungen um einen festen Punkt genau so nach dem Parallelogrammgesetze zu einer neuen Drehung um denselben Punkt vereinigen, wie zwei an dem Punkte angreifende Kräfte zu einer neuen Kraft, zu keinem Kommentare Anlass geben kann, ist die Analogie zwischen Kräften und Drehungen doch fortwährenden Missverständnissen ausgesetzt gewesen. Die Quelle derselben liegt in der unwillkürlichen Annahme einer *kausalen* Verknüpfung. In Wahrheit liegen die Verhältnisse so, dass, wenn $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die auf die Hauptträgheitsaxen bezogenen statischen Koordinaten eines auf einen freien starren Körper wirkenden Systems von Momentankräften sind, die Koordinaten p, q, r, u, v, w der instantanen Schraubung, die sie hervorrufen, sich aus den Gleichungen bestimmen
$$\mathfrak{X} = Mu,\ \mathfrak{Y} = Mv,\ \mathfrak{Z} = Mw,\ \mathfrak{L} = Ma^2p,\ \mathfrak{Y} = Mb^2q,\ \mathfrak{Z} = Mc^2r,$$
wo M die Gesamtmasse des Körpers und a, b, c seine Hauptträgheitsradien bezeichnen. Hieraus ist ersichtlich, dass eine im Schwerpunkte des starren Körpers (dem Ursprunge des zugrunde gelegten Koordinatensystems) angreifende Einzelkraft dem Körper lediglich eine Translationsbewegung in der Kraftrichtung erteilt, und ein auf den starren Körper wirkendes Kräftepaar ihn nur um seinen Schwerpunkt zu drehen strebt. Wenn man also Kräfte und Bewegung als Ursache und Wirkung verknüpft, so müsste der Einzelkraft (die aber an den Schwerpunkt des Körpers gebunden ist) eine Translation, dem Kräftepaare eine Rotation (aber nur um den Schwerpunkt des Körpers) entsprechend gesetzt werden, während die Analogie, von der wir hier handeln, gerade das Umgekehrte konstatiert. Die Analogie hat also mit der in Rede stehenden kausalen Verknüpfung, die als solche in die Kinetik gehört (s. IV 6), nichts zu thun.

Plücker[86]) begeht ebenso einen Fehler, wenn er die Analogie zwischen Kräften und Drehungen geometrisch kurzweg damit interpretiert, dass ja jede Kraft durch zwei Punkte auf ihrer Axe, deren Abstand im Verhältnisse zur Kraftintensität steht, festgelegt werde und analog eine Drehung sich durch zwei Ebenen fixieren lasse, von denen sie die eine in die andere überführen soll. Der Verbindungs-

---

86) Lond. Phil. Trans. 156 (1866), p. 361.

linie der beiden Punkte als Wirkungslinie der Kraft entspricht bei diesem Ansatze die Schnittlinie der beiden Ebenen als Axe der Drehung. Aber die Entfernung der beiden Punkte als Intensität der Kraft lässt sich mit dem Winkel zwischen den beiden Ebenen als Drehungswinkel nur dann unmittelbar in duale Beziehung bringen, wenn der letztere unendlich klein ist. Dies hervorzuheben hat *Plücker* unterlassen. Die metrische Unvollkommenheit der Dualität lässt sich bekanntlich nur dadurch beseitigen, dass man von der generellen, projektiven Maassbestimmung ausgeht, die sich statt auf den imaginären Kugelkreis auf eine allgemeine Fläche zweiter Klasse gründet, oder, was auf dasselbe hinauskommt, den Euklidischen (ebenen) Raum durch einen Raum von konstanter, positiver oder negativer, Krümmung ersetzt. Sollen dann aber Kräfte und Drehungen im Sinne der hier vorliegenden Entwickelungen behandelt werden können, so muss man das Maass für *beide* unendlich klein annehmen. Die Kinematik und Statik starrer Körper, die sich auf diesen Grundlagen aufbaut, hat, nachdem *F. Klein*[87]) darauf hingewiesen, zuerst *F. Lindemann*[88]) ausgeführt. An diese Arbeit hat sich später eine umfangreiche Litteratur[89]) gereiht, und so ist der *Plücker*'sche Irrtum doch die Quelle vieler schöner Untersuchungen geworden[90]). Über diese Dinge wird in Bd. III ausführlich Bericht erstattet.

28. Das Virial. Betrachtet man jede Kraft eines Kräftesystems als an ihren Angriffspunkt *gebunden*, so lässt sich die Arbeit, welche das Kräftesystem bei einer unendlich kleinen Verrückung des starren Körpers leistet, als die Variation des Ausdruckes

$$V_0 = \sum (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i)\,^{91})$$

betrachten, wenn hierbei die Kräfte als unveränderlich der Grösse und Richtung nach angesehen werden[91]), oder auch als die Variation des Ausdruckes

$$V = \sum (X_i (x_i - x) + Y_i (y_i - y) + Z_i (z_i - z)),$$

87) Math. Ann. 4 (1871), p. 403.

88) Math. Ann. 7 (1874), p. 56.

89) Dieselbe findet man zusammengestellt in dem Anhange II zu *Ball*'s Theory of screws. Ein anderes hierauf bezügliches Litteraturverzeichnis findet man bei *A. B. Kotelnikoff*, Theorie der Vektoren, Kasan 1899 (russisch).

90) Man vgl. insbesondere wieder *E. Study* (Dynamen).

91) Vgl. *J. L. Lagrange*, Mécanique analytique, 1. Partie, Sect. III, § V, Nr. 21—27. In IV 1, 48 (*Voss*) erscheint dieser Ausdruck mit dem Faktor $-\frac{1}{2}$ versehen.

in dem x, y, z die Koordinaten eines beliebigen im Raume festen Punktes P sind. Der Ausdruck V heisst nach *R. Clausius*[92]) das *Virial* des Kräftesystems für diesen Punkt P. Nennt man r_i die Abstände des Punktes P von den Angriffspunkten der einzelnen Kräfte des Systems, R_i deren Intensitäten, so wird

$$V = \sum R_i r_i \cos(R_i r_i).$$

Das Virial V ist somit von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig. Ist V das Virial für einen Punkt P mit den Koordinaten x, y, z, so wird das Virial V' für den Punkt P' mit den Koordinaten $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$, wenn $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Komponenten der längs der Centralaxe wirkenden resultierenden Einzelkraft bezeichnen:

$$V' = V + \mathfrak{X}\xi + \mathfrak{Y}\eta + \mathfrak{Z}\zeta.$$

Das Virial nimmt hiernach denselben Wert an für alle Punkte einer jeden Ebene, welche zu der Richtung der resultierenden Kraft, d. h. zu der Centralaxe normal ist, und verschwindet insbesondere für eine unter diesen Ebenen[93]). Den Schnittpunkt dieser Ebene mit der Centralaxe hat *Hamilton*[94]) als das *Centrum* des Kräftesystems eingeführt. Sind $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die statischen Koordinaten des letzteren, $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2$, so findet sich für die Koordinaten x_0, y_0, z_0 dieses Centrums

$$\mathfrak{R}^2 x_0 = V_0\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Z} - \mathfrak{N}\mathfrak{Y},$$
$$\mathfrak{R}^2 y_0 = V_0\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{X} - \mathfrak{L}\mathfrak{Z},$$
$$\mathfrak{R}^2 z_0 = V_0\mathfrak{Z} + \mathfrak{L}\mathfrak{Y} - \mathfrak{M}\mathfrak{X},$$

wo V_0 wie oben das Virial für den Koordinatenursprung bezeichnet. Das Centrum fällt, wenn die Kräfte alle gleichgerichtet sind, mit deren Mittelpunkte (vgl. Nr. 22) zusammen. Aus den vorstehenden Gleichungen ergiebt sich

$$V = \mathfrak{X}(x_0 - x) + \mathfrak{Y}(y_0 - y) + \mathfrak{Z}(z_0 - z).$$

Das Virial ist also für alle Punkte des Raumes gleich dem Viriale der Einzelkraft, die man erhält, wenn man alle Kräfte des Systems

---

92) Paris C. R. 70 (1870), p. 1314 und später. *Clausius* verwertet den Begriff hauptsächlich für ein System materieller, der gegenseitigen Anziehung oder Abstossung unterworfener Punkte bei seinen Versuchen, den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik aus mechanischen Grundvorstellungen abzuleiten. Vgl. IV 1, 48 (*Voss*).

93) Die hier in Betracht kommenden wesentlichen Eigenschaften des Virials hat *F. Schweins* entwickelt, J. f. Math. 38 (1849), p. 77. Er gebraucht statt Virial den Ausdruck Fliehmoment.

94) Elements of Quaternions, 1862, Art. 416.

unter Beibehaltung ihrer Richtung an das *Hamilton*'sche Centrum verlegt und dann zu einer Resultierenden vereinigt. Für alle Punkte einer Ebene, welche zu dieser Resultanten $\mathfrak{R}$ normal ist und von ihrem Angriffspunkte, dem *Hamilton*'schen Centrum, den (nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ gerechneten) Abstand p hat, wird das Virial $= \mathfrak{R} \cdot p$.

Das *Hamilton*'sche Centrum existiert nur dann, wenn $\mathfrak{R} \neq 0$. Wenn $\mathfrak{R} = 0$, wenn also das Kräftesystem sich auf ein Kräftepaar reduzieren lässt, wird es völlig unbestimmt. Dann aber wird das Virial konstant für alle Punkte des Raumes, und das Kräftesystem lässt sich immer so auf ein Kräftepaar mit festliegenden Angriffspunkten reduzieren, dass sein Virial mit dem Viriale dieses Kräftepaares zusammenfällt. Hierzu ist nur nötig, den Winkel ω, den die Richtungen der Kräfte des Paares mit der Verbindungsstrecke ihrer Angriffspunkte, dem Arme des Paares, bilden, geeignet zu bestimmen. Ist r die Länge des Armes, R die Intensität der beiden Kräfte des Paares so wird das Virial

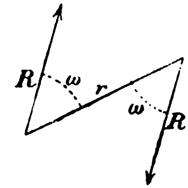


Fig. 6.

$$V = Rr \cos \omega .$$

Es wird also Null für ein *orthogonales* Kräftepaar (dessen Kräfte normal gegen den Arm gerichtet sind). Ersetzt man demnach ein vorgelegtes allgemeines Kräftesystem durch eine Einzelkraft, welche in dem *Hamilton*'schen Centrum angreift, und ein orthogonales Kräftepaar in einer zu dieser Einzelkraft senkrechten Ebene, so wird auch das Virial dieses reduzierten Kräftesystems für alle Punkte des Raumes dasselbe, wie dasjenige des ursprünglichen Kräftesystems [95]).

---

95) Die hiermit skizzierte Lehre vom Virial gehört begrifflich (weil dabei durchweg von *gebundenen* Kräften die Rede ist) mit den im folgenden Abschnitt zu besprechenden Untersuchungen über Astatik zusammen. Es verdient vielleicht erwähnt zu werden, dass die Kräftepaare im Sinne der im Text gegebenen Entwickelungen sich mit den *Hamilton*'schen Quaternionen in enge Beziehung bringen lassen. Ist nämlich $K + Li + Mj + Nk$ eine Quaternion, so lassen sich L, M, N als die Komponenten und K als das negative Virial $- V$ eines Kräftepaares deuten. Dies Kräftepaar ist insofern noch unbestimmt, als es beliebig parallel verschoben und in seiner Ebene gedreht werden darf (so dass Kräfte und Arm sich gleichzeitig drehen). Auch darf die Länge des Armes beliebig verändert werden, wenn die Intensität der Kräfte im umgekehrten Verhältnisse geändert wird. Auf diese Weise erhält man sofort eine Deutung für die Addition zweier Quaternionen. Man hat zu diesem Zwecke nur die zugehörigen zwei Kräftepaare so zu einem neuen Kräftepaare zusammenzusetzen, dass nicht bloss ihre Komponenten, sondern auch ihre Viriale sich addieren. Um dies zu erreichen, hat man

IV. Astatik.

A. Geometrische Einleitung.

Die folgenden drei Paragraphen enthalten eine Reihe sehr bekannter geometrischer Sätze in einer solchen Form, wie sie nicht bloss in den folgenden Entwickelungen dieses Abschnittes, sondern auch in dem Artikel über die Geometrie der Massen zur Verwendung kommen. Ausführlicher sind sie in Band III behandelt; dort findet man auch die zugehörigen litterarischen Nachweise.

29. Ebenenkoordinaten. Polar- und Antipolarsysteme. Ist $Ux + Vy + Wz = T$ die Gleichung einer Ebene, so heissen U, V, W, T, oder vielmehr ihre Verhältnisse $U : V : W : T$, homogene Ebenenkoordinaten. Soll die Ebene eine Fläche zweiten Grades berühren, so müssen diese Koordinaten einer homogenen Gleichung zweiten Grades $\Phi = 0$ genügen. Ist die Gleichung der Fläche in Punktkoordinaten insbesondere auf die Hauptaxen bezogen, so dass sie die Form hat

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

dann wird die Gleichung in Ebenenkoordinaten

$$AU^2 + BV^2 + CW^2 = T^2.$$

Jede Fläche zweiten Grades begründet als „Ordnungsfläche" ein Polarsystem. In demselben ist, falls die Gleichung der Fläche die vorstehende einfache Form hat, einer Ebene mit den Koordinaten U, V, W, T als Pol der Punkt zugeordnet, dessen Koordinaten folgende sind:

$$x = A\frac{U}{T},\ y = B\frac{V}{T},\ z = C\frac{W}{T}.$$

---

sie auf einen gemeinsamen Arm zu bringen, den man in der Schnittlinie ihrer Ebenen oder parallel dazu annehmen muss, und dann die jedesmal in demselben Endpunkte des gemeinsamen Armes angreifenden Kräfte nach dem Parallelogrammgesetze zusammenzufügen. Überhaupt liefert die Anwendung der Quaternionen das Virial eines gebundenen Kräftesystems für einen beliebigen Punkt zusammen mit dessen vektoriellem Momente inbezug auf denselben Punkt. Sind nämlich $\mathfrak{r}_i$ die Vektoren von einem beliebigen Punkte P nach den Angriffspunkten der einzelnen, als Vektoren aufgefassten Kräfte $\mathfrak{f}_i$ des Systems, so wird von der Quaternion $q = \sum \mathfrak{r}_i \mathfrak{f}_i$ der skalare Teil Sq das negative Virial, der vektorielle Teil Vq das vektorielle Moment für diesen Punkt P. Diesen Gedanken hat besonders *K. Heun* verfolgt. Man vergleiche dessen neueste Arbeit in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. 47 (1902): Das Verhalten des Virials und des Momentes eines stationären Kräftesystems bei der Bewegung des starren Körpers.

Die gegebene Ebene selbst ist die Polare dieses Poles. Dieser Ebene ist eine andere Ebene mit den Koordinaten U', V', W', T' „konjugiert" in dem Polarsysteme, wenn

$$AUU' + BVV' + CWW' = TT';$$

es geht dann jede der beiden Ebenen durch den Pol der anderen. Die Tangentialebenen der Ordnungsfläche haben die Eigenschaft, dass sie sich selbst konjugiert sind. Wenn A, B, C negativ, $= -a^2$, $-b^2$, $-c^2$, sind, so wird die „Ordnungsfläche" des Polarsystemes imaginär und das letztere wird als *Antipolarsystem* des Ellipsoides

$$a^2 U^2 + b^2 V^2 + c^2 W^2 = T^2$$

bezeichnet, indem der Pol einer Ebene für dieses Ellipsoid und ihr Antipol (d. h. ihr Pol in dem gegebenen Polarsysteme) symmetrisch gegen das Centrum der Fläche liegen. Hierdurch hat man für das Polarsystem einer imaginären Fläche ein anschauliches Substrat.

Die Gleichung $AU^2 + BV^2 + CW^2 = 0$ stellt einen unendlich fernen Kegelschnitt dar, indem sie für die Tangentialebenen des von O auslaufenden Kegels $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0$ und alle dazu parallelen Ebenen erfüllt ist; die Hauptaxen des Kegels fallen ersichtlich in die Koordinatenaxen. Eine Gleichung $AU^2 + BV^2 = T^2$ hingegen liefert einen Kegelschnitt in der z-Ebene, dessen Hauptaxen mit der x- und y-Axe zusammmenfallen.

Zwei Ebenen mit den Koordinaten U, V, W, T und U', V', W', T' sind zu einander normal, wenn

$$UU' + VV' + WW' = 0$$

ist. Man kann diese Relation als besonderen Fall der polaren Zuordnung auffassen. Die Ordnungsfläche ist in den imaginären Kegelschnitt $U^2 + V^2 + W^2 = 0$ der unendlich fernen Ebene ausgeartet. Durch diesen Kegelschnitt gehen alle Kugeln des Raumes hindurch, und er heisst deshalb der imaginäre Kugelkreis.

30. Konfokale Flächen zweiten Grades. Die sämtlichen Flächen zweiten Grades, deren Gleichungen in Ebenenkoordinaten sich mit Hülfe eines variabelen Parameters $\varLambda$ in der Form schreiben lassen

$$\Phi = \varLambda(U^2 + V^2 + W^2),$$

wo $\Phi = 0$ die Gleichung einer bestimmten Fläche ist, bilden eine (lineare) Schar, welche, für $\varLambda = \infty$, den imaginären Kugelkreis enthält. Die Flächen einer solchen Schar heissen *konfokal*.

a) Ist die Fläche $\Phi = 0$ eine Mittelpunktsfläche, so kann man sie auf ihre Hauptaxen beziehen. Die Flächengleichung in Ebenen-

koordinaten ist dann von der Form $AU^2 + BV^2 + CW^2 - T^2 = 0$. Daher lauten die Gleichungen der konfokalen Flächen in Punktkoordinaten

$$\frac{x^2}{A - \varLambda} + \frac{y^2}{B - \varLambda} + \frac{z^2}{C - \varLambda} = 1.$$

Diese konfokalen Flächen sind konzentrische Mittelpunktsflächen und haben die Hauptaxen der Richtung nach gemein.

Für $\varLambda = A$ reduziert sich die Fläche der konfokalen Schar auf einen Kegelschnitt $(B - A)V^2 + (C - A)W^2 = T^2$ der x-Ebene. Die Gleichungen dieses Kegelschnittes in Punktkoordinaten sind

$$x = 0, \; \frac{y^2}{B - A} + \frac{z^2}{C - A} = 1.$$

Ist $A > B > C$, so ist dieser Kegelschnitt imaginär, dagegen werden unter dieser Annahme die den Werten $\varLambda = B$ und $\varLambda = C$ entsprechenden Kegelschnitte in den anderen beiden Koordinatenebenen:

$$y = 0, \; \frac{x^2}{A - B} - \frac{z^2}{B - C} = 1,$$

$$z = 0, \; \frac{x^2}{A - B} + \frac{y^2}{B - C} = 1$$

reell, und zwar der erste eine Hyperbel, der zweite eine Ellipse. Jeder dieser beiden Kegelschnitte geht durch die Brennpunkte des anderen hindurch. Sie heissen die *Fokalkurven* der konfokalen Flächenschar.

Gehen wir von dem Werte $\varLambda = -\infty$ aus und lassen $\varLambda$ beständig nach der positiven Seite hin fortschreiten, so ist die Fläche erst ein anfänglich sehr grosses, dann aber immer kleiner werdendes Ellipsoid, das sich für $\varLambda = C$ auf das doppelt überdeckte Innere der Fokalellipse in der z-Ebene reduziert. Wächst $\varLambda$ weiter, so wird das Äussere dieser selben Ellipse zu einem einschaligen Hyperboloid, dessen Höhendimensionen mehr und mehr zunehmen, bis es sich schliesslich der Breite nach abplattet und sich für $\varLambda = B$ auf das Äussere der Hyperbel in der y-Ebene reduziert (d. h. denjenigen Teil der Ebene $y = 0$, der von den Tangenten der Hyperbel überdeckt ist). Das Innere derselben Hyperbel wird dann bei weiter wachsendem $\varLambda$ zu einem zweischaligen Hyperboloide auseinandergezogen, dessen beide Schalen sich mehr und mehr nähern, bis sie für $\varLambda = A$ die x-Ebene von beiden Seiten her völlig überdecken. Für $\varLambda > A$ wird die Fläche imaginär.

b) Ist die Fläche $\Phi = 0$ ein Paraboloid und nimmt man dementsprechend ihre Gleichung von der Form $AU^2 + BV^2 + CW^2$

$-2UT=0$, so werden die Gleichungen der Flächen der konfokalen Schar:

$$(A-\varLambda)U^2+(B-\varLambda)V^2+(C-\varLambda)W^2=2UT.$$

Es sind also lauter Paraboloide, welche die Symmetrieebenen gemein haben. Ihre Gleichungen in Punktkoordinaten lauten

$$\frac{y^2}{B-\varLambda}+\frac{z^2}{C-\varLambda}=A-\varLambda-2x.$$

Die reellen Fokalkurven sind Parabeln in den Ebenen $y=0$ und $z=0$, deren Axe in die Ebene $x=0$ fällt und deren jede durch den Brennpunkt der anderen geht.

c) Ist $\Phi=0$ die Gleichung einer unendlich fernen Kurve, die wir der Einfachheit halber in der Form $AU^2+BV^2+CW^2=0$ gegeben denken wollen, so reduzieren sich alle Flächen der konfokalen Schar auf unendlich ferne Kurven:

$$(A-\varLambda)U^2+(B-\varLambda)V^2+(C-\varLambda)W^2=0,$$

und diese werden aus einem beliebigen Punkte des Raumes durch *konfokale* Kegel projiziert, welche die *Fokalstrahlen* gemein haben[96]). Diese Fokalstrahlen laufen nach dem einen Paare reeller Punkte hin, welches in der Schar der unendlich fernen Kegelschnitte enthalten ist und für $A>B>C$ durch die Gleichung dargestellt ist $(A-B)U^2-(B-C)W^2=0$. Entsprechendes ist immer der Fall, wenn Φ eine homogene quadratische Funktion von U, V, W allein ist. —

Durch einen beliebigen Punkt P_0, mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0, gehen drei *reelle* Flächen der konfokalen Schar a), von denen eine ein Ellipsoid, die zweite ein einschaliges und die dritte ein zweischaliges Hyperboloid ist. Die drei Parameter $\varLambda_1$, $\varLambda_2$, $\varLambda_3$, zu denen diese Flächen gehören, sind die stets reellen Wurzeln der kubischen Gleichung für $\varLambda$:

$$\frac{x_0^2}{A-\varLambda}+\frac{y_0^2}{B-\varLambda}+\frac{z_0^2}{C-\varLambda}=1.$$

Die drei durch den Punkt P_0 gehenden Flächen der konfokalen Schar schneiden sich in ihm rechtwinklig, die Tangentialebenen zweier von ihnen in diesem Punkte schneiden sich also in einer Normalen der dritten Fläche, und es werden daher die Richtungscosinus dieser Schnittgeraden den drei Grössen

96) Unter den Fokalstrahlen eines Kegels versteht man zwei Strahlen f, f' von folgender Eigenschaft: Ist g ein beliebiger Strahl des Kegels, so ist die Summe der Winkel fg und $f'g$ für alle Strahlen des Kegels dieselbe. Ferner: Die Ebenen, die g mit f und f' verbinden, bilden mit der Tangentialebene des Kegels in g gleiche Winkel.

$$X = \frac{x_0}{A - A_3}, \quad Y = \frac{y_0}{B - A_3}, \quad Z = \frac{z_0}{C - A_3}$$

proportional (wenn die dritte Fläche zu dem Parameter A_3 gehört).

Die Koordinaten der Tangentialebenen, die sich aus dem beliebigen Punkte P_0 an die zu dem Parameter A gehörige Fläche legen lassen, genügen der Gleichung

$$(A - A)\, U^2 + (B - A)\, V^2 + (C - A)\, W^2 = (x_0 U + y_0 V + z_0 W)^2.$$

Diese Tangentialebenen umhüllen, wenn man A variieren lässt, eine Schar konfokaler Kegel. Die gemeinsamen Symmetrieebenen derselben sind die Tangentialebenen der drei durch den Punkt P_0 gehenden Flächen der konfokalen Schar, und die beiden reellen Fokalaxen der Kegel, die in einer dieser Symmetrieebenen liegen, gehören als Erzeugende der Regelfläche (d. h. dem einschaligen Hyperboloide) an, die sich unter jenen drei Flächen befindet. Diese *Fokalaxen* haben die besondere Eigenschaft, dass, wenn man durch eine von ihnen irgend zwei zu einander normale Ebenen legt, diese bezüglich aller Flächen der konfokalen Schar konjugiert sind.

Die Tangentialkegel, welche sich aus einem Punkte einer der beiden reellen Fokalkurven an die konfokalen Flächen legen lassen, sind sämtlich koaxiale Rotationskegel. Unter ihnen befindet sich auch der Kegel, welche die zweite reelle Fokalkurve enthält. Jede dieser beiden Kurven wird also aus den Punkten der anderen durch lauter Rotationskegel projiziert.

31. Der Reye'sche Axenkomplex. Bildet man für die Grössen x_0, y_0, z_0, X, Y, Z des vorigen Paragraphen die Ausdrücke

$$L = y_0 Z - z_0 Y, \quad M = z_0 X - x_0 Z, \quad N = x_0 Y - y_0 X,$$

so ergiebt sich

$$L : M : N = \frac{B - C}{x_0}(A - A_3) : \frac{C - A}{y_0}(B - A_3) : \frac{A - B}{z_0}(C - A_3)$$

und hieraus

$$\frac{XL}{B - C} = \frac{YM}{C - A} = \frac{ZN}{A - B},$$

oder

$$XL + YM + ZN = 0, \quad AXL + BYM + CZN = 0.$$

Nun sind X, Y, Z, L, M, N, als Linienkoordinaten aufgefasst, die Koordinaten der Normalen im Punkte P_0 für die eine der durch diesen Punkt gehenden konfokalen Flächen ($A = A_3$). Der quadratische Linienkomplex, welcher dementsprechend durch das Nebeneinanderbestehen der vorstehenden beiden Gleichungen dargestellt wird,

heisst der *Reye*'sche *Axenkomplex*[97]). Nach dem Gesagten wird er gebildet von den Normalen der Schar konfokaler Flächen. Er lässt sich aber auch leicht mit Hülfe einer einzigen Fläche der Schar festlegen. Fällt man nämlich aus jedem Punkte auf seine Polarebene bezüglich dieser Fläche die Normale, so bilden alle diese Normalen den Axenkomplex. Man kann auch so sagen: Die Pole einer Ebene bezüglich aller Flächen der konfokalen Schar erfüllen eine gerade Linie, die zu der Ebene normal ist, und alle Linien, die man so erhält, indem man sich die Ebene frei im Raume bewegen lässt, bilden den zu der Flächenschar gehörigen Axenkomplex.

B. Theorie der gebundenen Kräftesysteme und ihrer Drehung.

32. Systeme parallel gerichteter Kräfte. Neben der entwickelten Theorie der Statik, welche die Kräfte als in ihrer Wirkungslinie verschiebbar ansieht, existiert eine andere Theorie, in welcher jede Kraft an ihren Angriffspunkt gebunden bleibt. Seit lange bekannt ist diese Betrachtungsweise für den besonderen Fall eines Systems parallel gerichteter Kräfte. Die auf ein System starr verbundener Massenpunkte wirkende *Schwere* erzeugt ein solches System paralleler Kräfte, deren Angriffspunkte fixiert sind. Dieses System ist, wie auch das Massensystem bewegt wird, immer einer Einzelkraft äquivalent, deren Grösse durch das Gesamtgewicht des Massensystems gegeben ist und dessen Angriffspunkt in dem Massensystem festliegt und als *Schwerpunkt* bezeichnet wird. Die hierin liegenden Regeln für die Zusammensetzung einer beliebigen Anzahl *parallel gerichteter* Kräfte hat zuerst *Varignon*[98]) aus dem Hebelgesetz in der heute allgemein üblichen Form abgeleitet. Wenn nur die Summe der vorgegebenen Kräfte nicht Null ist, lässt sich eine resultierende Kraft an einem bestimmten Punkte, dem *Mittelpunkte* der Parallelkräfte, so anbringen, dass sie die gegebenen Kräfte auch dann noch ersetzt, wenn der Körper mitsamt den Angriffspunkten der Kräfte eine beliebige Verrückung erleidet. Um die Koordinaten x, y, z dieses Mittelpunktes in irgend einem Cartesischen Koordinatensysteme zu ermitteln, seien x_i, y_i, z_i die Koordinaten für die Angriffspunkte der einzelnen parallelen Kräfte, R_i ihre Intensitäten, sei ferner $R = \sum R_i$, die Summe über alle Kräfte des Systems erstreckt, so wird bei gleicher Bedeutung des Summenzeichens

$$Rx = \sum R_i x_i, \quad Ry = \sum R_i y_i, \quad Rz = \sum R_i z_i.$$

97) Der Name rührt daher, dass der Komplex auch als Gesamtheit der Hauptaxen aller ebenen Schnitte einer Fläche zweiten Grades auftritt (*Th. Reye*, Geometrie der Lage 2, 1. Aufl., Hannover 1868, sowie Ann. di mat. (2) 2 (1869), p. 1).

98) Paris, Hist. de l'Acad., Année 1714.

33. Astatisches Gleichgewicht und astatische Äquivalenz. Man sagt von einem starren Körper, er sei in *astatischem Gleichgewichte*, wenn dies Gleichgewicht nicht gestört wird durch irgendwelche Verrückung, welche der Körper erleidet, während die auf ihn wirkenden Kräfte unverändert in derselben Intensität und Richtung an den gleichen Punkten des Körpers angreifen. Da gemäss diesen Festsetzungen das Gleichgewicht durch eine Parallelverschiebung des Körpers von vorneherein nicht gestört werden kann, genügt es für das astatische Gleichgewicht, wenn dasselbe bei der Drehung des Körpers um *einen* Punkt erhalten bleibt. Statt den Körper zu drehen, kann man auch, was die Betrachtung vereinfacht, die Kräfte um ihre Angriffspunkte gedreht denken so, dass die Winkel, die sie mit einander bilden, alle ungeändert bleiben. Spricht man der Kürze halber von einem *gebundenen Kräftesystem*, wenn die Angriffspunkte der Kräfte im Körper festliegen und nicht in der Kraftrichtung verschoben werden dürfen, so nennt man zwei gebundene Kräftesysteme dann *astatisch äquivalent*, wenn das eine, mit überall umgekehrter Kraftrichtung dem anderen hinzugefügt, den Körper in astatisches Gleichgewicht bringt. Sind nun X_i, Y_i, Z_i die Komponenten der einzelnen Kräfte eines Systems, x_i, y_i, z_i die Koordinaten ihrer Angriffspunkte und bildet man die zwölf Grössen:

$$(1)\quad \begin{cases} A_1 = \sum X_i, & A_{11} = \sum X_i x_i, & A_{12} = \sum X_i y_i, & A_{13} = \sum X_i z_i, \\ A_2 = \sum Y_i, & A_{21} = \sum Y_i x_i, & A_{22} = \sum Y_i y_i, & A_{23} = \sum Y_i z_i, \\ A_3 = \sum Z_i, & A_{31} = \sum Z_i x_i, & A_{32} = \sum Z_i y_i, & A_{33} = \sum Z_i z_i, \end{cases}$$

so sind zwei gebundene Kräftesysteme dann und nur dann astatisch äquivalent, wenn sie in diesen zwölf Grössen übereinstimmen und für das astatische Gleichgewicht ist notwendig und hinreichend, dass diese zwölf Grössen verschwinden. Wir können dieselben die *astatischen Koordinaten* eines Kräftesystems nennen[99]).

---

99) Sie sind schon von *F. Minding* eingeführt worden, auf den diese ganze Disziplin zurückgeht. Man vgl. seine zusammenfassende Darstellung in seinem Handbuch der theoretischen Mechanik (Berlin 1837, als 2. Teil des Handbuches der Differential- und Integralrechnung), p. 78 ff. Ferner *M. Steichen*, J. f. Math. 38 (1849), p. 277 und die Darstellungen in *A. F. Moebius'* Lehrbuch der Statik (1837) I, Kap. 8 u. 9; *O. J. Broch*, Lehrbuch der Mechanik, Berlin 1854, p. 82 ff., 134 ff.; *F. Moigno*, Leçons de mécanique analytique, Statique 1868, p. 206 ff. Die letzteren beiden Autoren bringen auch Anwendungen auf die Theorie des Magnetismus. Eine Weiterbearbeitung der Theorie bei *J. Somoff*, Theoretische Mechanik 2 (1879) und endlich in sehr origineller und ergiebiger Weise bei *G. Darboux*, Mémoire sur l'équilibre astatique (Bordeaux, Mém. (2) 2 (1877), sowie als besondere Schrift, Paris 1877; man vgl. auch die Note V in der von

Die früheren statischen Koordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ergeben sich aus denselben in der folgenden einfachen Weise: Es ist
$\mathfrak{X}=A_1$, $\mathfrak{Y}=A_2$, $\mathfrak{Z}=A_3$, $\mathfrak{L}=A_{23}-A_{32}$, $\mathfrak{M}=A_{31}-A_{13}$, $\mathfrak{N}=A_{12}-A_{21}$. Andererseits liegt der Zusammenhang der astatischen Koordinaten mit der Schwerpunktstheorie paralleler Kräfte (Nr. 32), sowie mit dem Virial beliebiger Kräfte (Nr. 28) auf der Hand.

34. Gebundene Kräftepaare[100]). Ein gebundenes Kräftepaar ist ein System von zwei parallelen, gleich grossen und entgegengesetzt gerichteten Kräften, die an bestimmte Angriffspunkte gebunden sind. Die Verbindungsstrecke dieser Angriffspunkte, als Vektor aufgefasst, heisst der (astatische) Arm des Paares. Sind a, b, c die Projektionen desselben auf die Koordinatenaxen, r seine Länge, X, Y, Z die Komponenten der Kräfte des Paares, R ihre Intensität, so werden die astatischen Koordinaten des Paares

$$\begin{array}{l} 0;\ Xa,\ Xb,\ Xc; \\ 0;\ Ya,\ Yb,\ Yc; \\ 0;\ Za,\ Zb,\ Zc. \end{array}$$

Sie bleiben ungeändert, wenn R in beliebigem Verhältnisse vergrössert und r gleichzeitig im umgekehrten Verhältnisse verkleinert wird, oder wenn Arm und Kräfte des Paares zusammen in beliebiger Richtung um eine beliebige Strecke parallel verschoben werden. Das gebundene Kräftepaar lässt sich auffassen als eine unendlich kleine Einzelkraft, deren Angriffspunkt in bestimmter Richtung (der Richtung des Armes) unendlich weit entfernt ist. Wenn von dem gebundenen Kräftepaare die Kräfte in die Richtung des Armes fallen, so lassen sich, indem man die x-Axe in den Arm legt, alle Koordinaten bis auf die eine $A_{11} = Rr$ zum Verschwinden bringen. Jedes System von Parallelkräften mit verschwindender Summe ist einem gebundenen Kräftepaare äquivalent.

35. Das vektorielle Moment eines gebundenen Kräftesystems für eine Ebene. *Monge*[101]) hat dem Momente einer Kraft für einen *Punkt* das Moment einer Kraft für eine *Ebene* gegenübergestellt, indem er hierunter das Produkt aus der Intensität R der Kraft und dem Abstande p ihres Angriffspunktes von der Ebene verstanden

---

Darboux besorgten Ausgabe von *R. Despeyrous*, Cours de Mécanique, t. 1, Paris 1884). Man sehe weiter die auf *Darboux*'s Arbeit fussenden Abschnitte über Astatik in *Schell*'s Theorie der Bewegung und *Routh*'s Analytical statics, vol. 2.

100) *Routh*, Analytical statics, vol. 2, Astatics, p. 307 ff.

101) Traité élémentaire de statique, Paris 1786.

wissen wollte. Dieses Moment ist aber in Wirklichkeit nur der absolute Betrag eines vektoriellen Momentes, dessen Komponenten man findet, indem man die Komponenten X, Y, Z der Kraft einzeln mit dem Abstande p multipliziert. Um nun das Moment eines Kräftesystems für eine Ebene zu definieren, füge man die vektoriellen Momente der einzelnen Kräfte des Systems für diese Ebene nach den Regeln, die für die Addition der Vektoren gelten, zusammen. Der resultierende Vektor repräsentiert dann das Moment des Kräftesystems, dessen Komponenten sonach durch die Summen

$$\Xi = \sum X_i p_i, \quad \mathrm{H} = \sum Y_i p_i, \quad \mathrm{Z} = \sum Z_i p_i$$

gegeben sind. Insbesondere sind die Komponenten des Momentes für die x-Ebene A_{11}, A_{21}, A_{31}, u. s. f.; für die unendlich ferne Ebene und nur für diese sind sie unendlich gross und ihre Verhältnisse $= A_1 : A_2 : A_3$. Für die Ebene, die durch die Gleichung

$$Ux + Vy + Wz = T$$

dargestellt ist, erhält man die Komponenten $\Xi, \mathrm{H}, \mathrm{Z}$ des vektoriellen Momentes aus den Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} \cdot \Xi = A_{11} U + A_{12} V + A_{13} W - A_1 T, \\ \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} \cdot \mathrm{H} = A_{21} U + A_{22} V + A_{23} W - A_2 T, \\ \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} \cdot \mathrm{Z} = A_{31} U + A_{32} V + A_{33} W - A_3 T. \end{cases}$$

Das Moment verschwindet, indem seine drei Komponenten verschwinden, im allgemeinen nur für *eine* Ebene. Diese Ebene ist von *Minding* [102]) und *Moebius* [103]) als *Centralebene* des Kräftesystems bezeichnet worden.

36. Das skalare Moment in Bezug auf eine Ebene. Von dem *vektoriellen* Momente, mit den Komponenten $\Xi, \mathrm{H}, \mathrm{Z}$, geht man zu dem *skalaren* Momente über, indem man den Ausdruck bildet

$$\mathrm{M} = \sqrt{\Xi^2 + \mathrm{H}^2 + \mathrm{Z}^2}.$$

Denkt man sich nun die Kräfte des Systems um ihre Angriffspunkte, alle in der gleichen Weise, gedreht, so treten an die Stelle der Komponenten X, Y, Z einer von ihnen die neuen Komponenten

$$X' = \alpha_{11} X + \alpha_{12} Y + \alpha_{13} Z,$$
$$Y' = \alpha_{21} X + \alpha_{22} Y + \alpha_{23} Z,$$
$$Z' = \alpha_{31} X + \alpha_{32} Y + \alpha_{33} Z,$$

102) J. f. Math. 14 (1835), p. 289.

103) J. f. Math. 16 (1835), p. 1 = Werke 3, p. 523; auch im Lehrbuch der Statik Bd. 1.

wobei die α_{ik} die Cosinus der Winkel zwischen dem gedrehten und dem ursprünglichen Axenkreuz bezeichnen und identisch

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

wird. Dann transformieren sich gleichzeitig Ξ, H, Z zu Ξ', H', Z' in der folgenden Weise

$$\begin{aligned}\Xi' &= \alpha_{11}\,\Xi + \alpha_{12}\,\mathsf{H} + \alpha_{13}\,\mathsf{Z},\\ \mathsf{H}' &= \alpha_{21}\,\Xi + \alpha_{22}\,\mathsf{H} + \alpha_{23}\,\mathsf{Z},\\ \mathsf{Z}' &= \alpha_{31}\,\Xi + \alpha_{32}\,\mathsf{H} + \alpha_{33}\,\mathsf{Z},\end{aligned}$$

und es wird auch

$$\Xi'^2 + \mathsf{H}'^2 + \mathsf{Z}'^2 = \Xi^2 + \mathsf{H}^2 + \mathsf{Z}^2.$$

Das skalare Moment M bleibt also bei der Drehung der Kräfte um ihre Angriffspunkte ungeändert, oder, was dasselbe heisst, es besitzt unveränderlichen Wert für eine Ebene, die im Körper fest ist, wie auch dieser letztere gegen das auf ihn wirkende Kräftesystem bewegt werden mag.

37. Gebundene Komponenten eines Kräftesystems. *R. de Prony*[104]) unternahm die Untersuchung eines allgemeinen Kräftesystems in der Weise, dass er dieselbe auf die Betrachtung parallel gerichteter Kräfte zurückführte. Er dachte sich nämlich jede Kraft des Systems in drei Kräfte mit demselben Angriffspunkte zerlegt, die in drei bestimmten zu einander normalen Richtungen wirken. So wird das vorgelegte Kräftesystem durch drei Systeme paralleler Kräfte ersetzt. Jedes derselben liefert eine einzige resultierende Kraft mit einem bestimmten Angriffspunkt, so dass das gegebene System schliesslich auf drei Kräfte zurückgeführt ist, die in drei zu einander normal aber sonst beliebig angenommenen Richtungen wirken. Lässt man diese Richtungen mit den Richtungen der Koordinatenaxen zusammenfallen, so werden die Intensitäten dieser *gebundenen Komponenten* des gegebenen Kräftesystems:

$$A_1,\ A_2,\ A_3,$$

und ihre Angriffspunkte haben die Koordinaten[105]):

---

104) Gestalt und Umfang seiner ersten Vorlesungen lassen sich sehr gut erkennen aus dem Buche von *L. B. Francœur*, Traité de mécanique élémentaire d'après les méthodes de R. de Prony, Paris 1801. Später veröffentlichte *R. de Prony* selbst seine Leçons de mécanique, Paris 1815.

105) Vgl. *G. Darboux*, Bordeaux, Mém. (2) 2 (1877).

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 = \frac{A_{11}}{A_1}, & y_1 = \frac{A_{12}}{A_1}, & z_1 = \frac{A_{13}}{A_1}, \\ x_2 = \frac{A_{21}}{A_2}, & y_2 = \frac{A_{22}}{A_2}, & z_2 = \frac{A_{23}}{A_2}, \\ x_3 = \frac{A_{31}}{A_3}, & y_3 = \frac{A_{32}}{A_3}, & z_3 = \frac{A_{33}}{A_3}, \end{cases}$$

womit die 12 astatischen Koordinaten eines Kräftesystems eine einfache geometrische Deutung finden.

Diese drei Angriffspunkte liegen in der Centralebene. Die Komponenten aller Kräfte des Systems nach irgend einer Richtung haben also stets einen Mittelpunkt, der in der Centralebene liegt. Die Koordinaten dieses Mittelpunktes werden, wenn α, β, γ die Cosinus der Winkel sind, welche die angenommene Richtung mit den Koordinatenaxen bildet:

$$(4)\quad \begin{cases} x = \frac{A_{11}\alpha + A_{21}\beta + A_{31}\gamma}{A_1\alpha + A_2\beta + A_3\gamma}, \\ y = \frac{A_{12}\alpha + A_{22}\beta + A_{32}\gamma}{A_1\alpha + A_2\beta + A_3\gamma}, \\ z = \frac{A_{13}\alpha + A_{23}\beta + A_{33}\gamma}{A_1\alpha + A_2\beta + A_3\gamma}. \end{cases}$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen α, β, γ, so findet man die Gleichung der Centralebene

$$(5)\quad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ A_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Gleichzeitig ergiebt sich aber, dass, wie man auch das gegebene Kräftesystem auf drei gebundene Komponenten nach drei zu einander normalen Richtungen reduzieren mag, die Angriffspunkte dieser Komponenten immer in der Centralebene die Ecken eines Dreieckes bilden, welches ein Poldreieck in einem bestimmten Antipolarsystem ist[106]). Der reelle Mittelpunkt der zugehörigen imaginären Ordnungskurve ist der *Minding*'sche *Centralpunkt*[107]) (der hiernach von dem in Nr. 28

---

106) *G. Darboux*, Bordeaux, Mém. (2) 2 (1877).

107) Zuerst J. f. Math. 14 (1835), p. 289. Von diesem Centralpunkte wieder verschieden ist der von *A. F. Moebius* so benannte Punkt (J. f. Math. 16 (1837), p. 1 = Werke 3, p. 523). Die in die Centralebene fallenden Komponenten der Kräfte des vorgelegten Systems, d. h. ihre Projektionen auf diese Ebene, lassen sich nach zwei in derselben gegebenen Richtungen aufs neue in Komponenten zerlegen. Dann liegen die Mittelpunkte dieser Systeme paralleler Komponenten,

erwähnten *Hamilton*'schen Centralpunkt durchaus verschieden ist). Seine Koordinaten x_0, y_0, z_0 erhält man, indem man in den Formeln (4) $\alpha : \beta : \gamma = A_1 : A_2 : A_3$ voraussetzt und zwar findet man so

$$(6)\qquad \begin{cases} x_0 = \dfrac{A_1^2 x_1 + A_2^2 x_2 + A_3^2 x_3}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}, \\[2mm] y_0 = \dfrac{A_1^2 y_1 + A_2^2 y_2 + A_3^2 y_3}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}, \\[2mm] z_0 = \dfrac{A_1^2 z_1 + A_2^2 z_2 + A_3^2 z_3}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}, \end{cases}$$

wo die $x_1, x_2, x_3, \ldots$ durch die Formeln (3) gegeben sind. Bringt man für jede Reduktion des vorgelegten Kräftesystems auf drei zu einander normale, gebundene Komponenten in den Angriffspunkten der letzteren Massen an, welche den Quadraten der in ihnen angreifenden Komponenten proportional sind, so fällt der Schwerpunkt dieser drei Massen in den *Minding*'schen Centralpunkt.

Insbesondere lässt sich jedes gebundene Kräftesystem ersetzen durch eine Einzelkraft, die in einem bestimmten Punkte der Centralebene angreift und normal gegen dieselbe gerichtet ist, und zwei Kräfte, die in der Centralebene normal gegen einander wirken. Es lässt sich ferner ein beliebiges, gebundenes Kräftesystem ersetzen durch eine Einzelkraft, die im Centralpunkte angreift, und zwei Kräftepaare, deren Arme zu einander senkrecht sind und deren Kräfte gegen die Einzelkraft normal wirken, während gleichzeitig die Kräfte des einen Paares senkrecht gegen die Kräfte des andern Paares gerichtet sind. Daraus erkennt man, dass durch eine bestimmte gemeinsame Drehung aller Kräfte die Kräfte der beiden Paare in die Richtungen ihrer Arme gebracht werden können, wobei gleichzeitig die Einzelkraft normal zu diesen beiden Armen gerichtet ist. Man kann also (vgl. Nr. 34) durch passende Wahl des Koordinatensystems und Drehung des Kräftesystems alle astatischen Koordinaten des Systems bis auf die folgenden drei zum Verschwinden bringen:

$$A_{11} = P, \quad A_{22} = Q, \quad A_3 = R.$$

Wird das Kräftesystem unter Festhaltung des ausgezeichneten Koordinatensystems wieder in die ursprüngliche Lage zurückgedreht, so müssen sich dann für die astatischen Koordinaten nach den in Nr. 36 angeschriebenen Formeln die Werte ergeben:

---

wie auch ihre Richtungen gegeben seien, immer auf einer bestimmten geraden Linie, der „Centrallinie“. Auf ihr ist der Mittelpunkt aller nach ihrer Richtung genommenen Komponenten enthalten, und diesen Punkt nennt *Moebius* den Centralpunkt. Derselbe ist jedoch nicht, wie der *Minding*'sche Centralpunkt, im Körper fest.

$$\alpha_{13} R;\ \alpha_{11} P,\ \alpha_{12} Q,\ 0;$$
$$\alpha_{23} R;\ \alpha_{21} P,\ \alpha_{22} Q,\ 0;$$
$$\alpha_{33} R;\ \alpha_{31} P,\ \alpha_{32} Q,\ 0.$$

Soll in dieser Lage das Kräftesystem einer Einzelkraft statisch äquivalent sein, so ist die Bedingung hierfür:

$$\alpha_{12} Q = \alpha_{21} P.$$

38. Die von den Ebenen gleichen Momentes umhüllte konfokale Flächenschar. Alle Ebenen, für welche das skalare Moment eines gegebenen Kräftesystems einen konstanten Wert M hat, umhüllen gemäss den Formeln (2) eine Fläche zweiten Grades, deren Gleichung in Ebenenkoordinaten lautet:

$$(7)\quad (A_{11} U + A_{12} V + A_{13} W - A_1 T)^2 + (A_{21} U + A_{22} V + A_{23} W - A_2 T)^2 + (A_{31} U + A_{32} V + A_{33} W - A_3 T)^2 = \mathsf{M}^2 (U^2 + V^2 + W^2).$$

Lässt man hier M im Gebiete des Reellen variieren, so erhält man auf diese Weise die sämtlichen reellen Flächen einer konfokalen Schar[108]). Wird die Lage des Koordinatensystems insbesondere so gewählt und das Kräftesystem so gedreht, dass nur A_{11}, A_{22}, A_3 von Null verschieden sind, so wird die vorige Gleichung von der Form

$$(\mathsf{M}^2 - P^2) U^2 + (\mathsf{M}^2 - Q^2) V^2 + \mathsf{M}^2 W^2 = R^2 T^2$$

oder in Punktkoordinaten

$$\frac{x^2}{\mathsf{M}^2 - P^2} + \frac{y^2}{\mathsf{M}^2 - Q^2} + \frac{z^2}{\mathsf{M}^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Die Axen dieses besonderen Koordinatensystems sind also die gemeinsamen Hauptaxen der konfokalen Flächen. Der gemeinsame Mittelpunkt derselben ist der *Minding*'sche Centralpunkt, die z-Ebene ist die *Minding*'sche Centralebene. Die imaginäre Fokalkurve in derselben, deren Gleichung lautet:

$$\frac{x^2}{P^2} + \frac{y^2}{Q^2} + \frac{1}{R^2} = 0,$$

wird von den Ebenen des Momentes $\mathsf{M} = 0$ umhüllt, unter denen aber nur die Centralebene selbst reell ist. Diese Fokalkurve ist die Ordnungskurve des in der Centralebene gefundenen Antipolarsystems (Nr. 37).

Unter den durch einen festen Punkt P_0 gehenden Ebenen um-

108) Die Verknüpfung der Astatik mit der Theorie der Trägheitsmomente, die ebenfalls auf eine Schar konfokaler Flächen führt, ist der Gegenstand eines Aufsatzes von *D. Padeletti*, Napoli, Rend. 22 (1883), p. 29. Vgl. auch *E. Routh*, Analytical statics, vol. 2, Astatics, Art. 33 ff.

hüllen dem Gesagten zufolge die Ebenen gleichen Momentes je einen Kegel aus einer konfokalen Kegelschar. Errichtet man auf jeder der Ebenen im Punkte P_0 das Lot und trägt auf diesem den reziproken Wert des zugehörigen Momentes als Strecke auf, so erfüllen die Endpunkte dieser Strecken ein Ellipsoid, dessen Hauptaxen mit den gemeinsamen Hauptaxen der konfokalen Kegel zusammenfallen und welches von *Darboux* als das *Centralellipsoid* des Punktes P_0 eingeführt worden ist[109]). Wird P_0 zum Koordinatenursprunge gewählt, so hat sein Centralellipsoid die Gleichung:

$$(A_{11}x+A_{12}y+A_{13}z)^2+(A_{21}x+A_{22}y+A_{23}z)^2+(A_{31}x+A_{32}y+A_{33}z)^2=1.$$

Die Hauptaxen der Centralellipsoide aller Punkte des Raumes bilden den *Reye*'schen Axenkomplex der Schar konfokaler Flächen, die von den Ebenen gleichen Momentes umhüllt werden.

Die Ebenen, die durch eine beliebige gerade Linie g gehen, zeigen paarweise gleiches Moment. Diese Ebenenpaare bilden eine Involution, und für die Doppelebene dieser Involution wird das Moment am grössten und am kleinsten unter allen Ebenen, welche die Linie g enthalten. Wenn die Linie g zu dem Axenkomplexe der konfokalen Flächen gehört, sind die Doppelebenen zu einander normal und halbieren die Winkel aller Ebenenpaare gleichen Momentes; es sind die Paare der Tangentialebenen, welche durch die Gerade an die verschiedenen Flächen der konfokalen Schar gehen.

In einem Büschel paralleler Ebenen giebt es immer *eine* Ebene, für welche das Moment ein Minimum wird, und zwar geht diese Ebene durch den Mittelpunkt der parallelen Kräfte hindurch, welche die normal zu den parallelen Ebenen genommenen Komponenten der Kräfte des vorgelegten Systemes bilden.

89. Die statischen Axen von F. Siacci (für einen beliebigen Punkt). Der Minding'sche Satz. Ein gegebenes Kräftesystem lässt sich astatisch ersetzen durch eine Einzelkraft, deren Angriffspunkt O beliebig bleibt und deren Komponenten stets $= A_1, A_2, A_3$ werden, verbunden mit drei Kräftepaaren, deren Arme irgend drei durch O gehenden und zu einander normalen Axen angehören. Das vektorielle Moment jedes dieser Kräftepaare für diejenige Ebene, welche die Arme der beiden übrigen enthält, ist natürlich dem vektoriellen Momente des vorgelegten Kräftesystemes für dieselbe Ebene gleichzusetzen. Fallen die Arme der drei Kräftepaare in die Koordinatenaxen, so werden die astatischen Koordinaten dieser Paare

109) Bordeaux, Mém. (2) 2 (1877).

$$0;\ A_{11},\ 0,\ 0;$$
$$0;\ A_{21},\ 0,\ 0;$$
$$0;\ A_{31},\ 0,\ 0;\ \text{u. s. w.}$$

Legt man die drei Arme insbesondere in die Hauptaxen des Centralellipsoides für den Punkt O, so werden die Kräfterichtungen der drei Kräftepaare zu einander normal. Der Körper lässt sich, wie man hieraus sieht, im allgemeinen durch Drehung um einen beliebig angenommenen Punkt O in eine solche Lage bringen, dass das auf ihn wirkende Kräftesystem in statischer Hinsicht einer in O angreifenden Einzelkraft äquivalent wird. Ist eine solche Lage gefunden, so ergeben sich drei andere, indem man den Körper um jede der Hauptaxen des Centralellipsoides für den Punkt O eine halbe Umdrehung ausführen lässt. Die Axen der vier Rotationen um den Punkt O, durch die man den Körper aus der ursprünglichen in diese vier Lagen bringt, heissen nach *F. Siacci*[110]) die *statischen Axen* dieses Punktes. Die Ebene durch irgend zwei von ihnen ist zu der Ebene durch die zwei übrigen normal.

In den Linien der vier Kräfte, welchen das Kräftesystem in den vier Lagen statisch äquivalent wird, schneiden sich zwei Kegel der konfokalen Kegelschar, welche zu dem Punkte O gehört, und zwar projizieren diese Kegel die beiden reellen Fokalkurven der im Körper festen konfokalen Flächenschar. Werden nämlich die gemeinsamen Symmetrieebenen der konfokalen Flächen wieder als Koordinatenebenen gewählt, so sind die Koordinaten y, z des Punktes, in dem die Wirkungslinie einer der vier Einzelkräfte die x-Ebene trifft, aus den beiden Gleichungen zu bestimmen (vgl. Nr. 37 Ende):

$$\alpha_{12} Q - \alpha_{21} P = \alpha_{13} R y, \quad -\alpha_{31} P = \alpha_{13} R z.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich mit Hülfe der beiden Relationen

$$\alpha_{31} Q = \alpha_{12} P, \quad \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 - \alpha_{12}^2 = \alpha_{13}^2$$

alle darin vorkommenden α_{ik} eliminieren, und man findet, dass y und z der Gleichung der einen Fokalkurve

$$\frac{y^2}{P^2 - Q^2} + \frac{z^2}{P^2} = \frac{1}{R^2}$$

genügen. Ebenso genügen die Koordinaten x, z des Schnittpunktes mit der y-Ebene der Gleichung der anderen reellen Fokalkurve

$$-\frac{x^2}{P^2 - Q^2} + \frac{z^2}{Q^2} = \frac{1}{R^2}.$$

110) Torino, Atti 17 (1882), p. 241. Vgl. dazu *C. Segre*, Modena, Mem. (3) 6 (1884).

Für jeden Punkt O auf einer dieser Fokalkurven wird das Centralellipsoid eine Rotationsfläche, deren Axe die Fokalkurve in dem Punkte O berührt und somit einer Symmetrieebene der konfokalen Flächenschar angehört. Hat man das Kräftesystem um irgend eine Axe so gedreht, dass es sich statisch auf eine Einzelkraft reduziert, deren Axe dann beide Fokalkurven schneidet, so kann man das Kräftesystem noch einer weiteren Drehung um die Fokalkurventangente in einem dieser Schnittpunkte unterwerfen, es bleibt dann immer noch einer Einzelkraft äquivalent, und diese Einzelkraft dreht sich mit dem Kräftesysteme um die Tangente der Fokalkurve, indem ihre Linie stets auch die andere Fokalkurve trifft. Dies ist der *Minding*'sche Satz[111]).

40. Verallgemeinerung des Minding'schen Satzes durch G. Darboux[112]). Im Vorstehenden sind die besonderen Lagen des drehbaren Kräftesystems betrachtet, in denen es sich auf eine Einzelkraft reduziert. Für eine beliebige Lage dagegen hat es eine Centralaxe, und wenn man seine Kräfte auf alle die dreifach unendlich vielen möglichen Arten einer gemeinsamen Drehung um ihre Angriffspunkte unterwirft, so bewegt sich hierbei, wie *G. Darboux* gefunden hat, die Centralaxe in einem quadratischen Linienkomplexe, der sich dadurch definieren lässt, dass sich in seinen Linien immer zwei zu einander normale Ebenen schneiden, von denen jede eine der beiden Fokalkurven berührt[112]). Zu diesen Linien gehören natürlich auch diejenigen, welche beide Fokalkurven treffen, d. h. die Axe jeder Einzelkraft, auf welche sich das Kräftesystem reduzieren lässt.

41. Moebius' Hauptaxen der Drehung. Jede Fokalaxe (vgl. Nr. 31 Ende) der konfokalen Flächenschar gehört einer Regelfläche aus dieser Schar an und hat die besondere Eigentümlichkeit, dass das skalare Moment des gegebenen Kräftesystems für alle durch sie hindurchgehenden Ebenen dasselbe ist. Es lassen sich, wie *A. F. Moebius* gefunden hat[113]), immer in zwei Punkten auf ihr solche Kräfte anbringen, dass das Kräftesystem diesen beiden Kräften in der ursprünglichen Lage und jeder anderen Lage, die aus dieser durch Drehung um die Fokalaxe hervorgeht, statisch äquivalent wird. *Moebius* nennt die Fokalaxen deswegen die Hauptaxen der Drehung für das Kräftesystem.

111) J. f. Math. 15 (1836), p. 27. Vgl. auch *G. Plarr,* Edinb. Roy. Soc. Proc. 11 (1883), p. 528.

112) *G. Darboux,* Bordeaux, Mém. (2) 2 (1877).

113) Lehrbuch der Statik 1, § 137 f.

42. Besondere Fälle astatischer Koordinaten. Wenn ein gebundenes Kräftesystem der invarianten Bedingung genügt, dass die drei astatischen Koordinaten A_1, A_2, A_3 *verschwinden*, so lässt es sich immer auf drei gebundene Kräftepaare astatisch reduzieren, deren Arme den Axen eines beliebig gewählten Cartesischen Koordinatensystems angehören. Das Moment M eines solchen Kräftesystems ist für eine Ebene, deren Normalen Richtungscosinus haben, die sich wie $U:V:W$ verhalten, durch die Gleichung gegeben:

$$\mathsf{M}^2(U^2+V^2+W^2)=(A_{11}U+A_{12}V+A_{13}W)^2+(A_{21}U+A_{22}V+A_{23}W)^2 + (A_{31}U+A_{32}V+A_{33}W)^2.$$

Es ist also dasselbe für parallele Ebenen, wird aber für keine reelle, im Endlichen gelegene Ebene Null, und unbestimmt für die unendlich ferne Ebene. Die konfokale Flächenschar reduziert sich auf eine Schar unendlich ferner Kegelschnitte, die aus jedem Raumpunkte durch konfokale Kegel projiziert werden. In den gemeinsamen Hauptaxen dieser Kegel liegen die Arme von drei Kräftepaaren, welche zusammen das vorliegende Kräftesystem astatisch ersetzen und deren Kräfterichtungen zu einander normal sind[114]). Der Körper lässt sich sonach im allgemeinen auf vier verschiedene Arten ins Gleichgewicht bringen, und es ergiebt sich so der Satz[115]), dass, wenn ein starrer Körper in einer Lage im Gleichgewichte ist, er es mindestens (von Parallelverschiebungen abgesehen) noch in drei anderen Lagen ist.

Insbesondere kann der Fall eintreten, dass ein Körper im Gleichgewichte bleibt, wenn man ihn um eine gerade Linie beliebig dreht. Diese Linie heisst dann nach *Moebius* eine *Axe des Gleichgewichtes*[116]). Damit eine solche existiert (womit dann auch jede Linie von derselben Richtung eine Axe des Gleichgewichtes wird) ist erforderlich und hinreichend, dass die Schar der soeben untersuchten konfokalen Kegel für einen und damit für jeden endlichen Punkt sich auf eine Schar koaxialer Rotationskegel reduziert. Die Bedingung hierfür ist durch das Verschwinden der Determinante

114) Es ist dies die früher (in Nr. 37) gegebene Reduktion, nur dass hier die resultierende Einzelkraft in Wegfall kommt.

115) *A. F. Moebius* hatte (Lehrbuch der Statik 1, § 134) den Satz aufgestellt, dass wenn ein Körper in vier Lagen im Gleichgewicht sei, er es auch in jeder beliebigen fünften Lage sein müsse. Dieser Satz bedarf also, wie *G. Darboux* bemerkt hat, der wesentlichen Einschränkung, dass die vier Lagen nicht vier zusammengehörige Lagen des Gleichgewichtes sein dürfen.

116) Lehrbuch der Statik 1, Kap. 8.

$$\begin{vmatrix} -(A_{22}+A_{33}) & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & -(A_{33}+A_{11}) & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & -(A_{11}+A_{22}) \end{vmatrix}$$

gegeben, indem man in der ursprünglichen Lage Gleichgewicht und damit $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ voraussetzt. Die Richtungscosinus α, β, γ der Axen des Gleichgewichtes bestimmen sich dann aus den Gleichungen:

$$-(A_{22}+A_{33})\alpha + A_{12}\beta + A_{13}\gamma = 0,$$
$$A_{21}\alpha - (A_{33}+A_{11})\beta + A_{23}\gamma = 0,$$
$$A_{31}\alpha + A_{32}\beta - (A_{11}+A_{22})\gamma = 0.$$

Verschwindet im Falle $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix},$$

so giebt es eine Schar paralleler Ebenen, für welche das Moment M des Kräftesystems $= 0$ wird. Diese Ebenen sind dann zu der gemeinsamen, inneren Hauptaxe der Scharen konfokaler Kegel für die einzelnen Raumpunkte normal.

Verschwindet endlich die Determinante Δ mit allen Unterdeterminanten, so wird das Kräftesystem einem gebundenen Kräftepaar astatisch äquivalent. Das Moment M desselben für eine beliebige Ebene ist gleich dem Produkte aus der Intensität seiner Kräfte und der Projektion seines Armes auf die zur Ebene senkrechte Richtung. Es verschwindet also insbesondere für alle Ebenen, die zu dem Arme parallel sind. Die Schar der konfokalen Kegel wird für jeden Punkt eine Schar von Rotationskegeln, deren gemeinsame Axe dem Arme des Kräftepaares parallel ist. In der That kann man den unter der Einwirkung des Kräftepaares stehenden Körper durch Drehung um eine beliebige, zur Ebene des Paares senkrechte Axe ins Gleichgewicht bringen, und dieses Gleichgewicht bleibt allemal erhalten, wenn man den Körper irgendwie um eine zum Arme des Paares parallele Axe dreht[117]).

117) Wenn A_1, A_2, $A_3 \neq 0$ sind, aber Δ verschwindet, so giebt es ein Ebenenbüschel, und wenn Δ mit allen Unterdeterminanten verschwindet, ein Ebenenbündel, für welches das Moment $= 0$ ist. Wird im letzteren Falle

$$A_{11} : A_{21} : A_{31} = A_{12} : A_{22} : A_{32} = A_{13} : A_{23} : A_{33} = A_1 : A_2 : A_3,$$

so ist der Scheitel des Ebenenbündels Mittelpunkt des Kräftesystems, indem dieses sich für alle Lagen durch *eine* in diesem Mittelpunkte angreifende Kraft ersetzen lässt.

(Abgeschlossen im Februar 1902.)

IV 3. KINEMATIK.

VON

A. SCHOENFLIES IN KÖNIGSBERG I/PR.

MIT EINEM ZUSATZE*) VON **M. GRÜBLER** IN DRESDEN.

Inhaltsübersicht.

---

*) Dieser Zusatz umfasst die Nummern **28—30**.

Litteratur *).

Lehrbücher **).

J. B. Bélanger, Traité de *cinématique*, Paris 1864.
D. Bobylew, Analytische Mechanik, Teil 1, Kinematik, St. Petersburg 1885 (russisch).
E. Bour, Cours de mécanique et de machines, Paris 1865.
L. Burmester, Lehrbuch der *Kinematik*, Leipzig 1888.
W. K. Clifford, Elements of *dynamic*, part. 1, London 1878; part. 2, London 1887.
F. Grashof, Theoretische *Maschinenlehre*, Bd. 2, Berlin 1883.
G. Königs, Leçons de *cinématique*, Paris 1897.
Ch. Laboulaye, Traité de cinématique, Paris 1849.
A. Mannheim, Principes et développements de *géométrie cinématique*, Paris 1894.
Th. Olivier, Théorie géométrique des *engrenages*, Paris 1842.
J. Petersen, *Kinematik*, Kopenhagen 1884.
H. Poincaré, *Cinématique* et mechanismes, Paris 1899.
H. Résal, Traité de *cinématique* pure, Paris 1862.
F. Reuleaux, Theoretische *Kinematik*, Bd. 1, Braunschweig 1875.
W. Schell, *Theorie der Bewegung* und der Kräfte, Bd. 1, Leipzig 1870; 2. Aufl. Leipzig 1879.
A. Schoenflies, *Geometrie der Bewegung* in synthetischer Darstellung, Leipzig 1886.
J. Somoff, Theoretische Mechanik, übersetzt von *A. Ziwet*, Bd. 1: *Kinematik*, Leipzig 1878.
W. Thomson and *P. G. Tait*, *Treatise* on natural philosophy, vol. 1, Oxford 1867; letzte Auflage vol. 1, part. 1, 2, Cambridge 1890.
H. Weiss, Grundsätze der *Kinematik*, Leipzig 1900 (im Erscheinen).
R. Willis, Principles of *mechanism*, London 1841.

Monographieen und grundlegende Abhandlungen.

L. Allievi, Cinematica della *biella piana*, Napoli 1895.
S. Aronhold, Grundzüge der *kinematischen Geometrie*, Verh. d. Ver. z. Beförd. d. Gewerbefl. 51 (1872), p. 29 ff.
M. Chasles, Mémoire de géométrie sur la *construction des normales* à plusieurs courbes mécaniques, Bull. Soc. math. de France 6 (1878), p. 208 ff. ***).
M. Chasles, Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace, Paris C. R. 16 (1843), p. 1420; Propriétés relatives au *déplacement fini* quelconque dans l'espace d'une figure de

---

*) In der durch den Druck hervorgehobenen Abkürzung ist das betreffende Werk im Texte citiert.

**) Man vgl. auch die Abschnitte über Kinematik in den in IV 1 (*Voss*) und IV 2 (*Timerding*) genannten Lehrbüchern.

***) Das Mémoire stammt aus dem Jahre 1829.

forme invariable, Paris C. R. 51 (1860), p. 855, 905 und 52 (1861), p. 77, 179, 487.

D. Chelini, Dei *moti geometrici* e loro leggi nello spostamento di una figura di forma invariabile, Bologna Mem. (2) 1 (1862).

W. Dyck, Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, München 1892.

L. Euler, Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum, Petersburg, Novi Comm. 20 (1776), p. 189 ff.

Ph. Gilbert, Recherches sur les *accélérations* en général, Brux. Ann. Soc. scientif. 13 (1889), p. 261 u. 18 (1894), p. 205.

M. Grübler, Allgemeine Eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinematischen Ketten, Civilingenieur (2) 29 (1883), p. 167 und Verh. d. Ver. z. Beförd. d. Gewerbefl. 64 (1885), p. 179.

G. Ph. de la Hire, Traité des *roulettes*, Paris, Hist. de l'Acad. 1706, p. 340.

Ch. Hochmann, Die Kinematik der Maschinen, Odessa 1890 (russisch).

A. B. Kempe, How to draw a *straight line*, London 1877.

A. Mannheim, Sur les *surfaces trajectoires* des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujeti à quatre conditions, J. de math. (3) 1 (1875), p. 57 ff.

R. Müller, Beiträge zur Theorie des ebenen *Gelenkvierecks*, Braunschweig 1897 (Festschrift); abgedruckt in Zeitschr. f. Math. 42 (1897), p. 427.

J. Neuberg, Sur quelques systèmes de *tiges articulés*, Lüttich 1886.

L. Poinsot, Théorie nouvelle de la *rotation* des corps, Paris 1834.

O. Rodrigues, Des lois géométriques qui régissent le *déplacement d'un système solide* dans l'espace, J. de math. 5 (1840), p. 380 ff.

J. Schadwill, Das *Gliederviērseit* als Grundlage der Kinematik, Verh. d. Ver. z. Beförd. d. Gewerbefl. 55 (1876), p. 378.

J. Somoff, Mémoire sur les *accélérations* de divers ordres, Petersburg Abh. 8, Nr. 5 (1864).

J. Steiner, Von dem *Krümmungsschwerpunkt* ebener Kurven, J. f. Math. 21 (1838).

E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1901 (im Erscheinen).

J. J. Sylvester, On recent discoveries in mechanical *conversion of motion*, Lond. Roy. Inst. Proc. 7 (1875), p. 179—198. Übersetzt u. a. in Revue scientif. (2) 4 (1874), p. 490—498.

A. Endliche Bewegungen.

1. Die einfachsten Typen der Bewegungen und Umlegungen. Die Kinematik betrachtet die Bewegungsgesetze unabhängig vom Begriff der Kraft und jeder sonstigen dynamischen Vorstellung. Ihre methodische Abspaltung von der allgemeinen Mechanik geht auf *A. M. Ampère*[1]) zurück[2]).

---

1) Essai sur la philosophie des sciences, Paris 1834, p. 48; auszugsweise mitgeteilt von *F. Reuleaux*, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 34 (1890), p. 244. Vgl. auch *A. Transon*, L'Institut 38 (1870), p. 117. *Ampère* hoffte, dass das Studium der Bewegungen und Geschwindigkeiten in erster Linie für die Theorie der Mecha-

Die einfachsten Bewegungen sind die *Schiebung* oder *Gleitung* (Translation), die *Drehung* (Rotation) und die *Schraubung* (Torsion)[3], d. h. diejenige Bewegung, bei der eine Drehung um eine Axe und eine Gleitung längs dieser Axe gleichzeitig und gleichförmig ausgeführt werden[4]). Andrerseits kann auch *jede* Ortsveränderung eines Raumgebildes durch eine dieser drei Bewegungen vermittelt werden. Dass jede Ortsveränderung eines Körpers, von dem ein Punkt O fest ist, durch Drehung um eine durch O gehende Axe a ausführbar ist, entdeckte *L. Euler*[5]). Bewegt sich eine Ebene σ in sich, so lässt sich gleichfalls jede Lagenveränderung durch Drehung um einen ihrer Punkte (Drehungscentrum O) ausführen; die Drehung wird zur Gleitung, falls O ins Unendliche fällt. Diesen Satz gab zuerst *M. Chasles*[6]); man verdankt ihm auch den allgemeineren Satz, dass die allgemeinste Ortsveränderung eines Körpers Σ stets durch eine gewisse Schraubung $\mathfrak{A}(\alpha, \tau)$ um eine bestimmte Axe bewirkt werden kann. Die Schraubung wird zur Drehung oder Gleitung, je nachdem die Gleitungskomponente τ oder der Drehungswinkel α gleich Null ist. Der Fall $\alpha = \pi$ hat durch Untersuchungen von *H. Wiener* theoretische Bedeutung erlangt (Nr. 2); ihm entspricht eine *Umwendung* oder *Umschraubung*, je nachdem $\tau = 0$ ist oder nicht.

Es ist zweckmässig, mit der Theorie der Bewegungen die Theorie derjenigen Raumtransformationen zu verbinden, die den Raum Σ in ein

---

nismen nutzbringend sein würde. *J. V. Poncelet* hat alsbald in Vorlesungen, die er 1838 hielt, eine dementsprechende Theorie der Maschinen aufzustellen begonnen.

2) Der Teil der Kinematik, der auch von dem *zeitlichen* Verlauf der Bewegung abstrahiert und nur die Lagen ins Auge fasst, die das bewegliche Gebilde der Reihe nach einnimmt, wird als *Geometrie der Bewegung* bezeichnet. Er ist durch *M. Chasles* geschaffen worden, sein weiterer Ausbau knüpft sich vorwiegend an den Namen von *A. Mannheim*. Für *Mannheim* war übrigens die kinematische Ableitung von Sätzen und Resultaten zur Theorie der Kurven und Flächen das eigentliche Ziel der Untersuchung. Auch *G. Darboux* und seine Schüler haben die Kinematik für diesen Teil der Geometrie mit vielem Erfolg benutzt (Leçons sur la théorie générale des surfaces, 4 Bde., Paris 1887—1896). In der gleichen Richtung bewegen sich die Lezioni di geometria intrinseca von *E. Cesàro*, Napoli 1896 (deutsch von *G. Kowalewski* unter dem Titel: Vorlesungen über *natürliche Geometrie,* Leipzig 1901).

3) Eine Drehung um die Axe a vom Winkel α werde durch $\mathfrak{A}(\alpha)$ bezeichnet; eine Schraubung um a vom Winkel α und der Gleitung τ durch $\mathfrak{A}(\alpha, \tau)$.

4) Es sind dies zugleich die Bewegungen, deren Bahnen durch sie in sich übergehen.

5) Petersburg, Novi Comm. 20 (1776), p. 202. Statt der Bewegung um O kann man auch die Bewegung einer Kugelfläche in sich betrachten; für sie ist der Schnitt mit a das bezügliche Drehungscentrum.

6) Bull. des scienc. de *Férussac* 14 (1830), p. 321 resp. 324.

ihm *spiegelbildlich gleiches Gebilde* $\bar{\Sigma}$ überführen, und die man neuerdings als *Umlegungen* bezeichnet[7]; auch *Chasles*[8] hat sich bereits mit ihnen beschäftigt. Genau genommen kommen Umlegungen nur für dreidimensionale Gebilde in Betracht; man muss sie aber auch innerhalb einer Ebene σ ins Auge fassen, wenn man verlangt, dass die Ebene aus ihrer Lage niemals heraustritt.

Für den bezüglichen Übergang von σ in $\bar{\sigma}$ existieren zwei einfachste Typen von Umlegungen. Es kann σ in $\bar{\sigma}$ durch *Spiegelung* an einer Geraden g oder durch Spiegelung an g in Verbindung mit einer Gleitung längs g übergehen.

Für den Übergang von Σ in $\bar{\Sigma}$ sind vier verschiedene einfachste Typen vorhanden. Er kann bewirkt werden durch *Spiegelung* an einem Punkt O (*Inversion*), durch Spiegelung an einer Ebene ε, durch Spiegelung an einer Ebene ε und Drehung um eine zu ε normale Axe[9] (*Drehspiegelung*), endlich durch Spiegelung an ε und Gleitung längs ε. Die drei ersten Typen sind zugleich diejenigen, die in Frage kommen, wenn ein Punkt von Σ fest bleibt, wie zuerst *E. Hessel*[10] erkannt hat.

Die vorstehenden elementaren Sätze besitzen eine tiefere Quelle in der allgemeinen Theorie incidenter projektiver Ebenen und Räume (III A 5, *Schoenflies*). Von den drei Doppelpunkten kollinearer Ebenen fallen nämlich, wenn die Ebenen kongruent sind, zwei in die *imaginären Kreispunkte*, und der dritte in das Drehungscentrum; bei allen Bewegungen von σ in sich bleiben daher die Kreispunkte *fest*. Ferner haben zwei kongruente Räume den *Kugelkreis* und auf ihm zwei Punkte entsprechend gemein; die Ebenen durch sie und die Schraubenaxe liefern zwei Ebenen des gemeinsamen Tetraeders, während die andern zwei in die doppeltzählende unendlich ferne Ebene fallen. Diese Thatsachen zeigen zugleich die Bedeutung, die die *imaginären Kreispunkte* und der *Kugelkreis* für die in der Kinematik auftretenden Kurven und Flächen besitzen, und diesen vielfach einen speziellen Charakter aufprägen[11].

---

7) Vgl. z. B. *E. Study* in Math. Ann. 39 (1891), p. 441.

8) Paris C. R. 51 (1861), p. 126.

9) Ist der Drehungswinkel π, so ergiebt sich eine Inversion; jede durch O gehende Axe kann als Drehungsaxe gewählt werden.

10) Vgl. den Artikel über Krystallographie in Bd. 5[1] von *Gehler*'s physikalischem Wörterbuch, Leipzig 1830, sowie den bez. Artikel in Bd. V der Encyklopädie.

11) Diesen speziellen Charakter hat zuerst *A. Mannheim* hervorgehoben, Surfaces trajectoires, p. 59.

2. Zusammensetzung von Bewegungen und Umlegungen. Wenn ein Raumgebilde zuerst eine Bewegung oder Umlegung $\mathfrak{A}$ und dann eine zweite $\mathfrak{B}$ erfährt, so kann der Übergang aus der Anfangslage in die Endlage immer auf eine der in Nr. 1 genannten typischen Weisen bewirkt werden. Diese *resultierende* Operation $\mathfrak{C}$ ist immer und nur dann eine Bewegung, wenn sowohl $\mathfrak{A}$ als $\mathfrak{B}$ Bewegungen resp. Umlegungen sind. Wird zuerst $\mathfrak{B}$ und dann $\mathfrak{A}$ ausgeführt, so ist die resultierende Operation $\mathfrak{C}_1$ im allgemeinen von $\mathfrak{C}$ verschieden; ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1$, so heissen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *vertauschbar*[12]). Diese Bezeichnung hängt damit zusammen, dass man auf Bewegungen und Umlegungen den formalen Begriff der *Multiplikation* anwenden kann. Man schreibt $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ und nennt $\mathfrak{C}$ das *Produkt* von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; für diesen Produktbegriff besteht das *associative*, aber im allgemeinen nicht das kommutative Gesetz[13]).

Gleitungen sind Vektoren; ihre Zusammensetzung bestimmt sich daher durch ihre Addition (IV 2, *Timerding*). Um für zwei Rotationen[8]) $\mathfrak{A}(\alpha)$ und $\mathfrak{B}(\beta)$, deren Axen a und b sich in O schneiden, die resultierende Drehung $\mathfrak{C}(\gamma)$ zu bestimmen, konstruiert man die Axe c durch O so, dass $\sphericalangle\, cab = \frac{1}{2}\alpha$ und $\sphericalangle\, cba = \frac{1}{2}\beta$ ist, und hat $\sphericalangle\, acb = \frac{1}{2}(\pi - \gamma)$. Dies findet den einfachsten Ausdruck in der folgenden von *W. R. Hamilton*[14]) stammenden Formulierung: Drehungen, die nach einander um die Axen a, b, c um resp. die doppelten Winkel des von ihnen gebildeten Dreikants erfolgen, führen den Raum in seine Anfangslage zurück.

Sind die Axen a und b *parallel*, so ist auch c ihnen parallel, und es ist $\gamma = \alpha + \beta$; die Lage von a, b, c ist ebenfalls nach dem *Hamilton*'schen Satz bestimmt. Ist dabei $\alpha + \beta = 0$, so bilden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ein *Drehungspaar*, und die resultierende Bewegung ist eine Gleitung τ, deren Richtung zu a und b senkrecht ist[15]). Man kann daher jede Drehung durch eine Drehung vom gleichen Winkel um eine parallele Axe und eine zur Axe senkrechte Gleitung ersetzen. Hieraus folgt weiter, dass jede Schraubung durch irgend eine Gleitung und eine Drehung vom gleichen Winkel um eine zur Schraubenaxe parallele

12) Bei den einfachen Operationen von Nr. 1 sind die Komponenten stets vertauschbar.

13) Für eine ausführliche Darlegung vgl. z. B. *H. Wiener*, Leipz. Ber. 42 (1890), p. 249 ff., sowie *A. Schoenflies*, Krystallsysteme und Krystallstruktur, Leipzig 1891, p. 31 ff.

14) Lectures on quaternions, Dublin 1853, § 217 u. 344; vgl. auch *A. F. Möbius*, Leipz. Ber. 11 (1859), p. 138.

15) Ist AB Abstand von a und b, so ist $\tau = 2AB \sin \frac{1}{2}\alpha$.

Axe ersetzbar ist, sodass hier ähnliche Sätze und Formeln Platz greifen, wie bei den unendlich kleinen Bewegungen (IV 2); nur dass hier die Folge der Bewegungen im allgemeinen nicht vertauschbar ist[16]).

Die Zusammensetzung zweier Schraubungen findet den einfachsten Ausdruck durch einen Satz, der demjenigen *Hamilton*'s analog ist. Sind a, b, c irgend drei windschiefe Geraden, u, v, w ihre gemeinsamen Lote und trifft z. B. u die Geraden b und c in U_b und U_c, so lautet er: Werden um a, b, c der Reihe nach Schraubungen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ausgeführt, sodass

$$\alpha = 2(vw), \quad \beta = 2(wu), \quad \gamma = 2(uv),$$
$$\tau_\alpha = 2\,V_a W_a, \quad \tau_\beta = 2\,W_b U_b, \quad \tau_\gamma = 2\,U_c V_c$$

ist, so kommt durch diese Schraubungen Σ wieder in seine Anfangslage zurück. Dieser Satz wurde seinem Inhalt nach zuerst von *G. Halphen*[17]) aufgestellt. Um für ihn sowie für den Satz *Hamilton*'s die einfachste Quelle aufzudecken, muss ich einer neueren Untersuchungsrichtung Erwähnung thun, deren methodische Ausnützung für die vorliegenden Fragen auf *H. Wiener*[18]) zurückgeht, und die darauf hinausläuft, als Elementaroperationen solche der Periode 2 zu verwenden, d. h. diejenigen, deren zweimalige Ausführung den Raum wieder in seine Anfangslage zurückführt.

Bewegungen dieser Art giebt es nur *eine*, nämlich die *Umwendung*; Umlegungen giebt es *zwei*, die *Spiegelung* an einem *Punkt* und an einer *Ebene*. Jede dieser Operationen ist also durch einen Punkt resp. eine Gerade oder Ebene unmittelbar definiert[19]). Eine *beliebige* Bewegung oder Umlegung lässt sich als Produkt aus *zweien* dieser Operationen darstellen; insbesondere kann eine Schraubung als Produkt von zwei Umwendungen aufgefasst werden (Nr. 5). Dieser Umstand ist es, auf dem die methodische Zweckmässigkeit des *Wiener*schen Gedankens beruht. Bewegungen und Umlegungen ordnen sich damit in die Klasse derjenigen Verwandtschaften ein, die als Produkt

---

16) Diese Sätze und die zugehörigen Formeln dürften von *O. Rodrigues* stammen; vgl. Déplacement d'un système solide, § 10 ff.

17) Nouv. ann. (3) 1 (1882), p. 296. Vgl. auch *W. Burnside*, Mess. of math. (2) 19 (1889), p. 104, der einen auf nicht-euklidische Bewegungen übertragbaren Beweis und die aus ihm folgende Konstruktion der resultierenden Schraubung gab. Für diese Konstruktion vgl. auch *H. Wiener*, Leipz. Ber. 42 (1890), p. 76.

18) Leipz. Ber. 42 (1890), p. 245 ff.; 43 (1891), p. 424, 644.

19) *H. Wiener* bezeichnet deshalb die Umwendung auch als *Spiegelung an einer Geraden* (a. a. O. p. 431).

zweier involutorischen Verwandtschaften darstellbar sind, und gestatten die Übertragung der bezüglichen allgemeinen Begriffe und Sätze[20]).

Für die Zusammensetzung der Spiegelungen und Umwendungen bestehen folgende Sätze: Sind $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}_1$ Spiegelungen an den Punkten M und M_1, so ist $\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1$ eine Gleitung τ und es ist $\tau = 2MM_1$; sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ Spiegelungen an ε und ε_1, so ist $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ eine Drehung $\mathfrak{A}(\alpha)$ um die Gerade $a = (\varepsilon\varepsilon_1)$ und es ist $\alpha = 2(\varepsilon\varepsilon_1)$; sind $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ Umwendungen um u und v, so ist $\mathfrak{U}\mathfrak{V}$ eine Schraubung $\mathfrak{A}(\alpha, \tau)$ um den kürzesten Abstand von u und v, es ist $\alpha = 2(u, v)$ und $\tau = 2UV$, wo U und V die Schnittpunkte von u und v mit a sind. Hiernach ergiebt sich der Satz von *Halphen* unmittelbar aus der evidenten Identität

$$\mathfrak{V}\mathfrak{W} \cdot \mathfrak{W}\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{U}\mathfrak{V} = 1,$$

ebenso fliesst der Satz von *Hamilton* direkt aus der Formel

$$\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2 \cdot \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3 \cdot \mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_1 = 1,$$

wenn $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ Spiegelungen an den Ebenen der dreiseitigen Ecke a, b, c sind[21]).

Man kann fragen, auf *wie mannigfache Art* eine Bewegung oder Umlegung durch andere Operationen, insbesondere durch involutorische ersetzbar ist. Für einen speziellen Fall haben zuerst *C. Moshammer* und *H. Wiener* diese Frage gestellt und beantwortet[22]). Allgemeiner hat *E. Study*[23]) diese Probleme behandelt. So ist z. B. eine Umlegung auf ∞^3 Arten durch drei Spiegelungen ersetzbar, eine Bewegung im allgemeinen auf ∞^2 Arten durch zwei Umwendungen, auf ∞^4 Arten durch zwei Drehungen, auf ∞^6 Arten durch vier Spiegelungen an Ebenen u. s. w. u. s. w.

Die Sätze über Zusammensetzung von Umlegungen ergeben sich

---

20) Vgl. *H. Wiener*, Leipz. Ber. 43 (1891), p. 658.

21) Wird diese Formel auf parallele Axen angewandt, so führt sie zu dem Satz von *C. Stephanos*, dass drei incidente Lagen σ_1, σ_2, σ_3 aus *einer* Ebene $\bar{\sigma}$ durch Spiegelung an drei Geraden g', g'', g''' erhalten werden können (Bull. Soc. philom. (7) 6 (1881), p. 13). Dieser Satz bildete den Ausgangspunkt von *Halphen*; sein eigener Satz ist dessen Verallgemeinerung auf den Raum.

22) Wien. Ber. 73² (1876), p. 143 und Leipz. Ber. 42 (1890), p. 85. Der spezielle Fall betrifft die Überführung einer Geraden g in g_1. Es giebt ∞^2 Schraubungen, die es leisten; sie bilden eine auf einer Geraden u' senkrechte lineare Kongruenz. Soll ein Punkt P nach P_1 gelangen, so sind dazu ∞^1 Schraubungen tauglich, die ein Cylindroid bilden, u. s. w.; vgl. IV 2, 16.

23) Math. Ann. 39 (1891), p. 487 ff. Für Bewegungen besonderer Art modifizieren sich die obigen Sätze.

aus den vorstehenden durch Reduktion der Umlegungen in ihre Bestandteile [24]).

3. Der Dualismus in der Bewegung. Dem relativen Charakter der Bewegungsbegriffe entsprechend kann man die Bewegung von Σ gegen Σ' auch als Bewegung von Σ' gegen Σ auffassen; es hängt dies nur davon ab, ob man sich selbst während des Bewegungsvorganges in Σ oder Σ' befindlich denkt. Die eine Bewegung wird als *Umkehrung* der andern bezeichnet.

Es ist *M. Chasles* [25]), der zuerst darauf hinwies, dass wenn der Punkt A von σ in σ' die Kurve a' beschreibt, bei der umgekehrten Bewegung von σ' in σ die Kurve a' stets durch A geht. Allerdings kam es *Chasles* mehr auf die technische Seite dieses „*Dualismus*" an; für die Theorie haben ihn besonders *S. Aronhold* [26]) und später *A. Schoenflies* [26]) verwertet.

Die eben erwähnte Beziehung gilt auch in der Weise, dass wenn ein Punkt A von σ n-mal auf eine Kurve c' fällt, bei der umgekehrten Bewegung c' n-mal durch A geht. Hieraus folgt: 1) Sind die Bahnkurven einer ebenen Bewegung von der Ordnung n, so sind die Enveloppen der Geraden der anderen Bewegung von der n^{ten} Klasse; 2) hat für die eine Bewegung die Bahn von A einen Wendepunkt, so ist A für die umgekehrte Bewegung Spitze der zur Wendetangente gehörigen Enveloppe. Analoge Beziehungen bestehen für die räumliche Bewegung. Fällt A n-mal in die Ebene α', so geht bei der umgekehrten Bewegung α' n-mal durch A und es folgt: 1) Sind für die eine Bewegung die von den Punkten, Geraden und Ebenen erzeugten Gebilde algebraisch, so sind sie es auch für die andere Bewegung; 2) der Grad der von den Geraden erzeugten Regelflächen ist für beide Bewegungen der gleiche; 3) die Ordnung der Bahnkurven der einen Bewegung ist gleich der Klasse der abwickelbaren Flächen der andern; sind die Kurven eben, so sind die genannten Flächen Kegelflächen [27]).

Die *Bahnkurven* und *Bahnflächen* beider Bewegungen sind im

---

24) *E. Study,* Math. Ann. 39 (1891), p. 487; *H. Wiener,* Leipz. Ber. 43 (1891), p. 431 ff., sowie *A. Schoenflies,* Krystallsysteme und Krystallstruktur, p. 49 ff. u. 341 ff.

25) Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Paris 1875, p. 408.

26) Kinematische Geometrie, p. 134 ff. u. Paris C. R. 101 (1885), p. 150.

27) *G. Darboux,* Paris C. R. 92 (1881), p. 119. Analoge Sätze bestehen bei Freiheit zweiter Stufe (Nr. 20).

allgemeinen verschiedener Natur[28]). Für *jede* Bewegung von σ in σ' gilt aber der Satz, dass wenn ein Punkt A von σ in σ' einen Kreis um A' beschreibt, auch A' in σ einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt wieder A ist. Ebenso wenn ein Punkt A von Σ auf einer Kugel von Σ' bleibt, so bleibt das Centrum A' dieser Kugel in Σ auf einer Kugel um A. Dieselbe Reciprocität besteht, wenn A in n Lagen auf einem Kreis oder einer Kugel um A' liegt; es liegt dann auch A in n Lagen auf dem Kreis oder der Kugel um A'. Diese Thatsache ist von wesentlicher Tragweite[29]) (Nr. **4** u. **5**).

In jeder Lage sind die Geschwindigkeiten desselben Punktes für die direkte und umgekehrte Bewegung *entgegengesetzt gleich.* Für die Beschleunigungen gilt dies im allgemeinen nicht; für die Tangentialbeschleunigung der ebenen Bewegung (Nr. **10**) gilt es aber, da ja die Punkte H und H' für beide Bewegungen zusammenfallen[124]).

4. Mehrere incidente Lagen derselben Ebene oder desselben Bündels. Zwei Lagen σ_1 und σ_2 derselben Ebene σ bedingen ein Drehungscentrum O (Nr. **1**), ferner gehört zu je zwei Punkten A_1 und A_2 ihre *Sehne* A_1A_2, deren *Mittelpunkt* A_m und ihr *Mittellot* a^v, endlich gehören zu den Geraden g_1 und g_2 die beiden *Winkelhalbierenden* g_h und g_i. Die Punkte A_m bilden im allgemeinen ein zu σ ähnliches System σ_m, die Lote a^v gehen sämtlich durch O, und von den Geraden g_h und g_i gehen die einen sämtlich durch O, während die andern ein zu σ ähnliches System liefern[30]). Die Gesamtheit der Sehnen A_1A_2 steht zu σ in einer Verwandtschaft zweiten Grades. Geht σ_1 durch Gleitung oder Umwendung in σ_2 über, so treten Ausnahmen ein[31]). Die hier erwähnten Verwandtschaften sind die Quelle für eine grosse Reihe einzelner Sätze, die meist schon von *M. Chasles* ausgesprochen worden sind[32]).

Drei Lagen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ bedingen drei Drehungscentren O_{12}, O_{13}, O_{23}

---

28) Sie können auch völlig gleich sein, so z. B. für Gleitung, Drehung und Schraubung (Nr. **1**). Vgl. auch Nr. **21**.

29) Wenn bei der Bewegung um einen festen Punkt ein Punkt A auf einer Kugelfläche einen grössten Kreis beschreibt, so geht bei *derselben* Bewegung auch ein Kreis dieser Kugel durch einen festen Punkt.

30) *Chasles,* Déplacement fini, p. 855. Die Winkelhalbierenden hat zuerst *E. Study* betrachtet, Math. Ann. 39 (1891), p. 448. Sind $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ die Ähnlichkeitstransformationen, die A_1 resp. A_2 in A_m überführen, so gehen g_1 und g_2 durch $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ in g_h resp. g_i über.

31) Vgl. *E. Study,* Math. Ann. 39 (1891), p. 447.

32) Construction des normales. Vgl. eine Berichtigung bei *V. Retali,* Bologna Mem. (5) 2 (1892), p. 585.

und ausserdem ein System σ', gebildet von den Schnittpunkten A' der auf $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ errichteten Lote a^ν und a_1^ν. Das System σ' der Punkte A' steht mit jedem System σ_i in einer *quadratischen Verwandtschaft* $\mathfrak{V}_i^{(2)}$.[33]) Hauptpunkte sind in σ' die Punkte O_{ik}; überdies entsprechen die *imaginären Kreispunkte* sich selbst, wodurch der $\mathfrak{V}^{(2)}$ ein besonderer Charakter aufgeprägt ist. Da A' Centrum des um A_1, A_2, A_3 beschriebenen Kreises ist, so ist (Nr. 3) A Mittelpunkt des bezüglichen Kreises durch A_1', A_2', A_3'; es haben daher die durch $\mathfrak{V}^{(2)}$ verbundenen Systeme σ und σ' *wechselseitige kinematische Bedeutung*[34]). Die im folgenden für die eine Bewegung aufgeführten Sätze gelten daher auch für die andere.

Aus der Natur der $\mathfrak{V}^{(2)}$ folgt, dass der unendlich fernen Geraden g'_∞ von σ' in σ ein durch die Hauptpunkte gehender Kreis w_2 entspricht; er geht auch durch den Höhenschnittpunkt des Hauptdreiecks von σ',[35]) und ist zugleich Ort solcher Punkte W, für die W_1, W_2, W_3 auf einer *Geraden* liegen; alle diese Geraden $W_1 W_2 W_3$ gehen durch einen und denselben Punkt V'.

Tritt zu den Lagen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ eine vierte Lage σ_4 hinzu, so kann man nach Punkten K fragen, für die K_1, K_2, K_3, K_4 demselben *Kreise* angehören. Sie bilden[36]) eine durch die imaginären Kreispunkte und die Hauptpunkte gehende *Fokalkurve* k_3; gemäss der Natur der $\mathfrak{V}^{(2)}$ entspricht ihr in σ' eine Kurve k_3', die für σ' die gleiche kinematische Bedeutung besitzt. Auf k_3 giebt es insbesondere einen Punkt U, für den U_1, U_2, U_3, U_4 in *eine Gerade* fallen; es ist der von den O_{ik} verschiedene Schnittpunkt von w_2 mit k_3. *C. Rodenberg*[37]) hat die vorstehenden Sätze auf beliebig viele Lagen verallgemeinert. Er betrachtet irgend eine Kurve c', die durch m Punkte bestimmt ist, und bestimmt solche Punkte L von σ, die in $m+1$ oder mehr Lagen auf einer solchen Kurve enthalten sind.

Für zwei, drei und mehr Lagen eines *Bündels* (Nr. 2) resp. einer *Kugelfläche*, die sich in sich bewegt, gelten ähnliche Sätze. Die in sich dualistische Natur des Bündels, die in der *Polarität* zwischen den Strahlen und den zu ihnen senkrechten Ebenen besteht, bewirkt,

---

33) Vgl. *L. Burmester*, Civiling. (2) 22 (1877), p. 598.

34) *A. Schoenflies*, Geometrie der Bewegung, p. 12 ff.

35) *L. Geisenheimer*, Zeitschr. f. Math. 24 (1879), p. 137.

36) *L. Burmester*, Civiling. (2) 22 (1876), p. 598 ff. u. 23 (1877), p. 227 u. 319. Die vier Lagen bestimmen 6 Pole O_{ik}. Deren Lagenbeziehungen erörtert *Burmester*, Kinematik, p. 616 ff. Die k_3' ist Brennpunktskurve der aus den O_{ik} gebildeten Vierecke.

37) Gött. Nachr. 1888, p. 176.

dass es zu zwei Strahlen l_1 und l_2 *zwei* Halbierungslinien giebt, und damit *zwei* Normalebenen, und diese sind mit den Ebenen und Strahlen, die zu zwei Ebenen ε_1 und ε_2 des Bündels gehören, durch eine ausnahmslose Dualität verbunden[38]). Dem Kreis w_2 der Ebene entsprechen jedoch im Bündel zwei *verschiedene* Kegelflächen. Es giebt einen Kegel K_2, der mit Bezug auf die im Bündel ebenfalls vorhandene Verwandtschaft $\mathfrak{V}^{(2)}$ der zu a senkrechten Ebene entspricht. Dieser Kegel ist aber nicht mehr Ort der Strahlen l, für die l_1, l_2, l_3 in je eine *Ebene* fallen; diese Strahlen bilden vielmehr einen Kegel dritter Ordnung K_3, und ebenso umhüllen die Ebenen π, deren Lagen π_1, π_2, π_3 durch eine *Gerade* gehen, einen Kegel der dritten Klasse[39]).

5. Mehrere Lagen desselben räumlichen Systems. Den geometrischen Eigenschaften zweier kongruenten Räume Σ_1 und Σ_2 hat *M. Chasles*[40]) eine eingehende und erfolgreiche Untersuchung gewidmet, und über sie eine beinahe erstaunliche Fülle einzelner Sätze aufgestellt.

Sind A_1 und A_2 zwei entsprechende Punkte von Σ_1 und Σ_2, so sei wieder A_1A_2 ihre *Sehne*, A_m deren *Mitte* und α^v die in A_m auf A_1A_2 konstruierte *Normalebene*. Bei *allgemeiner* Lage von Σ_1 und Σ_2 ist dann das System Σ_m *affin* zu Σ_1 und Σ_2 und Σ^v *reziprok* zu ihnen; der fundamentale Satz, der die Theorie beherrscht, findet darin seinen Ausdruck, dass Σ_m und Σ^v zusammen ein *Nullsystem* bilden, dessen Hauptaxe mit der Schraubenaxe zusammenfällt[41]). *E. Study* hat auch hier wieder die zu zwei Ebenen ε_1 und ε_2 gehörigen *Winkelhalbierenden* ins Auge gefasst und gezeigt, dass die einen von ihnen ein zu Σ reciprokes System Σ_w bilden[42]).

---

38) Ausführlich bei *E. Study*, Math. Ann. 39 (1891), p. 501.

39) *A. Schoenflies*, Geometrie der Bewegung, p. 47 ff.

40) Déplacement fini. Eine ausführliche Ableitung dieser Sätze gab *Ch. Brisse*, J. de math. (2) 20 (1874), p. 220; (3) 1 (1875), p. 149; ihre analytische Darstellung *G. Battaglini*, Napoli Rend. 9 (1870), p. 142. Eine Darstellung mittelst vektorieller Methode gab *J. Lüroth*, Zeitschr. f. Math. 43 (1898), p. 243.

41) Σ_m kann also die durch das Nullsystem bestimmte infinitesimale Bewegung (Nr. 18) so ausführen, dass die Bahntangente von A_m in die Sehne A_1A_2 fällt.

42) Math. Ann. 39 (1891), p. 463. Er führt auch wieder die Transformationen $\mathfrak{T}$, T, $\mathfrak{W}$ ein, die resp. A in A_m, A in α^v und A_m in α^v überführen, und erörtert ihre Beziehungen zu $\mathfrak{A}$. Ebenso behandelt er eingehend die Ausnahmefälle. Wichtig ist, dass im Falle der Umwendung oder Umschraubung immer ein Ausnahmefall vorliegt.

Die Systeme Σ_1 und Σ_2 bedingen ferner den von den Verbindungslinien entsprechender Punkte gebildeten *tetraedralen Komplex* $\mathfrak{C}_2^s$.[43]) Da zwei Doppelpunkte von Σ_1 und Σ_2 in zwei Kreispunkte fallen, und zwei Doppelebenen in ε_∞, so sind die Komplexkegelschnitte Parabeln, die Komplexkegel orthogonal[44]), die Ordnungskurven kubische Kreise; analog spezialisieren sich die durch zwei Ebenen ε_1 und ε_2 bestimmten Kongruenzen und abwickelbaren Flächen[45]).

Drei Systemlagen Σ_1, Σ_2, Σ_3 bedingen zu jedem Punkt A eine Gerade a' als Schnittlinie der Normalebenen α^ν und α_1^ν und damit einen tetraedralen Komplex $\mathfrak{C}_2^\nu$, dessen Fundamentalpunkte im allgemeinen *sämtlich imaginär* sind. Ausgezeichnet in Σ ist die Kurve i_3 derjenigen Punkte J, für die J_1, J_2, J_3 in eine *Gerade* fallen. Endlich bedingen vier Lagen von Σ ein System Σ', gebildet aus den Schnittpunkten der Ebenen α^ν, α_1^ν und α_2^ν; zwischen Σ' und jedem Σ_i besteht eine *kubische Verwandtschaft* $\mathfrak{V}_i^{(3)}$. Da A' Mittelpunkt der durch A_1, A_2, A_3, A_4 gelegten Kugel ist, so ist A auch Mittelpunkt der entsprechenden Kugel für die umgekehrte Bewegung (Nr. 3). Ausgezeichnet für die Verwandtschaft $\mathfrak{V}^{(3)}$ ist in Σ zunächst die *Fundamentalkurve* k_6, deren Punkte K in den vier Lagen K_1, K_2, K_3, K_4 auf einem Kreise liegen, ferner eine *Fläche* F_3, die der ε'_∞ von Σ' entspricht, und deren Punkte in vier Lagen auf einer Ebene bleiben, sowie endlich eine *Fläche* F_4, der Punkte H, für die H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 auf einer Kugel liegen; die Centren bilden die Fläche F_4' von Σ'.[46]) Auch diese Betrachtungen hat *C. Rodenberg*[37]) auf beliebig viele Lagen und beliebige Flächen verallgemeinert.

Für zwei Lagen Σ_1 und Σ_2 und die zugehörige Schraubung $\mathfrak{A}(\alpha, \tau)$ bestehen metrische Relationen, die meist schon von *Chasles* gefunden wurden. Die einfacheren lauten[47]):

Die Projektion der Sehne A_1A_2 auf a hat den konstanten Wert τ,

---

43) Über den tetraedralen Komplex vgl. *Th. Reye,* Geometrie der Lage, 3. Aufl. Leipzig 1886, III, § 1.

44) Orthogonal ist ein Kegel, wenn seine Kreisschnitte auf einer Erzeugenden senkrecht stehen.

45) *Schoenflies,* Geometrie der Bewegung, p. 109 ff. Für die von ε_1 und ε_2 bestimmte Kongruenz vgl. auch *G. Halphen,* Bull. Soc. math. de France 1 (1875), p. 114.

46) Diese und weitere Sätze gab *A. Schoenflies,* J. f. Math. 98 (1889), p. 265, doch finden sich dort einige Irrtümer, die in der Geometrie der Bewegung berichtigt sind; vgl. p. 138 ff. Vgl. noch Bull. sciences math. (2) 12 (1888), p. 18.

47) Für die grosse Fülle der bezüglichen Formeln vgl. noch *O. Rodrigues,* Déplacement d'un système solide, § 14 ff. und *D. Chelini,* Moti geometrici, § 4 u. 6.

ebenso sind für alle Punkte von g_1 die Projektionen ihrer Sehne auf g_m konstant. Das gemeinsame Lot von g_m und g^v schneidet a senkrecht, und für die Abstände r, r_m, r^v der Geraden g, g_m und g^v von a besteht die Gleichung

$$r : r_m : r^v = \operatorname{tg}(ga) : \operatorname{tg}(g_m a) : \operatorname{tg}(g^v a).$$

Sind ferner $\mathfrak{B}(\beta)$ und $\mathfrak{C}(\gamma)$ zwei Rotationen, sodass $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\alpha, \tau)$ ist, und ist d kürzester Abstand zwischen b und c, so ist

$$\frac{\tau}{2} \sin\frac{\alpha}{2} = d \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma \sin(bc),$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\sin(bc).^{48})$$

Sind insbesondere $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ Umwendungen, so ist

$$\frac{\tau}{2} = d, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sin(bc)$$

und es fällt a mit d zusammen.

Wichtig ist noch die *Konstruktion der Schraubenaxe*, wenn Σ_1 und Σ_2 durch A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 gegeben sind. *Chasles*[49]) hat bereits zwei Konstruktionen gegeben. Zieht man durch O OA', OB', OC' gleich und parallel zu A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, so ist $a \perp A'B'C'$. Werden alsdann noch $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ auf die Ebene $A'B'C'$ projiziert, so geht a durch das Drehungscentrum dieser Projektionen. Dies ist die erste Konstruktion von *Chasles*. Die zweite operiert mit den Geraden a, b, c des Dreiecks ABC, konstruiert a_m, b_m, c_m und a^v, b^v, c^v und die bezüglichen gemeinsamen Lote u, v, w; alsdann ist a wieder das gemeinsame Lot von u, v, w.[50]) Die Konstruktionen vereinfachen sich bei besonderer Lage oder Wahl von A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2.[51]) Eine gedanklich neue Konstruktion hat *R. Mehmke*[52]) gegeben; sie beruht darauf, dass Σ und Σ_m affine Systeme sind.

6. Analytische Darstellung endlicher Bewegungen. Die Darstellung endlicher Bewegungen durch Parameter knüpft an *L. Euler*[53])

48) Diese Formel gilt auch für Axen, die sich schneiden (Nr. 2).

49) Paris C. R. 52 (1861), p. 487. Eine Vereinfachung des zweiten Teils giebt *G. R. Dahlander*, Stockh. Öfv. 1867, p. 601.

50) Die Geraden u, v, w sind auch so definierbar, dass die Umwendungen $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ die Geraden a_1, b_1, c_1 mit Vertauschung des Sinnes in a_2, b_2, c_2 überführen. In dieser Form erscheint die Konstruktion bei *H. Wiener*, Leipz. Ber. 42 (1890), p. 77.

51) *C. Moshammer*, Wien. Ber. 73² (1876), p. 157 wählt A, B, C auf der Schnittlinie von ε_1 und ε_2.

52) Civiling. (2) 29 (1883), p. 207.

53) Formulae, p. 193 ff. Vgl. auch *A. J. Lexell*, Petersburg Abh. 20 (1776), p. 239.

an. Er ging davon aus, dass wenn ein Körper Σ sich um einen Punkt O dreht, seine Lage durch die Formeln der gewöhnlichen Koordinatentransformation bestimmbar ist, d. h. durch die Winkel $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, die ein in Σ festes Axenkreuz $T(x, y, z)$ mit einem im Raume festen Axenkreuz $T'(x', y', z')$ bildet. Da nun diese Winkel, resp. ihre 9 Cosinus nur drei unabhängigen Parametern äquivalent sind, so entsteht die Aufgabe, die 9 Cosinus durch drei Parameter eindeutig darzustellen[54].

Es sei $\mathfrak{A}(\omega)$ diejenige Drehung, vermöge deren T' in T übergeht. Alsdann zerlegt *Euler* $\mathfrak{A}$ in drei Drehungen von den Winkeln φ, ψ, ϑ, von denen die erste um die z-Axe stattfindet, die zweite um die Schnittlinie l der (xy)- und $(x'y')$-Ebene, und die dritte um die z'-Axe; und zwar führt die erste die x-Axe in l über, die zweite z in z', die dritte l in x'. Die sich so für die 9 Cosinus ergebenden Ausdrücke in φ, ψ, ϑ sind jedoch sehr unsymmetrisch.

Symmetrische Ausdrücke erhielt *Euler* dadurch, dass er als Parameter den Drehungswinkel ω und die Richtungswinkel α, β, γ der Drehungsaxe a einführte[55]. Die Darstellung vereinfacht sich, wenn man homogene Parameter wählt, nämlich

$$A = \sin\frac{\omega}{2}\cos\alpha,\quad B = \sin\frac{\omega}{2}\cos\beta,\quad C = \sin\frac{\omega}{2}\cos\gamma,\quad D = \cos\frac{\omega}{2},$$

sodass $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$ ist, alsdann sind die 9 Cosinus a_i, b_i, c_i aus der Tabelle

$$\begin{array}{lll} D^2 + A^2 - B^2 - C^2, & 2(AB - CD), & 2(AC + BD), \\ 2(AB + CD), & D^2 - A^2 + B^2 - C^2, & 2(BC - AD), \\ 2(AC - BD), & 2(BC + AD), & D^2 - A^2 - B^2 + C^2 \end{array}$$

zu entnehmen.

Diese Formeln sind im Anschluss an *Euler* noch vielfach behandelt worden[56]. Einen wesentlichen Fortschritt verdankt man erst

---

54) Eine Abbildung aller Drehungen um einen Punkt auf die Punkte des Raumes giebt *C. Stephanos*, Math. Ann. 22 (1883), p. 331.

55) Formulae, p. 212 ff.

56) Man schrieb sie lange Zeit *G. Monge* zu; erst *C. G. J. Jacobi* wies wieder auf *Euler* als ihren Autor hin. Ableitungen gaben *J. F. Encke* und *M. Reiss*, Corresp. math. de *Quetelet* 7 (1832), p. 273 u. 11 (1839), p. 119. Einfache Darstellungen finden sich z. B. bei *G. Königs*, Cinématique, p. 198 u. 340, sowie bei *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Über die Theorie des Kreisels, Leipzig 1897, p. 15 ff., wo sich insbesondere die Zusammensetzungsformeln unmittelbar ergeben.

O. Rodrigues[57]), der die Parameter A'', B'', C'', D'' der Drehung $\mathfrak{A}''$ bestimmt hat, die aus zwei Drehungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ resultiert; es ist[58])

$$\begin{aligned}A'' &= AD' + BC' - CB' + DA',\\ B'' &= -AC' + BD' + CA' + DB',\\ C'' &= AB' - BA' + CD' + DC',\\ D'' &= DD' - AA' - BB' - CC'.\end{aligned}$$

Man verdankt *Rodrigues*[57]) auch eine Parameterdarstellung der allgemeinsten Ortsveränderung. Er ersetzt die Schraubung durch die Translationskomponenten τ_x, τ_y, τ_z des Anfangspunktes und die zugehörige Rotation $\mathfrak{A}(\omega)$, und wählt τ_x, τ_y, τ_z nebst den Quotienten der zu dieser Rotation gehörigen Grössen A, B, C, D als Parameter. Die Gleichungen, die seinen Formeln zu Grunde liegen, sind Relationen zwischen den Koordinaten der Punkte A_1, A_2, A_m. Setzt man noch

$$A : B : C : D = l : m : n : 1,$$

$$X = \tau_x - n\tau_y + m\tau_z, \quad Y = \tau_y - l\tau_z + n\tau_x, \quad Z = \tau_z - m\tau_x + l\tau_y,$$

so erhalten sie die Form

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= X + ny_m - mz_m,\\ y_2 - y_1 &= Y + lz_m - nx_m,\\ z_2 - z_1 &= Z + mx_m - ly_m;\end{aligned}$$

aus ihnen erhält man schliesslich

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= \tau_x + \frac{ny - mz - 2\lambda x + lu}{1+\lambda},\\ y_2 - y_1 &= \tau_y + \frac{lz - nx - 2\lambda y + mu}{1+\lambda},\\ z_2 - z_1 &= \tau_z + \frac{mx - ly - 2\lambda z + nu}{1+\lambda},\end{aligned}$$

wo

$$4\lambda = l^2 + m^2 + n^2, \quad 2u = lx + my + nz$$

gesetzt ist[59]).

---

57) *Rodrigues*, Déplacement d'un système solide.

58) Diese Formeln enthalten das Multiplikationstheorem der Quaternionen. Über deren Beziehung zu den Drehungen vgl. IV 13 (*Stäckel*).

59) Diese Formeln hat *Rodrigues* auch so abgleitet, dass er in Σ_1 und Σ_2 drei Paare entsprechender Punkte annimmt. Die Gleichungen der Schraubenaxe

$$\frac{X + py - nz}{m} = \frac{Y + mz - px}{n} = \frac{Z + nx - my}{p}$$

werden illusorisch, wenn $\alpha = \pi$ ist. Diesen Fall behandelt *Ph. J. Stieltjes*, Arch Néerl. 19 (1884), p. 372.

Eine umfassendere Behandlung hat die analytische Darstellung der Bewegungen des Raumes durch *E. Study*[60]) erfahren. Sie geht davon aus, dass sich gemäss den obigen Formeln die homogenen Parameter der Drehung $\mathfrak{A}''$ aus denen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ *bilinear* zusammensetzen. In Verallgemeinerung hiervon stellt sich *Study* die Aufgabe, auch die Bewegungen des Raumes durch eine möglichst geringe Zahl s *homogener* Parameter mit *bilinearer* Zusammensetzung auszudrücken. Der kleinste an sich mögliche Wert würde $s = 7$ sein; er ist jedoch nicht brauchbar. Dagegen kann man die Bewegungen durch 8 homogene Parameter so darstellen, dass die zwischen ihnen notwendig bestehende Relation die einfache Form

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$$

besitzt. Unter den unendlich vielen Arten, auf die man infolge dieser Relation die Parameter wählen kann, ist die einfachste diejenige, die im wesentlichen mit der von *Rodrigues* übereinstimmt, sodass die α_i den A, B, C, D proportional sind und

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{\tau}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}, \quad \frac{\beta_1}{\alpha_0} = -\frac{X}{2}, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_0} = -\frac{Y}{2}, \quad \frac{\beta_3}{\alpha_0} = -\frac{Z}{2}$$

ist. Die Zusammensetzungsformeln der $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind damit die nämlichen, wie diejenigen der A, B, C, D, während diejenigen der β_i komplizierter sind[61]). Dieselben Parameter genügen übrigens auch zur Darstellung der Umlegungen. *Study* hat auch die für die Ortsveränderung charakteristischen Komplexe und Verwandtschaften (Nr. 5) mittelst der Parameter α_i, β_i dargestellt. Ein einfaches Beispiel liefern die obigen *Rodrigues*'schen Formeln, die die Koordinaten von A_1, A_2 und A_m durch einander ausdrücken[62]).

---

60) Math. Ann. 39 (1891), p. 514 ff. Auch die Beziehungen zu den verwandten Gebieten der höheren Zahlsysteme und der Transformationsgruppen werden eingehend erörtert. Vgl. auch *Study*, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1901, p. 174 ff., sowie sein Referat über komplexe Zahlen in I A 3 (Nr. 12).

61) Die bezüglichen Formeln stellen in gleicher Weise das Multiplikationstheorem der *Biquaternionen* von *W. K. Clifford* dar (Math. Papers, London 1882, p. 181), wie die früheren Formeln das Multiplikationstheorem der Quaternionen.

62) *R. Marcolongo* definiert die Schraubung durch die sechs Koordinaten ihrer Axe und die Grösse der zugehörigen Verschiebung und Drehung, und hat für Schraubungen, die aus beliebig vielen andern zusammengesetzt sind, die Koordinaten und die anderen Stücke rechnerisch bestimmt, Ann. di mat. (2) 26 (1897), p. 101. Vgl. auch eine Darstellung von *G. Plarr* mittelst des Quaternionenkalküls, Edinb. Roy. Soc. Proc. 12 (1882), p. 151.

B. Stetige Bewegungen.

7. Geschwindigkeit und Beschleunigungen eines Punktes. Die Begriffe der *Geschwindigkeit* und *Beschleunigungen* eines Punktes knüpfen sich in ihrer unmittelbaren Bedeutung an *geradlinige* Bewegungen. Ist s der in der Zeit t durchlaufene Weg, so stellen die Differentialquotienten

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \varphi = \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad \varphi^{(2)} = \frac{d^3 s}{dt^3}, \ldots, \varphi^{(n)} = \frac{d^{n+1} s}{dt^{n+1}}$$

die Geschwindigkeit, resp. die erste, zweite, ... n^{te} Beschleunigung dar[63]). Alle diese Grössen sind Vektoren[64]). Darauf beruht die Möglichkeit, Geschwindigkeit und Beschleunigungen für *beliebige* Bewegungen eines Punktes A in der Weise zu definieren, dass man sie aus Komponenten zusammensetzt, die sich auf geradlinige Bewegungen beziehen, nämlich auf die der Projektionen A_x, A_y, A_z längs den Koordinatenaxen[65]). Wird also

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad \varphi_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, \ldots, \varphi_x^{(n)} = \frac{d^{n+1} x}{dt^{n+1}}$$

gesetzt, so ist v die Summe der Vektoren v_x, v_y, v_z, ebenso φ die Summe von φ_x, φ_y, φ_z, und analog für jedes $\varphi^{(n)}$. Analog kann man v und die $\varphi^{(n)}$ in Komponenten beliebiger Richtungen zerlegen[66]).

Wird v von einem festen Punkt M als Vektor MV konstruiert, so ist φ mit der Geschwindigkeit des Punktes V identisch. Die von V beschriebene Kurve, die *W. R. Hamilton*[67]) eingeführt hat, heisst

---

63) Die $\varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(n)}$ hat *H. Resal* methodisch eingeführt, Cinématique, p. 269 ff. und p. 311. Vgl. auch *A. Transon*, J. de math. 10 (1845), p. 320.

64) Über Vektoren und Vektorrechnung vgl. IV 2 (*Timerding*) und IV 14 (*Abraham*), sowie III B 3 (*Burkhardt*). Im vorliegenden Artikel kommt die Vektorrechnung ausser für Geschwindigkeiten und Beschleunigungen eines Punktes besonders auch für unendlich kleine Drehungen um Axen, die von einem festen Punkte auslaufen, in Betracht (Nr. 15). Vgl. übrigens Fussn. 73.

65) Dies findet z. B. bei der Analyse harmonischer Bewegungen und ihrer Ersetzung durch einfache Schwingungen Anwendung. Vgl. z. B. die ausführliche Darstellung dieser und ähnlicher Bewegungen bei *W. K. Clifford*, Dynamic.

66) Die Zerlegung von v in Komponenten längs r_1 und r_2 hat *Roberval* zur Konstruktion der Tangente einer Ellipse benutzt. Analoge Zerlegungen lassen sich auch bei andern mechanisch definierten Kurven zu dem gleichen Zweck ausführen, so z. B. bei den Fokalkurven, dem Cartesischen Oval und den Cassinischen Kurven; vgl. etwa *Burmester*, Kinematik, p. 67 ff. Die Formeln für φ und $\varphi^{(2)}$ haben *H. Resal* (Cinématique, p. 55) und neuerdings *E. Weyr* zur Konstruktion von ϱ resp. r benutzt, Prag. Ber. 1895, p. 28. Bei *Resal* (a. a. O. p. 275 ff.) finden sich auch Konstruktionen der Krümmungsradien der Evoluten.

67) Elements of quaternions, p. 100 u. 718, London 1866, 2. Ausgabe

Hodograph der Geschwindigkeit. Ist MF der Vektor, der φ darstellt, so heisst die von F beschriebene Kurve Hodograph der Beschleunigung; ihre Tangente liefert die Beschleunigung $\varphi^{(2)}$ u. s. w.

Die Geschwindigkeit v fällt in die Tangente der Bahn. Die Beschleunigung φ kann eine beliebige Richtung haben; ihre wichtigste Zerlegung ist die in die Tangentialbeschleunigung φ_t und die Normalbeschleunigung φ_h, die in die Hauptnormale fällt; ist ϱ der Krümmungsradius, so ist

$$\varphi_t = \frac{dv}{dt}, \quad \varphi_h = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Die Beschleunigung $\varphi^{(2)}$ hat zuerst *H. Resal*[68]) längs Tangente, Hauptnormale und Binormale zerlegt; es ist

$$\varphi_t^{(2)} = \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{\varrho^2}, \quad \varphi_h^{(2)} = 3\frac{v}{\varrho}\frac{dv}{dt} - \frac{v^2}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{dt}, \quad \varphi_b^{(2)} = \frac{v^3}{\varrho r},$$

wo r der Radius der zweiten Krümmung ist.

Zur Ableitung der bezüglichen allgemeinen Gesetze bedient man sich zweckmässig der *Vektorrechnung* (Methode der geometrischen Addition). So verfuhr schon *A. F. Möbius*[69]), der aus der Taylorschen Reihe für die Sehne s des in der Zeit τ durchlaufenen Kurvenbogens die Formel ableitete[70])

$$s = v\tau \mathbin{\hat{+}} \frac{1}{2}\varphi\tau^2 \mathbin{\hat{+}} \frac{1}{3!}\varphi^{(2)}\tau^3 \mathbin{\hat{+}} \cdots \mathbin{\hat{+}} R_n.$$

Die methodische Einführung der Vektorrechnung in die Kinematik geht auf *B. de St. Venant*[71]) und *H. Resal*[72]) zurück. *Resal* hat mit dem *inneren Produkt* zweier Vektoren[73]) zu operieren begonnen und

---

1899/1901. Eine Ausdehnung des Hodographen auf zwei bewegte Punkte giebt *A. Laisant*, Jornal de sciencias math. e astr. 10 (1891), p. 97. Vgl. auch *O. Gerlach*, Diss. Rostock 1889.

68) Cinématique, p. 271. In richtiger Form finden sich die Formeln zuerst bei *J. Somoff*, Accélérations, p. 11. Vgl. auch *D. Padeletti*, Giorn. di mat. 13 (1875), p. 115 u. 129; *G. Bardelli*, Ist. Lomb. Rend. (2) 11 (1878), p. 219; *G. Gautero*, Rom. Acc. dei Lincei Rend. (3) 4 (1880), p. 106.

69) J. f. Math. 36 (1846), p. 91.

70) Die Grösse φ dieser Formel wird auch *Deviation* genannt. Das Zeichen $\hat{+}$ drückt die *geometrische* Addition aus.

71) Paris C. R. 21 (1845), p. 620.

72) Cinématique, p. 25 u. 64.

73) Als *inneres* oder *geometrisches Produkt* der Vektoren u und v bezeichnet man das Produkt aus ihren Längen und dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels, also die Grösse $uv \cos(uv)$. Dasselbe wird im Texte fernerhin durch $\widehat{uv}$ bezeichnet werden.

de St. Venant hat den Begriff der geometrischen resp. *vektoriellen Ableitung* eingeführt, worunter die Geschwindigkeit zu verstehen ist, die dem Endpunkte eines von einem festen Punkt ausgehenden beweglichen Vektors zugehört; es ist also

$$\varphi = Dv, \quad \varphi^{(2)} = D\varphi, \ldots, \quad \varphi^{(n+1)} = D\varphi^{(n)},$$

wo D das Zeichen der geometrischen Ableitung sein soll. Für Summe und inneres Produkt gelten die Regeln des gewöhnlichen Differenzierens; hierzu kommt noch der Satz, dass wenn Anfangspunkt und Endpunkt des Vektors sich ändern, seine Ableitung gleich der Differenz der Geschwindigkeiten beider Punkte ist[74]). Mit diesen Methoden hat *J. Somoff* folgende allgemeine Formeln aufgestellt[75]), die die Zerlegung von $\varphi^{(n)}$ in $\varphi_t^{(n)}$, $\varphi_h^{(n)}$ und $\varphi_b^{(n)}$ leisten,

$$\varphi_t^{(n)} = \frac{d\varphi_t^{(n-1)}}{dt} - \frac{v}{\varrho}\,\varphi_h^{(n-1)},$$

$$\varphi_h^{(n)} = \frac{d\varphi_h^{(n-1)}}{dt} + \frac{v}{\varrho}\,\varphi_t^{(n-1)} - \frac{v}{r}\,\varphi_b^{(n-1)},$$

$$\varphi_b^{(n)} = \frac{d\varphi_b^{(n-1)}}{dt} + \frac{v}{r}\,\varphi_h^{(n-1)}.$$

A. Guiraudet[76]) und nach ihm *G. Lamé*[77])haben v und φ nach den Normalen eines orthogonalen Flächensystems zerlegt; für beliebiges $\varphi^{(n)}$ und beliebige krummlinige Koordinaten hat *J. Somoff*[78]) derartige Formeln aufgestellt. In analoger Weise lassen sich beliebige kinematische Vektorgrössen resp. Parameter behandeln; auch Formeln dieser Art hat *J. Somoff* abgeleitet (vgl. auch IV 14, *Abraham*). Als eine einfache Vektorgrösse ist noch die *Flächen-* oder *Sektorgeschwindigkeit*[79]) besonders zu nennen, ebenso die bezüglichen Beschleunigungen. Sie knüpfen an den Sektor an, den der von einem festen Punkt M zum beweglichen Punkt A laufende Radius r beschreibt; es ist

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\vartheta}{dt},$$

74) Vgl. besonders *J. Somoff*, Accélérations und Kinematik, Kap. II—IV.

75) Accélérations, p. 11 u. 60. Eine analytische Ableitung giebt *J. C. Bouquet*, Ann. éc. norm. (2) 3 (1874), p. 147.

76) Thèse Paris 1856.

77) Leçons sur les coordonnées curvilignes, Paris 1859, p. 149 u. 165.

78) Accélérations und Kinematik, Kap. IX—XII. Für orthogonale Koordinaten vgl. auch *Ph. Gilbert*, Accélérations 18, p. 207. Den Fall sphärischer Koordinaten behandelt *A. Laisant*, Nouv. ann. (2) 17 (1878), p. 496; vgl. auch *Th. Preston*, Dublin Proc. (2) 8 (1897), p. 469.

79) Sie ist gleich dem halben Moment von v bezüglich O; vgl. IV 2 (*Timerding*).

und es bestehen für die Komponenten nach den Axen die Gleichungen

$$\frac{dS_x}{dt} = \frac{1}{2}\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right), \ldots,$$

$$\frac{d^nS_x}{dt^n} = \frac{1}{2}\left(y\frac{d^nx}{dt^n} - x\frac{d^ny}{dt^n}\right), \ldots.$$

Man kann Geschwindigkeiten und Beschleunigungen auch so definieren, dass man die Gerade oder Ebene als bewegtes Element betrachtet, ohne auf ihre einzelnen Punkte zurückzugehen. Untersuchungen dieser Art hat *J. F. Wittenbauer*[80]) angestellt.

8. Die stetige Bewegung einer Ebene in sich[81]). Die Sätze für die *stetige* Bewegung ergeben sich aus den Resultaten von Nr. 4 durch Grenzübergang; historisch sind sie teilweise die früheren gewesen[82]).

Die Existenz des *momentanen Drehungscentrums* (*Drehungspols*), in das der Punkt O bei stetiger Bewegung übergeht, hat *Joh. Bernoulli*[83]) entdeckt; jede Bewegung von σ in sich ist also eine *momentane Rotation*[84]). Dies führt zu folgenden in dieser Form von *M. Chasles*[85]) gefundenen Sätzen: 1) Die momentanen Normalen aller *Bahnkurven* gehen durch O. 2) Auch die Normalen der *Enveloppen* aller Geraden und Kurven in ihren momentanen Berührungspunkten gehen durch O. 3) Jede Bewegung von σ in σ' besteht im *Abrollen* einer Kurve p von einer Kurve p'. Diese Kurven heissen *Polkurven*.

Die Verwandtschaft der Punkte A, A' (Nr. 5) geht in eine *Verwandtschaft* $\mathfrak{V}_2$ zwischen den Punkten von σ und σ' über, so dass jeder der beiden Punkte Krümmungsmittelpunkt der Bahn des andern ist[86]). Die drei Hauptpunkte rücken in den Pol O zusammen, die drei Hauptgeraden in die *Tangente t der Polbahnen*. Alle c_2', die den

80) Kinematik des Strahles, Graz 1883 und Zeitschr. f. Math. 30 (1885), p. 216.

81) Die Fälle nicht differenzierbarer Kurven resp. Bewegungen (III B 1 a, *v. Mangoldt*) bleiben ausgeschlossen. Vgl. IV 1 (*Voss*).

82) Die meisten der folgenden Sätze sind geometrisch gefunden worden. Eine analytische Ableitung findet sich bei *E. Cosserat*, Toul. Mém. (9) 5 (1893), p. 511. Vgl. auch *H. Duport*, Nouv. ann. (3) 18 (1899), p. 5.

83) De centro spontaneo rotationis, Opera 4, Lausannae 1742, p. 265.

84) Fällt O ins Unendliche, so besteht die Bewegung in einer momentanen Translation. Ist dies dauernd der Fall, so beschreiben alle Punkte kongruente Kurven. Die Bewegung ist dann durch die Bahnkurve *eines* Punktes bestimmt. Diese Fälle bleiben hier ausgeschlossen.

85) Construction des normales. Dass beim Abrollen zweier Kurven alle Normalen durch den Berührungspunkt gehen, erkannte bereits *R. Descartes*, Oeuvres 7 (1638), p. 88.

86) Die Bahnkurven selbst sind im allgemeinen verschieden.

Geraden von σ in σ' entsprechen, oskulieren sich und die Polbahnentangente in O.[87]) Der der Geraden g'_∞ entsprechende Kreis w_2 (*Wendekreis*) wird Ort der Punkte, die momentan *Wendepunkte* ihrer Bahnen beschreiben; alle Wendetangenten gehen durch einen Punkt V (*Wendepol*), den zweiten Schnittpunkt von w_2 mit der Normale n der Polbahnen[88]). Der Wendekreis der umgekehrten Bewegung heisst als Kreis von σ der *Rückkehrkreis* r_2; er ist Ort der *momentanen Spitzen* der von den Geraden von σ umhüllten Enveloppen[89]). Ist c irgend eine Kurve von σ und c' ihre Enveloppe, so sind auch deren Krümmungsmittelpunkte entsprechende Punkte A, A' von $\mathfrak{B}_2$. Der Wendekreis enthält daher auch das Krümmungscentrum jeder Kurve c, deren Hüllbahn im Berührungspunkt einen Wendepunkt hat, insbesondere also derer, die eine Gerade umhüllen.

Die Fokalkurve k_3 geht in den Ort der Punkte mit *stationärem Krümmungskreis* über[90]); sie hat in O einen Doppelpunkt und berührt in ihm die Tangente t und die Normale n der Polbahnen. Diese Kurve ist zuerst von *L. Burmester*[36]) und bald darauf auch von *H. Léauté*[91]) bemerkt worden, und da sie für die allgemeine Theorie, wie besonders für die Theorie des Kurbelgetriebes (Nr. 12) wichtige Bedeutung hat, so ist sie Gegenstand vieler Untersuchungen gewesen[92]). Auf ihr giebt es vier Punkte B_i (*Burmester'sche Punkte*), deren Bahnen einen fünfpunktig berührenden Krümmungskreis besitzen[36]); ihr Schnitt U mit w_2 ist der *eine* Punkt von σ, dem im allgemeinen eine vierpunktig berührende Bahntangente zukommt und der daher im all-

---

87) *G. Rivals* zeigte (J. éc. polyt. 35 (1853), p. 112), dass die Krümmungscentra einer Geraden g auf einem c_3' liegen; *A. Mannheim* (J. éc. polyt. 37 (1858), p. 179) und *Ph. Gilbert*, Brux. Mém. cour. 30 (1857) fanden, dass c_3 die Tangente t berührt; erst bei *E. Dewulf* (Paris C. R. 92 (1881), p. 1091 und Ann. éc. norm. (3) 3 (1885), p. 408) findet sich das Oskulieren aller c_3 und die Einführung der $\mathfrak{B}_2$, die für endliche Lagen bereits vorher *L. Burmester* (Fussn. 33) abgeleitet hatte. Besondere Eigenschaften der c_3' geben *Mannheim* (a. a. O.) und *Ch. Speckel*, Nouv. ann. (3) 11 (1892), p. 268.

88) Der Wendekreis erscheint zuerst bei *de la Hire*, Roulettes, p. 348. Vgl. auch *A. Transon*, J. de math. 10 (1840), p. 154, sowie besonders *S. Aronhold*, Kinematische Geometrie, p. 153.

89) *Grouard*, L'Institut 37 (1870), p. 88. Die zuletzt genannten Geraden gehen in jeder Lage durch den Wendepol der umgekehrten Bewegung.

90) Da k_3 und k_3' einander in $\mathfrak{B}_2$ entsprechen, so ist k_3' Ort dieser Krümmungscentra.

91) Paris C. R. 87 (1878), p. 151, sowie J. éc. polyt. 46 (1879), p. 167.

92) *O. Rodenberg*, Zeitschr. f. Math. 36 (1891), p. 271; *L. Allievi*, Biella piana, p. 37 ff.; *R. Müller*, Zeitschr. f. Math. 37 (1892), p. 129 u. 417; *M. Grübler*, ebda. 37 (1892), p. 35; *L. Burmester*, Kinematik, p. 616 ff.

gemeinen ein *Undulationspunkt* seiner Bahn ist. Er ist zugleich Schnitt der Kurve mit der Fokalaxe der Kurve k_3' der umgekehrten Bewegung[93]), und wird, da *R. Ball*[94]) zuerst auf ihn hinwies, *Ball-scher Punkt* genannt. Die der Gesamtbewegung entsprechenden Ball-schen Punkte bilden die *Ball'sche Kurve* b, die mit der Polkurve p' zusammen die Enveloppe der Wendekreise darstellt[95]). Fällt einer der Punkte B_i in U, so hat U eine fünfpunktig berührende Bahn-tangente. Solche Punkte fallen in eine Spitze der Ball'schen Kurve[96]).

R. Müller[97]) hat die Krümmung der ersten und höheren *Evoluten* der Hüllbahnen in Betracht gezogen. Für jede Evolutenart existieren zwei Kreise, die den Kreisen w_2 und r_2 analog sind. Ist nämlich c eine Kurve von σ, deren Enveloppe eine Gerade ist, so gehen die momentanen Normalen ihrer n^{ten} Evoluten durch einen Punkt V_n, den n^{ten} *Wendepol*, und die Krümmungsmittelpunkte der $(n-1)^{\text{ten}}$ Evoluten erfüllen einen Kreis w_n, der $V_{n-1}V_n$ zum Durchmesser hat und n^{ter} *Wendekreis* heisst. Ist umgekehrt g eine Gerade von σ, so geht die Normale der n^{ten} Evolute ihrer Enveloppe durch einen Punkt Ψ_n, den n^{ten} *Rückkehrpol*, und die Krümmungsmittelpunkte der $(n-1)^{\text{ten}}$ Evoluten erfüllen den $(n-1)^{\text{ten}}$ *Rückkehrkreis*, dessen Durch-messer $\Psi_{n-1}\Psi_n$ ist. Besondere Lagen dieser Punkte bedingen Punkte, deren Bahnen mit ihren Tangenten eine höhere Berührung haben.

Im allgemeinen beschreibt der Pol als Systempunkt O eine *Spitze* seiner Bahnkurve, während die anderen Bahnen Singularitäten nicht aufweisen[98]). Auf eine Ausnahme wies zuerst *A. Schoenflies*[99]) hin; ist $\varrho = \varrho'$ und berühren sich die Polbahnen von innen, so hat die Bahn-kurve eines *beliebigen* Punktes eine Spitze; die Punkte der Tangente t

---

93) *C. Rodenberg*, Zeitschr. f. Math. 36 (1891), p. 270. Vgl. Fussn. 114.

94) Dublin Proc. (2) 1 (1871), p. 243.

95) Die Bahntangente von U fällt mit der Tangente der Enveloppe der w_2 zusammen. *L. Allievi*, Biella piana, p. 44.

96) *R. Müller*, Zeitschr. f. Math. 43 (1898), p. 37. Falls von den vier Punkten B_i drei in gerader Linie liegen, fällt der vierte in U.

97) Gelenkviereck, p. 43 ff. u. Zeitschr. f. Math. 42 (1897), p. 247; die ersten Evoluten ebda. 36 (1891), p. 193 u. 257. Dort wird auch die Verwandtschaft zwischen σ und den Krümmungscentren der Evoluten untersucht. Vgl. auch *A. Pellet*, Paris C. R. 120 (1895), p. 1204.

98) Die Tangente der Spitze schneidet die Polkurven senkrecht. Eine Aus-nahme tritt ein, wenn z. B. eine logarithmische Spirale von einem Kreise ab-rollt; die Bahnkurve des asymptotischen Punktes hat keine Spitze und dem Winkel, unter dem sie den Kreis schneidet, kann durch Wahl des Radius jeder Wert gegeben werden.

99) Geometrie der Bewegung, p. 46.

beschreiben Spitzen *höherer* Art. Eine allgemeinere Erörterung dieser Fragen verdankt man *R. Mehmke* und *L. Allievi*. *Allievi*[100]) hat die Singularitäten der Bahnkurven besonders in den Fällen diskutiert, dass die Kurven w_2 resp. k_3 zerfallen. *Mehmke*[101]) stellt die Koordinaten der Bahnkurven durch Reihen dar, die nach den Potenzen des *Drehungswinkels* fortschreiten; er fand insbesondere, dass auch bei singulärem Charakter der Polkurven und Bahnkurven immer eine die Krümmungsverhältnisse definierende $\mathfrak{V}_2$ vorhanden ist und ein dem Wendekreis analoger Kreis, dessen Bahnen eine noch höhere Singularität zukommt.

Mehmke hat diese Betrachtungen auch auf den Fall ausgedehnt, dass der Pol ins Unendliche rückt[102]). Er und *R. Müller* haben endlich auch die Singularitäten der Polbahnen selbst in Untersuchung gezogen[103]).

9. Metrische und konstruktive Fragen. Die ebene Bewegung von σ ist meist so bestimmt, dass zwei Bahnkurven oder allgemeiner zwei Paare entsprechender Hüllbahnen gegeben sind[104]). Durch die Hüllbahnenpaare resp. ihre Krümmungsmittelpunkte A, A' und B, B' ist der Pol O und die quadratische Verwandtschaft $\mathfrak{V}_2$ bestimmt. Für die *metrischen* und *konstruktiven* Abhängigkeiten besteht eine schon von *L. Euler*[105]) gekannte, später von *F. Savary*[106]) wiedergefundene und neuerdings erweiterte Formel (1), sowie eine auf *E. E. Bobillier*[107]) zurückgehende Konstruktion. Die methodische Darstellung, Begrün-

---

100) Biella piana, p. 3 ff.

101) Zeitschr. f. Math. 35 (1890), p. 1 u. 65. Die $\mathfrak{V}_2$ kann ausarten. Dann giebt es nur für die Punkte der Ausnahmelinien eine endliche Krümmung. Potenzreihen, deren Koeffizienten aus den v_x, v_y, φ_x, φ_y, ... (Nr. 10) gebildet sind, giebt *Königs*, Cinématique, p. 154.

102) Zeitschr. f. Math. 35 (1890), p. 23. Alle Punkte beschreiben Singularitäten gleicher Art, bis auf eine Gerade, deren Punkte Bahnen mit höherer Singularität besitzen.

103) Zeitschr. f. Math. 35 (1890), p. 21 und Gelenkviereck, p. 59.

104) Die Bahnkurven und die Hüllkurvenpaare bilden ein einfaches Beispiel für *S. Lie*'s Theorie der Berührungstransformationen. Wenn man nämlich jedem Punkt von σ seine in σ' liegende Bahnkurve zuordnet, so bestimmt diese Zuordnung eine Berührungstransformation. Dabei entspricht einer Kurve φ von σ die Enveloppe der Bahnkurven aller ihrer Punkte, und dies ist zugleich die Hüllbahn von φ, d. h. also die Enveloppe aller Lagen von φ. Vgl. *S. Lie* und *G. Scheffers*, Geometrie d. Berührungstransformationen 1, Leipzig 1896, p. 66.

105) Petersburg Novi Comm. 21 (1765), p. 207.

106) Vgl. eine Bemerkung von *Chasles*, J. de math. 10 (1845), p. 204, sowie *Haton de la Goupillière*, Traité des mécanismes, Paris 1864, p. 107.

107) Cours de géométrie 12. Aufl. (1870), p. 232.

dung und Weiterbildung dieser Fragen gab jedoch erst *S. Aronhold*[108]), indem er die bezüglichen Sätze als Folgen allgemeiner projektiver Thatsachen aufzufassen lehrte. Er knüpft daran an, dass auf jeder durch O gehenden Geraden (Normalstrahl) l die entsprechenden Punkte von $\mathfrak{W}_2$ zwei *projektive Punktreihen* bilden, deren Fluchtpunkte auf w_2 und r_2 liegen. Hieraus ergiebt sich, wenn s der Bogen der Polbahn ist, als voller Ausdruck der *Euler-Savary*'schen Formel die Gleichung[109])

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'}\right)\cos(ln) = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{OV} = \frac{ds}{d\vartheta} = \frac{u}{\omega}.$$

Der *Bobillier'schen Konstruktion* der Poltangente t aus den Paaren A, A' und B, B' liegt der Satz zugrunde, dass (Fig. 1) AB' und BA' sich auf einer festen Axe c (*Kollineationsaxe*) schneiden, falls die Paare A, A' resp. B, B' auf zwei festen Normalstrahlen l_a und l_b liegen; es ist überdies $\sphericalangle(tl_a) = \sphericalangle(l_b c)$[110]), woraus noch eine Reihe weiterer konstruktiver Resultate fliesst[111]).

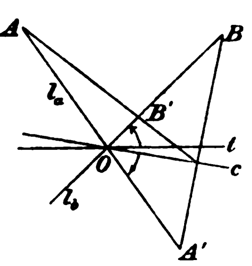


Fig. 1.

Für die Konstruktion der *Krümmungsradien der Polbahnen* muss man die Evoluten der Hüllbahnen (Nr. 8) oder die Kurve k_3 benutzen; diese Gebilde bedingen sich ebenfalls gegenseitig. Eine entsprechende Formel hat *M. Grübler*[112]) aufgestellt. *R. Müller*[113]) hat mittelst der höheren Wendepole und Wendekreise (Nr. 9) Formeln und Konstruktionen angegeben, um die Krümmung der ersten und höheren Evoluten der Hüllbahnen zu bestimmen.

Eine Darstellung der Erzeugungsweisen der k_3 mit besonderer Rücksicht auf ihre kinematischen Eigenschaften hat *R. Müller*[114]) ge-

---

108) Kinematische Geometrie, p. 142 ff.

109) *A. Mannheim*, J. éc. polyt. 37 (1858), p. 179; über ϑ, ω und u vgl. Nr. 10 u. 26.

110) Vgl. auch *E. Habich*, Nouv. ann. (3) 1 (1882), p. 460.

111) Da die $\mathfrak{W}_2$ und die Wendekreise sich gegenseitig bedingen, so lässt sich, falls die w_2 gegeben sind, zu A der Punkt A' konstruieren und umgekehrt. Hierfür existieren mehrere Konstruktionen, die einfachste gab *M. Grübler*, Zeitschr. f. Math. 29 (1884), p. 310. Vgl. auch *Ph. Gilbert*, Brux. Ann. Soc. scientif. 2B 81 (1878).

112) Zeitschr. f. Math. 34 (1889), p. 309.

113) Zeitschr. f. Math. 36 (1891), p. 193, 257 und Gelenkviereck, p. 48 ff.

114) Zeitschr. f. Math. 40 (1895), p. 351. Die k_3 ist Erzeugnis eines Büschels von Berührungskreisen und eines Strahlbüschels, dessen Strahlen durch die Kreiscentren gehen. Der Büschelscheitel heisst Fokalcentrum, die Gerade der Kreiscentra heisst Fokalaxe.

geben. Das Fokalcentrum ist konstruierbar, sobald auf zwei Normalstrahlen je ein Punkt K von k_3 gegeben ist[115]). Kennt man für ein Hüllkurvenpaar die eigene Krümmung, sowie auch die ihrer Evoluten, so ist das bezügliche Paar K, K' konstruierbar; die entsprechenden Formeln hat *M. Grübler*[91]) mitgeteilt.

Auch die *Gleichung* der Kurve lässt sich auf eine einfache Form bringen. Für den Fall des Kurbelgetriebes ist sie von *C. Rodenberg*[115]), für den allgemeinen Fall von *M. Grübler*[91]) gegeben worden. Die in die Gleichung eingehenden Parameter drücken sich am einfachsten durch die Krümmungsradien ϱ, ϱ' der Polbahnen und den Durchmesser δ des Wendekreises aus[116]). Setzt man

$$\frac{3}{R} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\delta}, \quad \frac{3}{R'} = \frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\delta}, \quad \frac{3}{S} = \frac{1}{\delta}\frac{d\delta}{d\sigma},$$

so sind die Gleichungen von k_3 resp. k_3'

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R \sin\varphi} + \frac{1}{S \cos\varphi}, \quad \frac{1}{r'} = \frac{1}{R' \sin\varphi} + \frac{1}{S \cos\varphi}.$$

Die auf drei verschiedene Arten mögliche Ausartung von k_3 tritt ein, falls eine oder mehrere der Parameter R, R', S unendlich werden[117]). Insbesondere degeneriert sie in g_∞ und eine gleichseitige Hyperbel, wenn O ins Unendliche fällt; dann werden alle Parameter unendlich, doch so, dass $R^3 : S^3 = k$ endlich bleibt[118]).

Endlich ist noch die biquadratische Gleichung zu erwähnen, von der die *vier Punkte* B_i abhängen. Für sie bestehen die Relationen

$$\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_3 + \operatorname{tg}\varphi_4 = \frac{R}{S} + \frac{R'}{S} = \operatorname{ctg}\varphi_F + \operatorname{ctg}\varphi_{F'},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_3 \cdot \operatorname{tg}\varphi_4 = \frac{R}{S}\,\frac{R'}{S} = \operatorname{ctg}\varphi_F \cdot \operatorname{ctg}\varphi_{F'},$$

wo φ_F und $\varphi_{F'}$ die Winkel der von O nach den Fokalcentren F resp. F' von k_3 und k_3' gehenden Strahlen mit der Poltangente sind[119]).

---

115) *C. Rodenberg*, Zeitschr. f. Math. 36 (1891), p. 267 und 37 (1892), p. 145.

116) Vgl. *M. Grübler*, Zeitschr. f. Math. 24 (1889), sowie auch *L. Allievi*, Biella piana, p. 35.

117) Es kann k_3 degenerieren, ohne das k_3' es thut. Falls k_3 in t, n und g_∞ zerfällt, so k_3' in t und w_2'. Jeder Punkt von w_2' beschreibt einen Undulationspunkt. Vgl. besonders *C. Rodenberg* und *L. Allievi* (Fussn. 113 u. 115).

118) *L. Allievi*, Biella piana, p. 100 ff. Der Krümmungsradius ϱ eines Punktes A ist durch $\varrho y = k' - k$ bestimmt, wo y das Lot von A auf t ist.

119) *R. Müller*, Zeitschr. f. Math. 37 (1892), p. 214 und *L. Allievi*, Biella piana, p. 42, 56, 60. Dort finden sich noch weitere Formeln zwischen R, R', S und φ_i, φ_F resp. $\varphi_{F'}$.

10. Geschwindigkeit und Beschleunigungen der ebenen Bewegung. Dreht sich eine Ebene σ in sich um einen festen Punkt und ist ϑ der Drehungswinkel, so stellen die Differentialquotienten

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \lambda = \frac{d\omega}{dt}, \quad \lambda^{(2)} = \frac{d^2\omega}{dt^2}, \ldots, \lambda^{(n)} = \frac{d^n\omega}{dt^n}$$

die momentane *Winkelgeschwindigkeit*, sowie die erste, zweite, ... n^{te} *Winkelbeschleunigung* dar. Dieser Begriff ist für die Betrachtung der v und φ der einzelnen Punkte von Wichtigkeit.

Die Sätze von Nr. 8 ergeben für den momentanen Geschwindigkeitszustand[120]) der ebenen Bewegung das Resultat, dass der Momentanpol O der Punkt $v = 0$ ist; sind α und β die Koordinaten von O, so gilt für Axen x, y, die in σ fest sind, und für *jeden* Punkt $A(x, y)$

$$v_x = -\omega(y - \beta), \quad v_y = \omega(x - \alpha).$$

Ist P Berührungspunkt einer Geraden g mit ihrer Enveloppe, so fällt seine Geschwindigkeit v_g in g; für jeden andern Punkt A von g hat die Projektion von v auf g den Wert v_g.

Vergleichende Betrachtungen über den Beschleunigungszustand von σ hat zuerst *J. A. Chr. Bresse*[121]) angestellt. Er fand, dass die Punkte $\varphi_n = 0$ und $\varphi_t = 0$ je einen durch O gehenden Kreis bilden (Fig. 2), von denen der erste kein anderer ist, als der Wendekreis, während der zweite ihn in O senkrecht schneidet und den Durchmesser $u\omega : \omega'$ hat[122]). Ihr Schnittpunkt G, für den $\varphi = 0$ ist, heisst *Beschleunigungscentrum*[123]). Seine weitere Bedeutung ist die, dass φ auf Kreisen um G konstant und dem Abstand $GA = r$ proportional ist und in allen Punkten einer durch G gehenden Geraden mit ihr denselben Winkel bildet. *W. Schell*[124]) hat bemerkt, dass auch ein Punkt $\lambda = 0$ vorhanden ist, nämlich der Schnittpunkt H der Polbahntangente t mit dem Kreis $\varphi_t = 0$. Er heisst *Mittelpunkt*

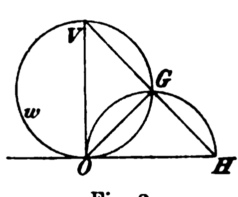


Fig. 2.

120) Jeder Satz von Nr. 9 über die Bahntangenten ist auch ein Satz für die Geschwindigkeitsrichtungen.

121) J. éc. polyt. 35 (1853), p. 89; vgl. auch *R. Dahlander*, Stockh. Öfv. 25 (1868), p. 79; *T. Rittershaus*, Civiling. (2) 24 (1878), p. 1.

122) Für jeden Kreis des zugehörigen Büschels ist $\sphericalangle(v, \varphi) =$ const.; *L. Burmester*, Civiling. (2) 24 (1878), p. 157. Über diese Kreise vgl. auch *J. de Vries*, Monatsh. f. Math. 8 (1897), p. 138.

123) Kurven, die G beschreibt, betrachtet *L. Lecornu*, Nouv. ann. (3) 10 (1891), p. 5. Ist ω konstant, so fällt G in V.

124) Zeitschr. f. Math. 19 (1874), p. 185. Es ist $OH \cdot \lambda = \omega u$ (Fussn. 109).

der Winkelbeschleunigung; auf Kreisen um ihn ist λ konstant und ebenfalls dem Abstand $r = AG$ proportional. Es zerfällt daher φ in die senkrechten Komponenten $\omega^2 r$ und λr, woraus sich noch weitere Zerlegungen von φ in einfache geometrisch definierbare Komponenten ergeben[125]).

Die vorstehenden Sätze können dahin verallgemeinert werden, dass auch für jedes $\varphi^{(n)}$ ein Punkt $\varphi^{(n)} = 0$ existiert, sodass auf Kreisen um ihn $\varphi^{(n)}$ konstant ist, und in allen Punkten einer durch ihn gehenden Geraden gleichgerichtet[126]), er heisst *Beschleunigungspol n^{ter} Ordnung.* Es folgt hieraus, dass für $\varphi^{(n)}$ die gleiche Zerlegung in einfache Komponenten möglich ist, wie für φ selbst. Formeln, die dies unmittelbar in Evidenz setzen, hat *Ph. Gilbert*[127]) gegeben; es ist, wenn $\Phi^{(n)}$ die n^{te} Beschleunigung von O ist,

$$\varphi_x^{(n)} = p_n(x-\alpha) - q_n(y-\beta) + \Phi_x^{(n)},$$
$$\varphi_y^{(n)} = q_n(x-\alpha) + p_n(y-\beta) + \Phi_y^{(n)},$$

resp. falls α_n und β_n die Koordinaten von $G^{(n)}$ sind,

$$\varphi_x^{(n)} = p_n(x-\alpha) - q_n(y-\beta_n), \quad \varphi_y^{(n)} = q_n(x-\alpha_n) + p_n(y-\beta_n),$$

und zwar hängen $\Phi^{(n)}$, sowie p_n und q_n von α, β, ω, u und deren Ableitungen durch einfache Rekursionsformeln ab. Sie vereinfachen sich wesentlich, falls man ω konstant annimmt, was für das Studium der rein geometrischen Beziehungen gestattet ist.

Die *geometrische* Quelle der Sätze über die $\varphi^{(n)}$ bildet die folgende, methodisch zuerst von *L. Burmester*[128]) benutzte Thatsache. Wird von A aus das zugehörige $v, \varphi, \ldots$ als Vektor abgetragen, so bilden die Endpunkte ein System σ_v, resp. $\sigma_\varphi, \ldots$, das mit σ *ähnlich* ist. Es giebt daher für σ und σ_v, für σ und σ_φ u. s. w. je einen Doppelpunkt, der resp. der Punkt $v = 0$, $\varphi = 0, \ldots$ ist; ebenso folgen daraus die weiteren Sätze. Diese Systeme dienen auch dazu, die v und φ beliebiger Punkte aus denen einzelner Punkte zu konstruieren. Man kann sich hierzu eines Kunstgriffes bedienen, dessen methodische An-

125) Vgl. z. B. *Schell,* Theorie der Bewegung, p. 452 ff. Dort werden auch die Punkte φ_n = const. und φ_t = const. betrachtet; ebenso bei *L. Burmester,* Civiling. (2) 24 (1878), p. 147.

126) Diese Sätze gab zuerst *A. Grouard,* L'Institut 37 (1870), p. 172.

127) Accélérations 18, p. 214 ff. Vgl. auch Rom. Acc. Pontific. dei Nuov. Lincei 3 (1889), p. 213. *Gilbert* bestimmt auch die Lage u. s. w. der Punkte $G^{(2)}$ und giebt geometrische Anwendungen.

128) Civiling. (2) 24 (1878), p. 147. Vgl. auch *R. Mehmke,* Civiling. (2) 29 (1883), p. 487. Nach *Mehmke* gilt der Satz auch, wenn man alle v von demselben Punkte aus abträgt.

wendung auf *J. Schadwill*[129]) zurückgeht. Wird auf OA eine Strecke $LA = v$ konstruiert (*lotrechte* Geschwindigkeit), so bilden die Punkte L ein zu σ ähnliches und ähnlich liegendes System σ_l, was die Konstruktion von v wesentlich erleichtert. In anderer Weise hat *H. Mohr*[130]) von den Beziehungen zwischen σ_v und σ_l Gebrauch gemacht. Er trägt für jeden Punkt A von einem *beliebigen* Punkte M aus seine Geschwindigkeit als Vektor MA_v auf, so hat das so entstehende zu σ ähnliche System σ_v die Eigenschaft, dass $A_vB_v \perp AB$ ist; weiter wird dann noch die Beschleunigung φ des Punktes A als die Geschwindigkeit von A_v in Bezug auf das ähnlich veränderliche System σ_v betrachtet und von einem Punkte N aus analog konstruiert; man erhält ein zu σ_v, also auch zu σ ähnliches System. Diese Konstruktion ist in manchen Fällen von grösserem Vorteil als die obige.

11. Spezielle Bewegungen in der Ebene. Allgemeine Gleichungen, die die Abhängigkeit zwischen den Polkurven und den Bahnkurven resp. Hüllkurven ausdrücken, hat bereits *J. Lagrange*[131]) gegeben; in allgemeinster, auf kinematischer Grundlage ruhender Form *S. Aronhold*[132]) und *A. Cayley*[133]). Von speziellen Bewegungen interessieren am meisten diejenigen, bei denen Punkte auf Geraden oder Kreisen bleiben oder Geraden durch feste Punkte gehen, insbesondere die des *Ellipsographen* und der *Conchoidenbewegung* (vgl. auch Nr. 12).

Die Ellipsographenbewegung ist so definiert, dass zwei Punkte A und B auf Geraden laufen[134]); die Polkurven sind Kreise; der eine Kreis rollt von innen von einem Kreis mit doppeltem Radius ab und stellt zugleich den unveränderlichen Wendekreis dar, sodass alle seine Punkte gerade Linien beschreiben. Die Bahnkurven sind Ellipsen, die der umgekehrten Bewegung sind Pascal'sche Kurven, insbesondere auch Cardioiden. Die Conchoidenbewegung ist so definiert, dass eine Gerade g durch einen festen Punkt G' geht, während ein Punkt A

---

129) Gliedervierseit, p. 407.

130) Civiling. (2) 33 (1887), p. 631.

131) Berlin Nouv. Mém. 1779, p. 133. Vgl. auch *N. Nicolaides*, Théorie du mouvement d'une figure plane dans son plan, Paris 1863, und die Vorlesungen über natürliche Geometrie von *E. Cesàro* (vgl. Fussn. 2).

132) Mitgeteilt von *R. Sellentin*, Zeitschr. f. Math. 28 (1883), p. 116.

133) Quart. J. of math. 16 (1879), p. 1; vgl. auch *H. de la Goupillière*, Paris C. R. 85 (1877), p. 895 und 86 (1878), p. 527.

134) Diese Erzeugung der Ellipse war schon im Altertum bekannt; vgl. *M. Chasles*, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en geométrie, 2. éd., Paris 1875, p. 89 Anm. Modelle bei *W. Dyck*, Katalog, p. 341 ff.

von g eine Gerade resp. einen Kreis beschreibt[135]). Die Polkurven sind c_4, die Bahnkurven sind Kurven c_4 mit zwei Doppelpunkten, deren Verbindungslinie durch G' geht[136]).

Ist eine Kurve kinematisch definierbar, so lassen sich Konstruktionen ihrer Krümmungsmittelpunkte und derjenigen ihrer Evoluten aus der allgemeinen Theorie ableiten. In dieser Hinsicht sind insbesondere die zahlreichen Arbeiten von *A. Mannheim*[137]) zu erwähnen. Von allgemeinerem Interesse ist die kinematische Definition und Diskussion der *Evolventen*, der *Fusspunktkurven* und der *Brennlinien*. Für die Evolventen stellen die Grundkurve und deren Tangente die Polkurven dar. Die Diskussion der Fusspunktkurven und Brennlinien ruht auf folgenden Sätzen[138]): Rollt die Kurve c von der ihr kongruenten Kurve c' in symmetrischer Weise ab, so giebt es für die Fusspunktkurve f eines Punktes M' in Bezug auf c' immer eine Bahnkurve, die mit f im Verhältnis $2:1$ ähnlich und ähnlich liegend ist, und die Evolute dieser Kurve ist die durch Reflexion entstehende Brennlinie von M' für c'.

Einen wichtigen Sonderfall stellen die *cyklischen Kurven* dar, die durch das Abrollen von Kreisen definiert sind[139]). Die Formel (1) von Nr. 9 zeigt, dass die momentane $\mathfrak{B}_2$ sich nicht ändert, falls man die Polkurven momentan durch andere mit denselben Krümmungsradien ersetzt; insbesondere also auch durch Kreise. Wie also die Bewegung von σ in σ' in *erster* Annäherung eine *Rotation* um O ist, so ist sie in *zweiter* Annäherung eine *cyklische* Bewegung. Diese Thatsache hat sich auch historisch geltend gemacht; die allgemeine Theorie ist aus der Übertragung der für cyklische Bewegung gewonnenen Resultate erwachsen[140]).

Da bei der cyklischen Bewegung der Durchmesser δ von w_2 eine konstante Länge hat (Nr. 9), so fällt der Ball'sche Punkt U in den Wendepol und die Enveloppe der Wendekreise spaltet sich in die Polkurve und einen zu ihr konzentrischen Kreis. Dieser Kreisring

135) Im ersten Fall entstehen *gewöhnliche*, im zweiten *Kreis*conchoiden.

136) Vgl. *S. Roberts*, Lond. Math. Soc. Proc. 7 (1876), p. 216.

137) Sie sind sämtlich in der Géométrie cinématique enthalten.

138) Die Sätze stammen von *L. A. J. Quetelet*, Brux. Nouv. mém. 3 (1826) und 5 (1829). Für die kinematische Behandlung vgl. *A. Mannheim*, Géométrie cinématique, p. 36 u. 66, sowie *O. Kessler*, Zeitschr. f. Math. 23 (1878), p. 1.

139) Die Geraden umhüllen Parallelkurven zu cyklischen Kurven. Vgl. auch Fussnote 313.

140) *A. Transon*, J. de math. 10 (1845), p. 154; *R. Henning*, J. f. Math. 65 (1866), p. 58. Auch bei *A. Mannheim* bildet dieser Gedanke die Grundlage. Vgl. auch *Resal*, Cinématique, p. 178.

bildet die Region der Punkte, deren Bahnen Wendepunkte besitzen. Von allgemeinen Eigenschaften erwähne ich noch die doppelte Erzeugung dieser Kurven, deren Nachweis sich am einfachsten in Nr. 23 ergeben wird.

S. Roberts [141]) hat allgemein *Ordnung*, *Klasse* und *Singularitäten* der Bahnkurven, Polkurven und Enveloppen bestimmt, falls diese Zahlen für die Bahnkurven von A und B gegeben sind [142]); auch wird, falls die Bahnkurven von A und B durch die Kreispunkte gehen, deren Vielfachheit für beliebige Bahnkurven ermittelt. Sind m, n, μ, ν ihre Ordnung resp. Klasse, so ist z. B. die Bahnkurve eines beliebigen Punktes von der Ordnung $2mn$ und der Klasse $2(mn + m\nu + n\mu)$. Die Methode beruht auf dem *Chasles'schen Korrespondenzprinzip*. *Chasles* [143]) hat später Ordnung und Klasse auch für solche Fälle bestimmt, in denen die Enveloppen zweier Geraden, oder eine Enveloppe und eine Bahnkurve die Bewegung bestimmen. Dieselbe Aufgabe hat auch *S. Roberts* [141]) bald darauf behandelt.

12. Das Kurbelgetriebe. Die Bewegung des *Kurbelgetriebes* ist dadurch bestimmt, dass zwei Punkte A und B auf zwei Kreisen um A' resp. B' laufen. Die Gerade AB heisst *Koppel*. Die Bewegung ist in sich dualistisch (Nr. 3); noch allgemeiner lässt sich jede der vier Seiten des Vierecks $AA'B'B$ als festes System betrachten [144]).

Technisch interessiert zunächst die Frage, ob die Punkte A und B den ganzen Kreis durchlaufen können oder nicht; das Kurbelgetriebe ist dementsprechend *durchschlagend* oder *schwingend*. Hierüber besteht folgender Satz: Ist eine Ecke durchschlagend, so existiert immer noch eine zweite der gleichen Art; beide Ecken gehören der kleinsten Seite an. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür lautet, dass die Summe der kleinsten und grössten Seite höchstens gleich der Summe der beiden andern Seiten ist [145]). Sind beide Summen einander gleich, so ergeben sich Vierecke mit drei und vier durch-

---

141) Lond. Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 268 und 7 (1876), p. 216. Spezielle Fälle behandelt *F. Dingeldey*, Diss. Leipzig 1885.

142) *A. Cayley* untersucht, wann für A und B Umkehrpunkte oder isolierte Lagen auftreten, Cambr. Phil. Soc. Trans. 15 (1894), p. 391, und macht hiervon Anwendung auf das Kurbelgetriebe (Nr. 12).

143) Paris C. R. 80 (1875), p. 346 und 82 (1876), p. 431. Er bestimmt besonders die Vielfachheit von g_∞ als Tangente.

144) Das Viereck heisst auch *Gliederviierseit* oder *Gelenkviereck* (Nr. 24). Für Modelle vgl. z. B. *W. Dyck*, Katalog, p. 348.

145) *F. Grashof*, Maschinenlehre 2, p. 117; die Darstellung bei *F. Reuleaux*, Kinematik 1, p. 282 ist nicht exakt.

schlagenden Ecken[146]). Das erste hat zwei Paare gleicher anstossender Seiten, das zweite hat gleiche Gegenseiten, ist also entweder ein Parallelogramm oder ein Antiparallelogramm.

Dem Kurbelgetriebe kommt in derselben Weise eine theoretische Bedeutung zu, wie den cyklischen Kurven. Die momentane $\mathfrak{V}_2$ einer *beliebigen* Bewegung ändert sich nämlich nicht, wenn man die Bahnkurven zweier Punkte A und B momentan durch Kreise um A' und B' ersetzt. Jede Bewegung kann also in *zweiter* Annäherung durch eine Kurbelbewegung ersetzt werden[147]). Dies geht aber noch weiter. Sie lässt sich sogar in *dritter* und *vierter* Annäherung als Kurbelbewegung auffassen; man hat dazu statt der beliebigen Punkte A und B irgend zwei Punkte der Kurve k_3 oder aber zwei der vier Burmester'schen Punkte zu wählen.

A. Cayley[148]) zeigte, dass die Bahnkurve (*Koppelkurve*, *Dreistabkurve*) eine c_6 ist, die die imaginären Kreispunkte als dreifache Punkte und sonst im allgemeinen noch drei einfache Doppelpunkte besitzt. Für ein durchschlagendes Kurbelgetriebe kann sogar noch ein weiterer Doppelpunkt auftreten (Nr. 23). *S. Roberts*[149]) bewies, dass sie drei Brennpunkte[150]) besitzt, von denen zwei in A' und B' fallen, während ein dritter P' so liegt, dass (Fig. 3) die Dreiecke ABP und $A'B'P'$ ähnlich sind. Der um $A'B'P'$ umschriebene Kreis enthält zugleich die im allgemeinen vorhandenen drei Doppelpunkte der Kurve. *S. Roberts* hat auch die Polkurven bestimmt. Das wichtigste von ihm gefundene Resultat ist die *dreifache Erzeugung der Koppelkurve*. Es

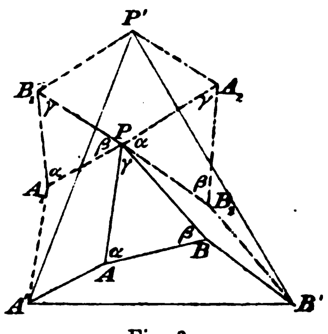


Fig. 3.

146) *G. Darboux* hat diese Fragen mit der Theorie der c_3 in Verbindung gebracht (Bull. sciences math. (2) 3 (1879), p. 100). Er bildet alle Vierecke mit denselben Seiten a, b, c, d, die also einen variablen Winkel enthalten, auf die Punkte einer c_3 ab und untersucht, ob sie einteilig ist oder nicht. *G. Königs* benutzt dazu eine c_4, Cinématique, p. 253.

147) Bei *S. Aronhold*, Kinematische Geometrie, p. 138 und bei *J. Schadwill*, Gliederviersei̇t, p. 378 bildet das Kurbelviereck unter dem Namen *Polviereck* die Grundlage der Theorie. Es wird so definiert, dass um die vier Ecken (Pole) Drehungen stattfinden können, deren Summe Null ist. Vgl. auch *L. Burmester*, Kinematik, p. 49.

148) Lond. Math. Soc. Proc. 4 (1872), p. 105; vgl. auch *W. Johnson*, Mess. of math. 5 (1875), p. 50.

149) Lond. Math. Soc. Proc. 7 (1875), p. 14.

150) d. h. Schnittpunkte von Tangenten in den Kreispunkten.

ist nämlich die Bahnkurve von P auf drei Arten mittelst eines Gelenkvierecks erzeugbar, und zwar so, dass irgend eine Seite des Dreiecks $A'B'P'$ an die Stelle von $A'B'$ als feste Seite eines Gelenkvierecks, nämlich $A'A_1B_1P'$ resp. $B'B_2A_2P'$ tritt, das die Bahn von P liefert[151]). Dieser Satz hat inzwischen eine grosse Reihe von Beweisen erfahren. Einfache Ableitungen stammen von *A. Cayley*[152]) und *W. Clifford*[152]). Sie beruhen darauf, dass wenn man durch einen Punkt innerhalb eines Dreiecks Parallelen zu den Seiten zieht, bei allen gelenkigen Umformungen (Nr. 24) der Figur das Dreieck der Eckpunkte sich ähnlich bleibt, also fest, wenn zwei Punkte fest bleiben[153]). Ein zweiter Satz, der hierher gehört, ist der folgende. Wird die Koppel AB gegen einen der Arme AA' oder BB' vertauscht, so sind die Bahnkurven des so entstehenden Kurbelgetriebes denen des ursprünglichen ähnlich.

Für das Kurbelgetriebe lassen sich auch die Punkte B_i (Nr. 8) konstruieren. Da nämlich A und B zu ihnen gehören, so reduziert sich die biquadratische Gleichung (Nr. 9) auf eine *quadratische*[154]). Man kennt auch die Singularitäten der von den Punkten der Polkurve beschriebenen Bahnen und die Singularitäten, die einer möglichen Verzweigungslage (Nr. 23) des Gelenkvierecks entsprechen. *R. Müller*[155]) hat bewiesen, dass der Ort aller Doppelpunkte für jede Lage von σ eine *Fokalkurve* c_3 ist.

Spezialfall des Kurbelgetriebes ist ausser den drei oben erwähnten auch der, dass die Diagonalen auf einander senkrecht stehen. Kommt diese Eigenschaft einem Viereck zu, so kommt sie nämlich allen Vierecken zu, die durch gelenkige Änderung aus ihm hervorgehen[337]). Besonders erwähnenswert ist der Fall des *Antiparallelogramms* (Fig. 8, p. 253). Die Polkurven, die zu seinen Seiten gehören, sind symmetrisch gelegene und kongruente Ellipsen für die kleineren Seiten AB und CD und analoge Hyperbeln für die grösseren AD und BC. Die Bahnkurven sind daher (Nr. 11) Fusspunktkurven von Kegelschnitten[138]). Dies letzte trifft auch für das Viereck mit

---

151) Die drei Gelenkvierecke und ihre Verbindungen mit P sind in der Figur durch verschiedene Zeichnung unterschieden.

152) Lond. Math. Soc. Proc. 7 (1876), p. 142, 166 u. 9 (1878), p. 27. Andere Beweise gaben *H. Hart*, Mess. of math. (2) 12 (1883), p. 32 und *G. Pastore*, Torino Atti 26 (1890), p. 84.

153) So bei *J. Kleiber*, Zeitschr. f. Math. 36 (1891), p. 296. Vgl. Fussn. 348.

154) *R. Müller*, Zeitschr. f. Math. 37 (1892), p. 213; *Allievi*, Biella piana, p. 61.

155) Zeitschr. f. Math. 36 (1891), p. 11 u. 65; es giebt für jede Lage im allgemeinen zwölf Punkte mit Schnabelspitzen.

zwei Paaren gleicher anstossender Seiten zu; die Polkurven sind in diesem Falle Pascal'sche Kurven[156]).

Noch andere Spezialfälle ergeben sich, wenn man einen der Kreise oder beide als gerade Linien wählt. Der erste liefert den technisch wichtigen der *Schubkurbel*, der zweite den *Ellipsographen*. Die umgekehrte Bewegung des ersten Falles, bei der ein Punkt auf einem Kreise läuft, während eine Gerade durch einen Punkt geht, liefert Kreisconchoiden[157]).

Für praktische Zwecke ist die Kenntnis der Werte von v und φ für die Punkte des Kurbelgetriebes wesentlich, da von ihnen die Inanspruchnahme des Materials u. s. w. abhängt[157a]). Ihre Konstruktion mittelst der Sätze über σ, σ_t und σ_φ (Nr. **10**) gab *H. Mohr*[158]). Diese Konstruktion lässt jedoch im Stich, falls die Pole O und G (Nr. **10**) zeichnerisch nicht erreichbar sind. Eine Konstruktion, die von diesem Mangel frei ist, lieferte *T. Rittershaus*[159]). Die erste graphische Bestimmung im Fall der Schubkurbel gab bereits *J. Schadwill*[160]).

13. Angenäherte Kurvenführungen mittelst des Kurbelgetriebes. Ein wichtiges Problem der Technik verlangt, unter den Kurven des Kurbelgetriebes solche zu finden, die einer vorgegebenen Kurve auf möglichst langer Strecke nahekommen. Für die Praxis handelt es sich in erster Linie um angenäherte *Geradführungen*. Eine solche hat bereits *James Watt*[161]) angegeben. Wird das Parallelogramm $ABCD$ in der Reihenfolge $ACBD$ als Gelenkviereck benutzt und wird die Diagonale AC festgehalten, so zeichnet die Mitte M von BD die bezügliche Kurve. Eine andere angenäherte Geradführung mittelst des Kurbelgetriebes gab *O. Evans*[162]).

---

156) Der Satz stammt von *J. J. Sylvester*; einen Beweis giebt *A. Mannheim* in Lond. Math. Soc. Proc. 6 (1874), p. 35. Die Bahnkurven entstehen aus den allgemeinen durch Abspaltung eines Kreises.

157) Eine Zusammenstellung der durch das Kurbelgetriebe erzeugbaren Bahnkurven giebt *L. Burmester*, Kinematik, p. 300 ff. Vgl. auch *E. M. Blake*, Amer. Math. Soc. Trans. 1 (1900), p. 421.

157a) Kritische Erörterungen giebt *A. Ciappi*, Annali della Soc. degli ingegn. ed archit. italiani 15 (1900), p. 25.

158) Civiling. (2) 25 (1879), p. 613. Vgl. auch *W. End*, Techn. Blätter 22 (1890), p. 83 und *W. J. Vaes*, Delft J. Éc. polyt. 8 (1897), p. 115.

159) Civiling. (2) 25 (1897), p. 461.

160) Gliederviierseit, p. 446. Vgl. auch *J. Taubeles*, Civiling. (2) 32 (1886), p. 635; *Kirsch*, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 34 (1890), p. 1320.

161) Specification Nr. 1432 vom 28. April 1784. Vgl. auch *J. P. Muirhead*, Mechanical inventions of *James Watt*, Bd. 3, London 1854, p. 88.

162) Abhandl. d. kgl. techn. Deputat. f. Gewerbe 1 (1826), p. 225. Die Geradführung beruht darauf, die Koppelbewegung angenähert als die des Ellipso-

Das allgemeinere Problem wurde zuerst von *P. L. Tschebyscheff* behandelt. Er ging von der analytischen Frage aus, in einer Funktion $f(x)$ resp. in einer Reihenentwickelung die Parameter so zu bestimmen, dass *innerhalb eines gewissen Intervalls* ihre Abweichung von einer gegebenen Funktion möglichst gering ist[163]). Diese Methode hat *Tschebyscheff* zunächst auf das Watt'sche Parallelogramm, später auf ein beliebiges Kurbelgetriebe angewandt. Es bieten sich von vornherein zwei verschiedene Wege dar. Man kann die Bedingung stellen, dass die Bahnkurve eine von *möglichst hoher Ordnung* berührende Tangente besitzt; als Resultat ergiebt sich, dass diese Berührung höchstens *sechspunktig* sein kann. Man gelangt zu brauchbaren Annäherungen auch dann, wenn die Bahnkurve *mehrere* neben einander liegende einfache Wendepunkte besitzt. Diesem Fall entspricht die *Watt*'sche Kurve, die drei benachbarte Wendepunkte besitzt. *Tschebyscheff* erkannte auch bereits, dass diese Annäherung wesentlich besser ist, als die durch eine sechspunktig berührende Tangente[164]).

R. Müller[165]) und *L. Allievi*[166]) haben die Theorie der angenäherten Geradführung in der Weise behandelt, dass sie von der Kurve k_3 resp. den Punkten U und B_i (Nr. 8) ausgegangen sind. Man kann an die quadratische Gleichung für die Punkte B_i anknüpfen und die in sie eingehenden Parameter so bestimmen, dass einer dieser Punkte in U fällt. Man gelangt so zu Bedingungen für eine *fünf*punktige Geradführung; sie geht in eine *sechspunktige* über, wenn man die Kurve eine zur Kurvennormale symmetrische Form annehmen lässt. Soll der beschreibende Punkt U insbesondere auf AB liegen, so bestimmen in dieser Lage (Fig. 4) die drei beweglichen Seiten a, b, c des Vierecks

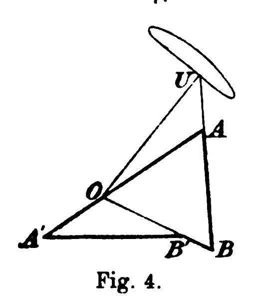


Fig. 4.

graphen zu betrachten; die Bahn der Mitte von AB ist angenähert ein Kreis, was für besondere Vierecke eine brauchbare Gerade liefert. Vgl. auch *G. Pastore*, Torino Atti 27 (1890), p. 47.

163) Petersburg, Mém. sav. étrang. 7 (1853), p. 537 und Petersb. Bull. 4 (1861), p. 433. Eine einfache Ableitung giebt *A. de St. Germain*, J. de math. (3) 6 (1880), p. 19.

164) Einen zweiten Mechanismus dieser Art, bei dem jedoch der beschreibende Punkt M nicht auf AB liegt, hat *Tschebyscheff* in der Beilage zu Petersb. Mém. de l'Acad. 60 (1888) angegeben. Vgl. auch *A. Wassilief* und *N. Delaunay*, P. L. Tschebyscheff, Leipzig 1900, p. 60. Diese Geradführung ist technisch der andern vorzuziehen.

165) Zeitschr. f. Math. 37 (1892), p. 213 u. 38 (1893), p. 130; Gelenkviereck, p. 60 ff. und Zeitschr. f. Math. 46 (1901), p. 330. In dieser Arbeit werden die gestaltlichen Verhältnisse der bezüglichen Koppelkurven näher erörtert.

166) Biella piana, p. 133 ff.

ein gleichseitiges Dreieck[167]). Für diese Seiten und die feste Seite $A'B' = d$ bestehen zwei in a, b, c symmetrische Gleichungen[168]), sodass es noch ∞^2 Vierecke dieser Art giebt; und wenn AB und darauf U gegeben ist, so giebt es immer noch zwei Vierecke, die eine sechspunktige Geradführung von U bewirken[169]). Dagegen bedeutet es keine Besonderheit des Vierecks, wenn der *Ball*'sche Punkt U eine fünfpunktig berührende Tangente hat.

Um von den Punkten mit vier-, fünf- und sechspunktiger Geradführung zu solchen Bahnkurven überzugehen, die mehrere konsekutive Wendepunkte enthalten, hat man an die Kurve b anzuknüpfen, deren Punkte eine vierpunktig berührende Tangente besitzen. Sie scheidet die Ebene in zwei Gebiete, sodass in dem einen die Punkte in der Nähe von b Bahnen mit *zwei* benachbarten Wendepunkten besitzen[170]). Hat b eine Spitze, so giebt es in deren Nähe Punkte mit *drei* benachbarten Wendepunkten, und wenn ein Punkt mit sechspunktig berührender Tangente existiert, so liegen in seiner Nähe sogar Punkte mit *vier* benachbarten Wendepunkten. Es resultieren hieraus die Fragen, wie die Ebene σ durch die Kurve b in Gebiete zerlegt wird, welche Singularitäten den Bahnkurven dieser Gebiete zugehören, und wie die Kurve b und die andern ausgezeichneten Kurven von den Konstanten des Vierecks abhängen. Auch dies haben *Allievi*[171]) und *Müller*[171]) untersucht. *Allievi* betrachtet besonders die Fälle, in denen k_3 zerfällt, und konstruiert die bezüglichen Vierecke methodisch in der Weise, dass er die Punkte A und B auf alle möglichen Arten auf die Bestandteile der Kurve k_3 verteilt, und für jedes Viereck die Singularitäten der Bahnkurven untersucht[172]). Er hat in dieser Weise auch solche Punkte bestimmt, deren Bahn mit möglichst guter Annäherung einen Kreis darstellt; eine Aufgabe, die auch *Tschebyscheff*[173]) in seinen früheren Untersuchungen in Angriff genommen hatte. Auch

---

167) Vgl. auch Gött. Nachr. 1897, p. 3.

168) Die Eigenschaft der sechspunktigen Geradführung bleibt also bestehen, wenn man a, b, c beliebig vertauscht, in Übereinstimmung mit der dreifachen Erzeugbarkeit jeder Koppelkurve. Für die bezüglichen Relationen vgl. auch *Tschebyscheff*, Bull. sciences math. (2) 5 (1881), p. 216 u. Bull. Soc. math. de France 12 (1884), p. 179.

169) Die oben erwähnte Tschebyscheff'sche Geradführung entspricht dem Fall, dass U in die Mitte von AB fällt; es ist $AA' = 4AB$ und $A'B' = 3AB$.

170) Für die cyklische Bewegung ist dies der oben genannte Kreisring.

171) Biella piana, p. 56 ff. u. Zeitschr. f. Math. 43 (1898), p. 36.

172) Für die der fünfpunktigen und sechspunktigen Geradführung entsprechenden Relationen vgl. Biella piana, p. 73 u. 138.

173) Bull. Soc. math. de France 12 (1884), p. 179.

H. Léauté[174]) hat solche Punkte auf der Geraden AB bestimmt. *H. Léauté*[175]) hat die *Tschebyscheff*'schen Methoden auch auf das allgemeinere Problem ausgedehnt, *beliebig* gegebene Kurven durch Bahnkurven des Kurbelgetriebes zu approximieren[176]).

14. Die stetige Bewegung um einen festen Punkt. Die geometrischen Eigenschaften der *stetigen* Bewegung eines Körpers um einen *festen Punkt* O ergeben sich aus den analogen in Nr. 4 aufgestellten Sätzen durch Grenzübergang. Auch hier war die Existenz einer Axe o, um die bei stetiger Bewegung der Körper S eine momentane Rotation ausführt, von *J. d'Alembert*[177]) über 25 Jahre früher gefunden worden, als von *L. Euler*[5]) der entsprechende Satz für diskrete Lagen. Aber erst fast 100 Jahre nach *d'Alembert* reifte die Erkenntnis, dass jede stetige Bewegung um einen festen Punkt durch das *Abrollen zweier Kegel* charakterisiert ist[178]), analog wie die ebene Bewegung durch das Abrollen zweier Kurven. Es ist *L. Poinsot*[179]), der sie vermittelt hat.

Die allgemeine Übertragung der Sätze und Formeln, die auf der Existenz der quadratischen Verwandtschaft $\mathfrak{V}_2$ beruhen, verdankt man *S. Aronhold*[180]). Wenn man im Durchdringungspunkt O' der Axe o mit einer um O gelegten Kugel eine Tangentialebene σ legt und diejenige Momentanbewegung innerhalb dieser Ebene ins Auge fasst, deren Polkurven die Schnittlinien mit den Polkegeln sind, so paart die zugehörige ebene Verwandtschaft $\mathfrak{V}_2$ der Punkte A, A' von σ die Strahlen a, a' des Bündels und ihre Durchdringungspunkte A_k, A_k' mit der Kugel in der Weise, dass a' *Krümmungsaxe* der *sphärischen* Bahn von A_k ist, ebenso a Krümmungsaxe der Bahn von A_k' für die umgekehrte Bewegung[181]). Um also von den metrischen Relationen der ebenen Bewegung zu denen der Kugel zu gelangen, hat man nur die vom Pol O' aus gerechneten Strecken von σ durch die *trigonome-*

174) J. éc. polyt. 53 (1883), p. 59.

175) J. éc. polyt. 46 (1879), p. 205 u. Paris C. R. 96 (1883), p. 639 u. 1356.

176) Er behandelt a. a. O. auch die Aufgabe, eine Kurve c irgendwie durch Kreise und Ellipsen zu approximieren.

177) Recherches sur la précession des équinoxes, Paris 1749, p. 3.

178) Wie in Nr. 8 wird von nicht differenzierbaren Bewegungen abgesehen.

179) Rotation, § 8.

180) Vgl. die Dissertationen in Fussn. 185, 186, 187. Die weiteren im folgenden aufgeführten Sätze gab *Schoenflies,* Geometrie der Bewegung, p. 47 ff.

181) Dies gilt ebenso für jedes Paar zusammengehöriger sphärischer Hüllkurven; vgl. Nr. 8.

trischen Tangenten der bezüglichen Bogen auf der Kugelfläche zu ersetzen[182]).

Die Wendekreise von σ liefern beim Übergang zum Bündel *orthogonale*[42]) *Kegel* K_2, auf die sich jedoch nicht alle Eigenschaften übertragen, die den Wendekreisen zukommen (Nr. 4)[183]). Insbesondere bilden die Strahlen von S, die momentan *Wendestrahlen* ihrer Bahnkegel sind, eine Kegelfläche H_3 und die auf den Strahlen von H_3 senkrechten Ebenen sind die momentanen *Rückkehrebenen* der von ihnen umhüllten Flächen. Endlich existieren zwei den Kurven k_3 und k_3' analoge Kegel K_3 und K_3' solcher Strahlen, deren Bahnkegel eine *stationäre Krümmungsaxe* besitzen; sie durchdringen die Kugel in sphärischen Kurven gleicher Eigenschaft. Die Beziehungen zwischen k_3 und k_3' übertragen sich auf diese Kegel vollständig[184]).

Von speziellen Bewegungen ist wesentlich nur diejenige des *sphärischen Kurbelgetriebes* kinematisch untersucht worden[185]). Sie ist so definiert, dass zwei Punkte eines grössten Kreises sich auf Kreisen bewegen. Eingehender betrachtet sind freilich nur die Fälle des sphärischen *Antiparallelogramms*[186]) und des sphärischen *Ellipsographen*[187]); für sie sind die Polkegel, Wendekegel u. s. w. rechnerisch bestimmt worden. Der sphärische Ellipsograph stellt übrigens diejenige Bewegung dar, die das *Cardanische Gelenk* (Nr. 27) kinematisch charakterisiert; ein auf der Kugel liegender Quadrant läuft mit seinen Endpunkten auf zwei *grössten* Kreisen. Das Abrollen einer um einen Punkt O ihrer Axe drehbaren Rotationsfläche Φ von einer Geraden behandelt *V. Nobile*[188]). Ist Φ eine F_2, so ist der Axenkegel von S' ein K_2.

15. Geschwindigkeit und Beschleunigungen bei der Bewegung um einen Punkt. Da die momentane *Winkelgeschwindigkeit* ω (Nr. **10**) um die Momentanaxe o ein Vektor ist (IV 2, **12** und IV 14, **3**), so kann man sie nach beliebigen durch O gehenden Axen zerlegen.

182) Das Analogon der Euler-Savary'schen Gleichung gab schon *L. Poinsot*, Rotation, § 9.

183) Die Krümmungsaxen ihrer Punkte fallen in eine zu o senkrechte Ebene.

184) Für die Strahlen, die (Nr. 8) dem Ball'schen Punkt und den Burmester'schen Punkten entsprechen, vgl. *Schoenflies*, Geometrie der Bewegung, p. 67 ff.

185) *F. Masi*, Bologna Mem. (4) 1 (1882), p. 349; *F. Buka*, Diss. Göttingen 1876.

186) *R. Sellentin*, Diss. Jena 1881.

187) *O. Marbach*, Diss. Jena 1880.

188) Nouv. ann. (3) 18 (1899), p. 218.

Sind p, q, r ihre Komponenten nach den in S festen Axen x, y, z, und setzt man

$$\lambda_x = \frac{dp}{dt}, \quad \lambda_y = \frac{dq}{dt}, \quad \lambda_z = \frac{dr}{dt},$$

so wird dadurch wiederum ein Vektor λ definiert, den man die momentane *Winkelbeschleunigung* nennt. In derselben Weise stellen die n^{ten} Differentialquotienten von p, q, r die Komponenten der n^{ten} Winkelbeschleunigung $\lambda^{(n)}$ dar. Die durch diese Vektoren definierten Geraden $l, l^{(2)}$ werden als *Axen* der bezüglichen Winkelbeschleunigung bezeichnet. Wird in jedem Augenblick ω als Vektor OU konstruiert, so stellt analog zu Nr. **11** die Geschwindigkeit des Endpunktes U den Vektor λ dar, und wenn λ als Vektor OL gezeichnet wird, so ist $\lambda^{(2)}$ die Geschwindigkeit von L; d. h. es ist (Nr. **10**)

$$\lambda = D\omega, \quad \lambda^{(2)} = D\lambda, \ldots, \lambda^{(n+1)} = D\lambda^{(n)}.$$

Da die Bewegung von S bestimmt ist, falls die drei Euler'schen Winkel φ, ψ, ϑ als Funktionen der Zeit bekannt sind, so existieren zunächst Gleichungen, die p, q, r sowie alle $\lambda^{(n)}$ durch diese Winkel und ihre Ableitungen ausdrücken[189]. Wichtiger sind die Formeln, die von p, q, r als gegebenen Funktionen der Zeit ausgehen. Für *jeden* Punkt $A(x, y, z)$ bestehen die für dieses Gebiet grundlegenden Gleichungen

$$v_x = qz - ry, \quad v_y = rx - pz, \quad v_z = py - qx;$$

ferner führt die Aufgabe, aus p, q, r die neun Cosinus a_i, b_i, c_i als Funktionen der Zeit zu bestimmen, auf die Gleichungen

$$\frac{da}{dt} = rb - qc, \quad \frac{db}{dt} = pc - ra, \quad \frac{dc}{dt} = qa - pb,$$

die selbst wieder auf eine *Riccati'sche* Differentialgleichung reduzierbar sind[190]).

Die Winkelbeschleunigung λ wird am einfachsten so in zwei Komponenten zerlegt, dass die eine λ_ω in die Axe o fällt, während die andere λ_N in die Gerade n fällt, die zu o normal ist und in der Ebene ol liegt; es ist

$$\lambda_\omega = \frac{d\omega}{dt}, \quad \lambda_N = \omega\frac{d\chi}{dt} = \omega u,$$

wo χ der konische Winkel ist, den die Momentanaxe auf dem Axenkegel beschreibt, also u die Wechselgeschwindigkeit der Momentan-

---

189) Vgl. z. B. *Resal*, Cinématique, p. 113 u. 115.

190) *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces 1, Paris 1887, p. 19.

axe (Nr. 26) darstellt. Die von λ_ω resp. λ_N herrührenden Beschleunigungen eines Punktes A sind senkrecht zu Ebenen, die durch A und o resp. l gehen. Hat A von den Axen o, l und n die Abstände r, r_l und r_n, so ist

$$\varphi = \omega^2 r \widehat{+} \lambda r_l = \omega^2 r \widehat{+} \lambda_\omega r \widehat{+} \lambda_N r_n,$$

woraus die Zerlegungen von φ ersichtlich sind[191]). Die Geraden o, n und eine dritte zu ihnen senkrechte Gerade y stellen das natürlichste Axensystem z, x, y für die Analyse der Beschleunigungen dar. Ein ebenfalls zu einfachen Formeln führendes Axensystem bilden die drei senkrechten Richtungen, die durch x, o und r gegeben sind[192]).

Analytische Formeln, die φ durch p, q, r und λ ausdrücken, hat zuerst *H. Resal*[193]) gegeben; es ist

$$\varphi_x = z\lambda_y - y\lambda_z - (q^2 + r^2)x + p(qy + rz).$$

Ph. Gilbert[194]) hat bemerkt, dass der Wert von φ_x am einfachsten durch formale Differentiation von v_x entsteht, in der Form

$$\varphi_x = z\lambda_y - y\lambda_z + qv_z - rv_y,$$

und dies gilt in analoger Weise für jedes $\varphi^{(n)}$. Die vorstehenden Formeln vereinfachen sich, falls man mit v, φ, ω, λ direkt operiert. Einen ersten Satz dieser Art verdankt man *Resal*[195]); er findet seinen kürzesten Ausdruck durch die Gleichung

$$\widehat{\omega\varphi} + \widehat{\lambda v} = 0,$$

wo $\widehat{\omega\varphi}$ etc. das innere Produkt[75]) zweier Vektoren ist. *Ph. Gilbert*, der dem Satz diese Form gegeben hat, hat auch bemerkt, dass er unmittelbar durch Differentiation (Nr. 10) der Gleichung $\widehat{\omega v} = 0$ entsteht. Hiermit ist alsdann auch seine Verallgemeinerung gegeben; es ist[196])

---

191) Die Zerlegung in $\omega^2 r$ und λr_l gab *G. Rivals*, J. éc. polyt. 35 (1853), p. 113.

192) Vgl. *Schell*, Theorie d. Bewegung, p. 474 ff.; *Gilbert*, Accélérations 13, p. 277 sowie Paris C. R. 107 (1888), p. 776, 946; 108 (1888), p. 92. Vgl. auch *G. R. Dahlander*, Stockh. Öfv. 1870, p. 49.

193) Vgl. Cinématique, p. 193.

194) Paris C. R. 104 (1882), p. 162, sowie Accélérations 13, p. 268. Die *Resal*'sche Relation erscheint bei *Gilbert* einfacher in der Form

$$\varphi_x = z\lambda_y - y\lambda_z + \widehat{\omega\varrho}\, p - \omega^2 x,$$

was wieder unmittelbar zu einer Zerlegung von φ führt, und zwar ist $\varrho = OA$.

195) Cinématique, p. 220.

196) Accélérations 13, p. 232 ff. Dort werden noch andere vektorielle

$$\widehat{\omega\varphi^{(n)}} + n\widehat{\lambda\varphi^{(n-1)}} + \frac{n.(n-1)}{1.2}\widehat{\lambda^{(2)}\varphi^{(n-2)}} + \cdots + \widehat{\lambda^{(n)}v} = 0.$$

Die Kenntnis der hier auftretenden geometrischen Örter verdankt man wesentlich *W. Schell*[197]) und *Ph. Gilbert*[197]). Das wichtigste Resultat besagt, dass die Punkte $\varphi =$ const. eine Schar ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsoide bilden, deren Mittelpunkt in O fällt; für sie bilden o und l mit derjenigen Geraden g drei konjugierte Durchmesser, die Ort der Punkte G (Nr. **10**) in den zu o senkrechten Ebenen ist, und zwar mit Rücksicht auf die in diese Ebenen fallende Komponente von φ. Werden n, y, o als x, y, z-Axen gewählt, so sind die Geraden o, l, g Ort der Punkte, für die resp. φ zu den drei Axen parallel ist; analog sind diese Axen Ort der Punkte, für die φ zu den drei Ebenen (og), (lg), (ol) normal ist[198]). Werden o, l, g als x', y', z'-Axe gewählt und sind a', b', c' die zugehörigen Halbmesser, so ist, wie *Gilbert*[197]) fand,

$$\varphi_x = -\frac{x'}{a'}, \quad \varphi_y = -\frac{y'}{b'}, \quad \varphi_z = -\frac{z'}{c'}.$$

16. Polhodie und Herpolhodie. Den wichtigsten Sonderfall der Bewegungen um einen Punkt O stellt dasjenige *Abrollen eines Ellipsoids* E_2[199]) von einer *festen Ebene* π' dar, bei welchem die momentane Winkelgeschwindigkeit dem Radiusvector OA nach dem Berührungspunkt proportional ist. Durch diese Bewegung ist nach *L. Poinsot*[200]) bekanntlich die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt[201]) in dem Falle charakterisiert, dass auf ihn keine Kräfte wirken. Dieses ursprünglich auf dynamischem Boden erwachsene Resultat hat zu einer Fülle kinematischer Betrachtungen Veranlassung gegeben. Von den beiden Axenkegeln ist, wie die dynamischen Gleichungen ergeben, der in S vorhandene Kegel ein K_2, während der Axenkegel von S' im allgemeinen transcendent ist. Die beiden Kurven, in denen die Axenkegel das Ellipsoid E_2 und die Ebene π' durchdringen, und

---

Produkte analog behandelt. Einen Irrtum, der den Formeln für $\varphi^{(2)}$ bei *W. Schell* anhaftet, berichtigt *E. Novarese*, Torino Atti 26 (1890), p. 302.

197) Theorie d. Bewegung, p. 482 ff.; Paris C. R. 107 (1888), p. 776 u. 830; Accélérations 13, p. 274 ff. Vgl. auch *R. Marcolongo*, Giorn. di mat. 27 (1889), p. 90; *G. Castellano*, Riv. di mat. 2 (1892), p. 19 u. 3 (1893), p. 25.

198) Einen noch allgemeineren Satz dieser Art giebt *L. J. Gruey*, Paris C. R. 86 (1878), p. 1241.

199) Im folgenden wird ein Ellipsoid durch E_2, ein Hyperboloid durch H_2, ein Paraboloid durch P_2 bezeichnet.

200) Rotation, chap. 2.

201) Für die nähere Erörterung dieses Problems selbst vgl. IV 13 (*Stäckel*).

von denen die erste bei der Bewegung von der zweiten abrollt, hat *L. Poinsot* als *Polhodie* und *Herpolhodie* bezeichnet.

In den von *Poinsot* seiner Arbeit beigegebenen Figuren enthält die Herpolhodie *Wendepunkte*; dies ist jedoch, worauf zuerst *W. Hess*[202]) hinwies, ein Irrtum. Hieran haben sich weitere fruchtbare Untersuchungen über die Gestalt und die Natur von Polhodie und Herpolhodie angeschlossen[203]). *Hess* fand bereits, dass, wenn auch Wendepunkte beim Poinsot'schen Centralellipsoid ausgeschlossen sind, sie doch auftreten können und müssen, wenn es durch eine andere centrische Fläche F_2 ersetzt wird. Ist sie ein E_2, so treten Wendepunkte immer und nur dann auf, wenn der Abstand ON des Punktes O von x' grösser ist als die mittlere Halbaxe; analoge Sätze bestehen für ein einschaliges resp. zweischaliges H_2.[204]) Auch *Spitzen* kann die Herpolhodie bei einem E_2 nicht besitzen; wohl aber bei einem geradlinigen H_2, wie *G. Darboux* bemerkt hat. Die Tangente der Herpolhodie und ihr von N aus gerechneter Radiusvektor sind nämlich konjugierte Tangenten der F_2; sie können daher nur bei geradlinigen H_2 zusammenfallen, und falls eine gewisse Relation erfüllt ist, tritt dies auch wirklich ein.

Man kann fragen, ob noch andere Flächen vorhanden sind, die bei diesem Bewegungsvorgang von einander abrollen. *F. Siacci*[205]) fand zuerst ein H_2, das von einem Rotationscylinder abrollt, sodann fand *M. Gebbia*[206]), dass jede F_2, die dieselben unendlich fernen Kreispunkte enthält, wie das Poinsot'sche E_2, von einer Rotationsfläche zweiten Grades abrolle. Kennt man ein Paar von Rollflächen, so

---

202) Diss. München 1880 u. Math. Ann. 27 (1886), p. 465 u. 568. Das gleiche fand *M. de Sparre*, Paris C. R. 99 (1884), p. 906. Vgl. auch *A. Mannheim*, *A. de St. Germain*, *J. N. Franke*, *G. Darboux*, *H. Resal* ib. 100 u. 101 (1885). Eine rein kinematische Behandlung des Problems gab *F. W. Baehr* im Delft J. Éc. polyt. 6 (1890), p. 27. Ausführlicher *J. N. Franke* in Krak. Denkschr. 12 (1886).

203) Eine Zusammenstellung giebt *G. Darboux* im Anhang zu *M. Despeyrous*, Cours de mécanique 2, Paris 1886, p. 488 ff. Vgl. auch *E. J. Routh*, A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, 2 vols., 6. ed., London 1897; deutsch von *A. Schepp*, Leipzig 1898, Bd. 2, p. 105 ff.

204) Genügen die Axenquadrate a^2, b^2, c^2 der F_2 der Gleichung

$$x^3 - Px^2 + Qx - R = 0,$$

so ist nach *G. Darboux* das Auftreten von Wendepunkten an

$$c^2 > \frac{2R}{Q} > b^2 > \frac{h}{l^2} > a^2 \qquad \text{oder} \qquad c^2 > \frac{h}{l^2} > b^2 > \frac{2R}{Q} > a^2$$

gebunden, wo $h:\sqrt{l} = ON$ ist.

205) Collectanea mathematica in memoriam di *D. Chelini*, Milano 1881.

206) Rom. Acc. dei Linc. Mem. (4) 1 (1885), p. 326.

kann man durch gewisse Berührungstransformationen unendlich viele solcher Paare ableiten[207]).

Über die Polhodie gab *J. J. Sylvester*[208]) folgenden Satz: Werden in den Punkten der Polhodie auf den Normalen des E_2 konstante Längen aufgetragen, so bilden ihre Endpunkte eine Polhodie auf einem andern E_2, und die Normalen des ersten E_2 sind es zugleich für das zweite[209]). Ein anderer Satz stammt von *J. de la Gournerie*[210]). Er besagt, dass jede Schnittkurve c zweier koaxialen F_2 als Polhodie zweier gewissen E_2 und zugleich als Schnittkurve zweier konfokaler F_2 angesehen werden kann. *Darboux*[211]) fügte hinzu, dass diese F_2 nur dann reell sind, wenn die dritte Flächenschar aus einschaligen H_2 besteht. In jedem Punkt der Polhodie sind die beiden durch ihn gehenden Erzeugenden dieses H_2 Normalen der beiden E_2, für die c eine Polhodie ist. Diese Sätze bringen die Polhodie in Zusammenhang mit dem gelenkigen H_2 (Nr. 31). Aus einem Satz von *H. Durrande* folgt nämlich nunmehr, dass bei der Formveränderung des H_2 jeder seiner Punkte eine Polhodie beschreibt. Man hat damit die Möglichkeit, mittelst eines räumlichen Gelenkvierecks eine Polhodie zu erzeugen; analog lässt sich auch eine Herpolhodie durch einen räumlichen Mechanismus beschreiben[212]).

17. Die Axenflächen der allgemeinsten Bewegung. Der Satz, dass die momentane Bewegung eines Körpers Σ im allgemeinsten Fall eine *Schraubung* ist, wurde zuerst von *G. Mozzi*[213]) ausgesprochen. Die Gesamtheit der Schraubenaxen a bildet in Σ und Σ' je eine geradlinige Fläche; diese *Axenflächen* haben in jedem Augenblick eine Erzeugende gemein und wickeln sich gleitend und rollend so von einander ab, dass die Gleitung längs der Erzeugenden erfolgt[214]); das Verhältnis von Rotation zu Translation ist durch die Axenflächen

---

207) *F. Siacci*, Torino Atti 21 (1886), p. 261; vgl. auch *D. Padeletti*, Napoli Rend. 25 (1886), p. 242.

208) Lond. Phil. Trans. 156 (1866), p. 757.

209) Die invariablen Ebenen sind also parallel.

210) Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques, p. 163 ff.

211) Paris C. R. 101 (1885), p. 200 und 102 (1886), p. 501. Die Kurve c darf nicht sphärisch sein.

212) Vgl. auch *Ph. Gilbert*, Brux. Ann. Soc. scient. 14 B (1890), p. 25; dort findet sich auch eine historische Darstellung der neueren Resultate.

213) Vgl. IV 2 (*Timerding*), Fussn. 29. *A. Cauchy* hat an der dort erwähnten Stelle (Exerc. de math. 2, Paris 1827, p. 87 = Oeuvres (2) 7, Paris 1889, p. 94 ff.) auch zuerst die Axenflächen bemerkt.

214) Die *allgemeinere* Abwickelung geht so vor sich, dass die Gleitung mit den Erzeugenden Winkel bildet; vgl. Nr. 27.

bestimmt. Man nennt diesen Vorgang nach *Reuleaux Schrotung*. Die Flächen müssen entweder beide windschief, oder beide abwickelbar oder beide Cylinderflächen sein[215]).

Zwei Axenflächen H, H' einer möglichen Bewegung unterliegen aber noch weiteren Bedingungen. Sind sie zunächst *windschief*, so müssen sie längs zweier gemeinsamen Erzeugenden den Centralpunkt und die Centralebene gemein haben und denselben Parameter k besitzen; die Striktionslinien gelangen bei der Bewegung Punkt für Punkt zur Deckung, ohne in entsprechenden Punkten gleiche Tangenten zu besitzen. Sind v und v' die relativen Geschwindigkeiten (Nr. 26) des Centralpunktes auf den Striktionslinien von H und H', ν resp. ν' deren Winkel mit den Erzeugenden, und ψ resp. ψ' die Bögen der Bildkurven, die die Richtungskegel von H und H' auf der Einheitskugel beschreiben, so bestehen die Gleichungen[217])

$$v \sin \nu = v' \sin \nu', \quad \tau = v' \cos \nu' - v \cos \nu, \quad d\psi = d\psi',$$

deren letzte besagt, dass die Richtungskegel auf einander abrollen. Eine weitere Relation ergiebt sich, wenn man die Krümmungsradien ϱ und ϱ' der Normalschnitte ins Auge fasst; sie erscheint zuerst bei *E. Resal* und ist von *G. Gautero*[218]) berichtigt worden; sie lautet

$$\left(\frac{\omega}{\tau} + k\right)(\operatorname{ctg} \nu - \operatorname{ctg} \nu') = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'},$$

wo ω und τ die Komponenten der momentanen Schraubengeschwindigkeit sind (Nr. 19).

Sind die Axenflächen *abwickelbar*, so berühren sich ihre Wendekanten im gemeinsamen Punkt und es bestehen die Relationen

$$ds' : \varrho = ds' : \varrho', \quad \tau = v' - v,$$

wenn s und s' den Bogen der Wendekanten darstellen[219]). Ist eine Fläche ein *Kegel*, die andere nicht, so ist $ds' : \varrho' = ds$ und $\tau = v'$, wo s der Bogen der Kurve ist, in der der Kegel die Einheitskugel durchdringt. Sind beide Flächen *cylindrisch*, so bestehen derartige Relationen nicht mehr.

Besonderheiten treten auf, falls jede Momentanaxe eine *Drehungsaxe* ist, so dass beide Flächen von einander *abrollen*; es rollt dann auch

215) Gewöhnlich so ausgesprochen, dass, wenn die Momentaxe in Σ eine feste Richtung hat, so auch in Σ', und umgekehrt.

216) Vgl. *C. Bour*, J. éc. polyt. 39 (1862), p. 36.

217) Vgl. besonders *Resal*, Cinématique, p. 142 ff., wo sich noch viele andere Relationen dieser Art befinden.

218) Giorn. di mat. 20 (1882), p. 168.

219) *H. Duport*, Nouv. ann. (3) 18 (1899), p. 5.

jede Kurve der einen Fläche auf einer Kurve der andern, insbesondere jede geodätische auf einer geodätischen[220]). Die Aufgabe, alle Flächen H zu finden, die von einer Fläche H' abrollen können, führt auf Quadraturen[221]). Sind beide Flächen abwickelbar, so rollen auch die Wendekanten von einander ab[222]) und besitzen in entsprechenden Punkten gleiche erste Krümmung, gehen also bei Abwickelung in kongruente Kurven über[223]). Eine *analytische* Behandlung des Abrollens der Axenflächen gab *N. Nicolaidès*[224]).

In neuester Zeit hat *X. Antomari*[225]) für die Betrachtung der Axenflächen die folgenden geometrischen Parameter eingeführt: den Parameter k, die längs der Erzeugenden fallende Geschwindigkeitskomponente des Centralpunktes $h = v \cos v$, und die ihr entsprechende geodätische Krümmung ϑ des Richtungskegels; beim Abrollen ist ausser $k = k'$ auch $h = h'$. Diese Parameter definieren die Regelflächen. Sind die fünf Grössen $k, h, h', \vartheta, \vartheta'$ als Funktionen von t gegeben, so ist damit eine zwangläufige Bewegung bestimmt; es können also die erzeugten Bahnkurven, Enveloppen und Regelflächen, sowie auch deren Parameter analytisch durch sie ausgedrückt werden.

18. Geometrische Eigenschaften der allgemeinsten Bewegung. Durch Grenzübergang verwandeln sich die Sätze von Nr. 5 in solche über *Tangenten, Normalebenen, Schmiegungsebenen* u. s. w. der stetigen Bewegung[226]). Wir betrachten zunächst *zwei* konsekutive Lagen. Alsdann geht Σ^v in das System der Normalebenen α^v aller Bahnkurven über; das System Σ_m wird mit Σ identisch, während aus dem Sehnenkomplex der Komplex $\mathfrak{C}_2^t$ der *Bahntangenten* wird. Als *Haupt-*

---

220) Ausführlich, doch nicht immer fehlerfrei bei *Resal*, Cinématique, p. 155 ff., behandelt. Vgl. auch Paris C. R. 100 (1885), p. 261.

221) *Königs*, Cinématique, p. 204; *E. Cesàro*, Nouv. ann. (3) 3 (1884), p. 434.

222) Das umgekehrte Problem behandelt *E. Weyr*, Wien. Ber. 104 (1895), p. 292.

223) Für die allgemeinere Frage des Rollens von Flächen aufeinander vgl. *Resal*, Cinématique, p. 155 ff.; *E. Beltrami*, Giorn. di mat. 10 (1872), p. 103; *H. Zimmermann*, Zeitschr. f. Math. 19 (1874), p. 242; *W. Thomson* u. *P. G. Tait*, Treatise on natural philosophy, 1890, p. 90 ff. Die Kurven, längs deren die Berührung stattfindet, haben gleiche geodätische Krümmung.

224) Thèse Paris 1864, p. 47 ff.

225) Thèse Paris 1894, p. 2 u. 67 ff. *Antomari* behandelt auch einige Klassen spezieller Probleme.

226) Diese Sätze wurden von *Chasles* früher aufgestellt, als die von Nr. 5 (Déplacement fini). Beweise gab zuerst *E. de Jonquières*, Mélanges de géométrie pure, Paris 1856. Eine analytische Ableitung geben *G. Battaglini*, Napoli Rend. 9 (1870), p. 79, und *J. Tannery*, Ann. éc. norm. (3) 3 (1886), p. 43.

theorem ergiebt sich, dass in jedem Augenblick die Punkte von Σ mit den Normalebenen ihrer Bahnen ein *Nullsystem* $\mathfrak{W}$ bilden, dessen Hauptaxe die momentane Schraubenaxe ist. Da nun ein Nullsystem und ein *linearer Komplex* $\mathfrak{C}_1$ sich gegenseitig definieren, so ist jede Momentanbewegung durch einen linearen Komplex bestimmt und ebenso umgekehrt. Der betreffende Komplex besteht aus den Geraden, die sich in $\mathfrak{W}$ selbst konjugiert sind, und deren Bahntangenten zu ihnen senkrecht sind[227]).

Das Haupttheorem enthält insbesondere folgende Sätze: 1) Die Normalebenen der Bahnen aller Punkte von g laufen durch die zu g konjugierte Gerade g^{ν}. Falls g nicht dem Komplex $\mathfrak{C}_1$ angehört, kann daher die momentane Bewegung von g als Rotation um g^{ν} angesehen werden[228]). Für die von g beschriebene Fläche (g) bilden die Normalen längs g ein Paraboloid[229]), die Centralebene von (g) ist zur Axe a parallel und ihr Centralpunkt liegt auf derjenigen Normalen, die a trifft. 2) In einer Ebene ε giebt es einen Punkt (*Nullpunkt*), dessen Bahntangente zu ε senkrecht steht, und eine Gerade e (die *Charakteristik*), die sich in ε bewegt und Bahntangente eines ihrer Punkte ist; alle diese Geraden bilden den tetraedralen Komplex $\mathfrak{C}_2^t$.[230]) 3) Die Momentanbewegung ist durch 5 Strahlen des $\mathfrak{C}_1$ bestimmt, insbesondere auch so, dass 5 Punkte auf gegebenen Flächen bleiben; ihre Normalen liefern die 5 Komplexstrahlen. Die Auffindung der Normalebenen beliebiger Punkte von Σ ist aus ihnen konstruktiv lösbar, ebenso die Konstruktion der momentanen Schraubenaxe[231]). 4) Sind g und h konjugierte Geraden, sodass die Momentanbewegung durch Rotationen um sie ersetzbar ist, so trifft ihr gemeinsames Lot GH die momentane Schraubenaxe a senkrecht und wird durch sie so geteilt, dass

$$GA : HA = \operatorname{tg}(ga) : \operatorname{tg}(ha) = k$$

ist, wo k der Parameter der momentanen Schraubung ist. Ferner

---

227) Zu den Bemerkungen des Textes vgl. die ausführlichere Darstellung bei *H. E. Timerding* (IV 2, **10** ff.).

228) Eine Regelfläche ist also durch Abrollen von Flächen erzeugbar.

229) Jede Erzeugende der zweiten Art des Paraboloids ist eine Gerade g^{ν} für eine mögliche Bewegung von g, bei der g die Fläche (g) beschreibt.

230) Den besonderen Charakter dieses Komplexes (vgl. Nr. 5) erörtert *A. Schoenflies*, Zeitschr. f. Math. 28 (1883), p. 229 und Geometrie der Bewegung, p. 109. Einen allgemeineren Komplex $\mathfrak{C}_4$ betrachtet *D. Padeletti*, Napoli Rend. 19 (1880), p. 41.

231) Den Fall, dass die 5 Normalen einer Kongruenz angehören, behandelt *G. Halphen*, Bull. Soc. math. de France 8 (1880), p. 18.

besteht für die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten ω_g, ω_h und die Komponente ω der Schraubung die Relation

$$\omega_g : \omega_h : \omega = \sin(ha) : \sin(ag) : \sin(gh).$$

Der durch *drei* Lagen bedingte Komplex $\mathfrak{C}_2^r$ (Nr. 5) verwandelt sich bei stetiger Bewegung in den Komplex $\mathfrak{C}_2^k$ der *Krümmungsaxen* der Bahnen[232]); seine Hauptpunkte und Hauptebenen sind im allgemeinen imaginär, so dass Punkte mit *stationärer Normalebene* im allgemeinen *nicht* existieren. Die $\mathfrak{V}_3$ geht in eine Verwandtschaft zwischen den Punkten A von Σ und den *Centren der Schmiegungskugeln* ihrer Bahnen über, je zwei entsprechende Punkte A, A' von $\mathfrak{V}_3$ sind so gepaart, dass zugleich A Mittelpunkt der Schmiegungskugel von A' für die umgekehrte Bewegung ist (Nr. 3). Die Fundamentalkurve k_6 von $\mathfrak{V}_3$ enthält diejenigen Punkte, deren Bahnen eine *stationäre Krümmungsaxe* haben, die Kurve i_3 ist Ort der Punkte mit *stationärer Tangente*[233]), die Fläche F_3 enthält die Punkte mit *stationärer Schmiegungsebene*, die Fläche F_4 endlich die Punkte mit *stationärer Schmiegungskugel*. Die Mittelpunkte dieser Kugeln bilden die Fläche F_4' der umgekehrten Bewegung. Auf F_3 giebt es eine Kurve von Punkten, deren Schmiegungsebene *fünfpunktig* berührt, auf F_4 eine Kurve mit *sechspunktig* berührender Schmiegungskugel u. s. w.[234]). Mit geometrischen Örtern anderer Art hat sich insbesondere noch *A. Mannheim*[235]) beschäftigt. So bilden für alle Punkte einer Geraden g die Tangenten ein Paraboloid, die Krümmungsaxen ein Hyperboloid[236]), die Schmiegungsebenen eine abwickelbare F_4, die Centra der Schmiegungskugeln eine c_3, die Hauptnormalen eine Regelfläche R_4, die Centra der Krümmungskreise eine c_5 u. s. w. u. s. w.[237]).

Sind die Axenflächen *Cylinderflächen*, so degenerieren die obigen Sätze teilweise. Die allgemeinen Gesetze dieser Bewegung giebt *A. Schoenflies*[238]). Wesentlich ist, dass die i_3 stets in eine zur Schraubenaxe parallele Gerade degeneriert.

232) Für die geometrischen Eigenschaften der Bahnen für drei und mehr konsekutive Lagen vgl. *A. Mannheim*, Bull. Soc. math. de France 1 (1872), p. 112; *A. Schoenflies*, Geometrie der Bewegung, p. 136, und *Thévenet*, Thèse Paris 1886, p. 23 ff., dessen Resultate jedoch teilweise inkorrekt sind.

233) Diese Kurve, die ursprünglich mehrfach fehlerhaft bestimmt war, erscheint richtig zuerst bei *J. D. Everett*, Quart. J. of math. 13 (1874), p. 39.

234) Vgl. *A. Schoenflies*, Bull. sciences math. (2) 12 (1888), p. 18.

235) Bull. Soc. math. de France 1 (1873), p. 112.

236) *M. Haag*, Bull. Soc. philom. 1870, p. 150.

237) *Mannheim* giebt Konstruktionen der. Krümmungsradien in Paris C. R. 70 (1870), p. 1215 u. 1259, und 110 (1890), p. 391.

238) Math. Ann. 40 (1892), p. 317.

19. Geschwindigkeit und Beschleunigungen der räumlichen Bewegung. Für die analytische Behandlung ersetzt man die momentane Schraubung durch die Bewegung des Anfangspunktes O und die Drehung um eine durch ihn gehende Axe, sodass

$$v_x = \xi + qz - ry, \quad v_y = \eta + rx - pz, \quad v_z = \zeta + py - qx$$

ist, wo ξ, η, ζ die Komponenten der Geschwindigkeit von O sind (IV 2, **11**, *Timerding*). Von hier aus ergeben sich die weiteren Formeln für $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ u. s. w. durch Anwendung der Resultate von Nr. **10** und Nr. **15**, was wieder zu Zerlegungen von φ in einfach definierte Bestandteile führt[239]). Die Formeln für den momentanen Beschleunigungszustand werden am einfachsten, falls man mit *Gilbert*[240]) den Punkt O in den Centralpunkt C der Momentanaxe legt, diese Axe als z-Axe und die Normale der Axenfläche als x-Axe wählt; es beruht darauf, dass die Beschleunigung von C und die Axe der Winkelbeschleunigung in die xz-Ebene fallen. Auch einige weitere Formeln von Nr. **15** hat *Gilbert*[240]) auf die allgemeinste Bewegung übertragen. So besteht z. B. hier die Gleichung

$$\widehat{\omega\varphi} + \widehat{\lambda v} = \text{const.} = \frac{d(\omega\tau)}{dt}.$$

Die Sätze über die bezüglichen geometrischen Örter erhält man unmittelbar, wenn man von folgenden Formeln ausgeht. Sind x, y, z resp. x', y', z' die Koordinaten desselben Punktes für ein in Σ resp. im Raum Σ' festes rechtwinkliges Koordinatenkreuz T resp. T', so ist

$$x' = x_0' + a_1x + b_1y + c_1z,$$
$$y' = y_0' + a_2x + b_2y + c_2z,$$
$$z' = z_0' + a_3x + b_3y + c_3z,$$

wo x_0', y_0', z_0' die Koordinaten des beweglichen Anfangspunktes von T sind, und die a_i, b_i, c_i die 9 Cosinus darstellen. Aus ihnen folgt

$$\frac{d^n x'}{dt^n} = \frac{d^n x_0'}{dt^n} + x\frac{d^n a_1}{dt^n} + y\frac{d^n b_1}{dt^n} + z\frac{d^n c_1}{dt^n}, \cdots;$$

es sind also alle Differentialquotienten wieder lineare Funktionen von x, y, z. Man kann auf diese Weise die geometrischen Örter, deren $v, \varphi, \ldots, \varphi^{(n)}$ irgend welchen Bedingungen genügen, unmittelbar be-

239) Für diese Zerlegungen vgl. *Resal*, Cinématique, p. 199, und J. éc. polyt. 37 (1858), p. 227; *Schell*, Theorie d. Bewegung 1, p. 500; *Gilbert*, Accélérations 13, p. 299. Vgl. auch *G. R. Dahlander*, Stockh. Öfv. 27 (1870), p. 49.

240) Accélérations 13, p. 308 resp. 302. Dort finden sich auch Formeln und Konstruktionen für die Krümmung der von den Axenpunkten beschriebenen Bahnen; vgl. auch Paris C. R. 107 (1888), p. 830.

stimmen[241]). Geometrisch besagen die obigen Gleichungen, dass die Σ_v, Σ_φ, ... auch für die allgemeinste Bewegung Systeme darstellen, die unter sich und mit Σ *affin* sind[242]). Man kann auch noch die von Σ und Σ_v, Σ und Σ_φ, ... bestimmten Komplexe ins Auge fassen, und so zu den in Nr. 18 abgeleiteten Sätzen gelangen[243]). In dieser Weise verfuhr *L. Burmester*[244]), der auf die affine Beziehung zuerst hinwies; die Kurven und Flächen i_3, k_6 ... erhalten so eine Bedeutung für die Theorie des Beschleunigungszustandes.

Auch für die allgemeinste Bewegung von Σ giebt es im allgemeinen einen Punkt $\varphi^{(n)} = 0$, und es bilden die Punkte $\varphi^{(n)} = \text{const.}$ eine F_2, die ihn zum Mittelpunkt hat[245]). Er ist der Doppelpunkt $G^{(n)}$ von Σ und $\Sigma_{\varphi^{(n)}}$; übrigens kann sich statt seiner auch eine Gerade einstellen[246]). Es greifen daher für die $\varphi^{(n)}$ in Bezug auf $G^{(n)}$ und die bezüglichen durch ihn gehenden Geraden die gleichen Resultate Platz, die in Nr. 15 abgeleitet wurden. *X. Antomari*[247]) hat die Werte der $v, \varphi, \varphi^{(n)}$ aus den von ihm eingeführten Parametern k, h, ϑ dargestellt (Nr. 17). Dabei stellt sich heraus, dass der Parameter ϑ erst in $\varphi^{(2)}$ auftritt, so dass für zwei nicht identische Bewegungen die Werte von v und φ für *alle* Punkte übereinstimmen können.

Den einfachsten Fall der Bewegung von Σ stellt die Bewegung einer Geraden dar[248]). Für alle ihre Punkte ist die Projektion v_g von v auf g konstant; auf ihr giebt es ferner einen Punkt, dessen $\varphi^{(n)}$ in g fällt, und einen, dessen $\varphi^{(n)}$ zu g normal ist und beide bilden mit $G^{(n)}$ einen rechten Winkel[249]).

241) Vgl. *C. Jordan*, Bull. Soc. math. de France 1 (1873), p. 144; *J. L. Gruey*, Paris C. R. 86 (1878), p. 1141; *G. Schouten*, Amst. Verh. I, 2, Nr. 5 (1894), p. 3. Vgl. für die hier auftretenden Örter auch *Schell*, Theorie d. Bewegung, p. 508; *Resal*, Cinématique, p. 206 ff.; dessen Resultate sind aber nicht fehlerfrei. Eine Darstellung in Tetraederkoordinaten giebt *C. Formenti*, Ist. Lomb. Rend. (2) 17 (1884), p. 787 u. 18 (1885), p. 195, 238, 418.

242) *J. Petersen*, Kinematik, p. 46 und *R. Mehmke*, Festschrift z. Feier d. 50jährigen Bestehens d. techn. Hochschule Darmstadt, 1886, p. 77 lösen die Aufgabe, aus den φ von drei Punkten die der andern zu bestimmen.

243) In gleicher Weise liefert das Nullsystem die Richtungen der v.

244) Zeitschr. f. Math. 23 (1878), p. 110. Den von Σ und $\Sigma_{\varphi^{(n)}}$ bestimmten Komplex betrachtet *F. Castellano*, Torino Atti 29 (1893), p. 300.

245) Der Punkt $\varphi = 0$ tritt zuerst bei *Resal* auf, Cinématique, p. 205 und J. éc. polyt. 37 (1858), p. 227.

246) Allemal, wenn die Axenflächen Cylinder sind. Die Flächen $\varphi^{(n)} = \text{const.}$ sind dann Kreiscylinder. Vgl. *Ligin*, Bull. Soc. math. de France 1 (1873).

247) Thèse Paris 1894, p. 67.

248) Vgl. *E. Novarese*, Torino Atti 24 (1889), p. 400.

249) Vgl. *R. Mehmke*, Civiling. (2) 29 (1893), p. 487.

20. Bewegung bei Freiheit zweiter und höherer Stufe. Hat ein System Σ *Freiheit zweiter Stufe*, so giebt es für einen Punkt A von Σ als Ort seiner möglichen Lagen im allgemeinen eine *Bahnfläche*, und für eine Ebene ε eine *Hüllfläche.* Diese Bewegung hat zuerst *Th. Schönemann*[250]) untersucht, von dem besonderen Fall ausgehend, dass vier Punkte auf je einer Fläche bleiben[251]). Als ihre wichtigste Eigenschaft fand er den Satz, dass die Normalen aller Bahnflächen in jedem Augenblick *zwei feste Geraden* u und v schneiden, nämlich die gemeinsamen Transversalen der vier gegebenen Flächennormalen[252]). Jede der beiden Geraden rotiert momentan um die andere, sodass jeder ihrer Punkte momentan nicht ein Flächenelement, sondern nur ein *Kurvenelement* beschreibt[253]).

Die mit dieser Bewegung verbundenen geometrischen Örter sind besonders von *A. Mannheim*[250]) und *Thévenet*[254]) diskutiert worden. Die Normalen der Bahnflächen aller Punkte einer g bilden ein H_2,[255]) die Normalen der Ebenen eines Büschels ein P_2, die Tangentialebenen aller Punkte einer g eine abwickelbare F_4, die Berührungspunkte der Ebenen eines Büschels eine c_3 u. s. w. Da jeder Geraden ∞^2 Lagen einer Kongruenz entsprechen, so kann man nach dem Ort der Geraden fragen, für die diese Kongruenz aus Normalen einer Flächenfamilie besteht. Sie bilden nach *A. Ribeaucour*[251]) einen linearen Komplex, dessen Axe das gemeinsame Lot von u und v ist.

Schönemann[250]) hat sich auch bereits damit beschäftigt, dass Σ *Freiheit dritter Stufe* besitzt, insbesondere mit dem Fall, dass drei Punkte auf drei Flächen bleiben; es existiert dann in jeder Lage von Σ ein H_2 von Strahlen, sodass jeder Punkt dieses H_2 momentan nur Freiheit *zweiter* Stufe hat und also nur ein Flächenelement beschreiben kann[256]).

---

250) Berl. Ber. 1855, p. 255, und J. f. Math. 90 (1880), p. 43. Dort (p. 39) findet sich auch ein Beweis von *C. F. Geiser*. Vgl. auch *A. Mannheim,* Surfaces trajectoires.

251) Den Fall, dass diese vier Normalen einem H_2 angehören, behandelt *G. Halphen*, Bull. Soc. math. de France 8 (1880), p. 18.

252) Die Geraden u und v treffen auch die Normalen aller Enveloppen; vgl. *A. Ribaucour,* Paris C. R. 76 (1873), p. 1347.

253) Näheres hierüber, sowie über das zugehörige *Cylindroid* und die allgemeine Theorie der linearen Scharen von Schrauben resp. Komplexen und deren kinematische Bedeutung vgl. in IV 2, 15 ff. (*Timerding*).

254) Thèse Paris 1886, p. 81 ff. Vgl. auch *Schoenflies,* Geometrie d. Bewegung, p. 150 ff.

255) Für zwei Punkte von g ist daher g Tangente ihrer Bahnflächen.

256) Das Nähere hierüber in IV 2, 17 (*Timerding*).

Die analytische Behandlung der Bewegungen bei Freiheit zweiter Stufe[257]) geht davon aus, in Nr. **19** die ξ, η, ζ und die neun Cosinus resp. die p, q, r als Funktionen zweier unabhängiger Variablen u und v anzusehen. Man nimmt zweckmässig zuerst an, dass ein Punkt O fest bleibt. Wird dann durch p, q, r ein Funktionssystem bezeichnet, das nur von u abhängt, und ist p_1, q_1, r_1 eines, das nur von v abhängt, so bestehen die hier grundlegenden Gleichungen[258])

$$\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1,$$

$$\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1,$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1;$$

falls man umgekehrt Grössen p, q, r, p_1, q_1, r_1 kennt, die diesen Gleichungen genügen, so liefern sie (Nr. **15**) stets Werte der neun Cosinus, und zwar hängt die Lösung auch hier nur von einer *Riccati*schen Gleichung ab. Sind sie gefunden, so sind für die allgemeinste Bewegung von Σ bei Freiheit zweiter Stufe noch die Gleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = q\zeta_1 - q_1\zeta - r\eta_1 + r_1\eta, \text{ etc.}$$

zu integrieren, in denen analog ξ, η, ζ nur von u, und ξ_1, η_1, ζ_1 nur von v abhängen[259]). Die wichtigste Anwendung, die diese Gleichungen gefunden haben, betrifft die Flächentheorie, insbesondere deren Krümmung (Nr. **21**)[260]).

Ein wichtiger Sonderfall tritt ein, falls die Axen u und v *sich schneiden*; jede mögliche Bewegung besteht dann in einer Rotation um diesen Schnittpunkt S. Findet dies Schneiden dauernd statt, so giebt es in Σ und Σ' je eine Fläche Φ resp. Φ' der Punkte S, so dass sie sich dauernd berühren und auf einander abwickelbar sind[261]).

---

257) Vgl. Genaueres bei *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 1, Paris 1886, p. 47 ff., sowie *Königs*, Cinématique, p. 232 und *Thévenet*, Thèse Paris 1886, p. 82 u. 142, der auch die Freiheit dritter Stufe analytisch behandelt; p. 132 ff.

258) Vgl. *E. Combescure*, Ann. éc. norm. (1) 4 (1867), p. 108. Einen speziellen Fall von Triederdrehung auf Grund dieser Gleichungen behandelt *M. Fouché*, Paris C. R. 121 (1895), p. 763.

259) *G. Darboux* a. a. O. p. 66 ff.

260) Man kann dazu u und v als Drehungen um die Krümmungscentra der Hauptschnitte einführen.

261) *A. Ribaucour*, Paris C. R. 70 (1870), p. 330; *Thévenet*, Thèse Paris, p. 132.

21. Spezielle räumliche Bewegungen. Wenn die Bewegung von Σ in *cylindrischer Rollung* besteht, so sind die Bahnkurven eben, während eine g im allgemeinen eine Regelfläche erzeugt. Für spezielle Fälle dieser Art hat *L. Burmester* [262]) die Regelflächen betrachtet. Die dem Ellipsographen entsprechende Bewegung ist durch *E. M. Blake* untersucht worden, ebenso der Fall, dass die Polkurven diejenigen des Antiparallelogramms sind [263]). Hierher gehört auch die von *Resal* und *A. Mannheim* untersuchte Bewegung eines geraden Doppelkegels [264]).

Von anderen räumlichen Bewegungen sind besonders solche behandelt worden, bei denen die Bahnkurven und Bahnflächen *eben*, *sphärisch*, oder allgemeiner *algebraisch* sind.

Da es auf einer Geraden im allgemeinen nur drei Punkte stationärer Schmiegungsebenen giebt, nämlich ihre Schnittpunkte mit der F_3 von Nr. 18, so sind *alle* Bahnkurven eben, falls es vier sind. Wenn also vier Punkte von g in je einer Ebene ε_i' bleiben, so thut es jeder Punkt, und zwar beschreibt, wie *Mannheim* [265]) bemerkt hat, jeder Punkt eine *Ellipse*; ihre Centra liegen auf der Geraden h, auf der die Ebenen ε_i' die kleinsten Segmente bestimmen; mit ihr bildet g einen konstanten Winkel [266]).

Wie *G. Darboux* [267]) erkannte, kann sich Σ so bewegen, dass *jeder* Punkt in einer Ebene bleibt, sodass bei der umgekehrten Bewegung *jede* Ebene einen Kegel umhüllt. Abgesehen von trivialen Fällen giebt es nur *eine* solche Bewegung. Die Bahnkurven sind Ellipsen, die Axenflächen sind Kreiscylinder, sodass der eine von innen von einem Cylinder mit doppeltem Radius gleitend abrollt [268]). Die Kegel der umgekehrten Bewegung sind Rotationskegel, deren Axen den Erzeugenden der Cylinder parallel laufen. Die Punkte einer Geraden i haben Geraden als Bahnkurven [269]).

---

262) Zeitschr. f. Math. 33 (1888), p. 337; vgl. auch *Mannheim*, Paris C. R. 106 (1888), p. 820; *J. S.* u. *N. Vaneçek*, Bull. Soc. math. de France 11 (1883), p. 76 und *G. Tesari*, Rom. Acc. dei Linc. Rend. (5) 2¹ (1893), p. 407.

263) Amer. J. of math. 21 (1899), p. 257 u. 22 (1900), p. 146.

264) Paris C. R. 101 (1893) p. 634 u. 817.

265) Palermo Rend. 3 (1889), p. 131. Vgl. auch *G. Halphen*, Bull. Soc. math. de France 1 (1875), p. 117 u. *R. Mensel*, Diss. Münster 1891.

266) Sind die vier Normalen Geraden eines H_2, so ist die Bewegung unmöglich; vgl. *Halphen*, Bull. Soc. math. de France 8 (1880), p. 18.

267) Paris C. R. 92 (1881), p. 118. Vgl. auch *Mannheim*, J. éc. polyt. 60 (1890), p. 75; *A. Schoenflies*, Math. Ann. 40 (1892), p. 317.

268) Die Projektion der Bewegung auf eine zu den Cylindern normale Ebene ist die Ellipsographenbewegung.

269) i stellt die momentane Wendekurve i_3 dar (Nr. 18).

Falls vier Punkte einer g auf *Kugeln* laufen, deren Centra in einer Ebene π' liegen, so bleibt, wie *Mannheim*[270]) bemerkt hat, jeder Punkt von g auf einer analogen Kugel und die Centra dieser Kugeln erfüllen in π' eine c_2.

Den Fall, dass alle Punkte einer g sphärische Kurven beschreiben, hat *E. Duporcq*[271]) untersucht. Die Bahnkurven sind c_4 und liegen auf einem Rotationsellipsoid; je zwei Punkte von g beschreiben ähnliche Kurven; man kann sogar bewirken, dass diese Kurven gleich sind.

R. Bricard[272]) stellt die Frage, ob *jeder* Punkt A einer Ebene π eine sphärische Bahnkurve so beschreiben kann, dass die Centra A' dieser Kugeln auf einer *Ebene* π' liegen. Abgesehen von trivialen Fällen sind zwei solche Bewegungen möglich. In beiden Fällen entsprechen sich A, A' in einer quadratischen Verwandtschaft $\mathfrak{V}_2$; in dem einen Fall entspricht einer Geraden ein Kreis, in dem andern eine gleichseitige Hyperbel. Die umgekehrte Bewegung von π' gegen π ist der direkten gleichartig. Dieses Problem hat Beziehungen zu dem von *Bricard* gefundenen *deformierbaren Oktaeder*[273]).

Theoretisch wichtig ist noch die Bewegung eines *Trieders*, dessen Scheitel eine Kurve c so durchläuft, dass seine Kanten *Tangente, Hauptnormale* und *Binormale* der Kurve sind[274]); sie bildet die Grundlage der *Darboux*'schen Theorie der Kurven und Flächen (Nr. **1**). *A. Mannheim* hat die Resultate der Kinematik zur Auffindung von Sätzen und Konstruktionen der allgemeinen *Flächentheorie* mit grossem Erfolg benutzt. Dies gilt z. B. besonders für die Theorie der *Regelflächen*[275]). Auch für die Probleme der *darstellenden Geometrie* sind die Sätze der Kinematik vielfach benutzt worden[276]).

Einer der bekanntesten Sätze über *flächenläufige* Bewegungen ist

---

270) Bleibt A auf einer Kugel K, so berührt eine um A gelegte Kugel K_a zwei feste Kugeln. Hierauf beruhende Verallgemeinerungen für die Bewegung einer Kugel, bei denen Sätze über Normalebenen in solche über Charakteristikenebenen übergehen, gab *Mannheim*, Paris C. R. 110 (1890), p. 220 u. 270.

271) Paris C. R. 125 (1897), p. 762; J. de math. (4) 5 (1897), p. 121.

272) J. de math. (5) 4 (1898), p. 409.

273) Sind A und a, a' und A' entsprechende Hauptelemente der $\mathfrak{V}_2$, und P, Q resp. P', Q' Punkte auf a, a', so wird das Oktaeder von den Dreiecken APQ, $A'PQ$, $AP'Q'$, $A'P'Q'$ gebildet.

274) *E. Beltrami*, Giorn. di mat. 5 (1867), p. 21 und *W. Schell*, Theorie der Kurven doppelter Krümmung, 2. Aufl. Leipzig 1898, Kap. 9.

275) Deren Erzeugung durch ein bewegliches Trieder behandelt auch *X. Antomari*, Thèse Paris 1894, p. 81.

276) Vgl. besonders *Mannheim*, Cours de géométrie descriptive, Paris 1882, *L. Burmester*, Zeitschr. f. Math. 13 (1873), p. 185.

der, dass jeder Punkt einer Geraden g, von der drei Punkte A, B, C auf drei rechtwinkligen Ebenen α, β, γ bleiben, ein E_2[199]) beschreibt. Man verdankt *G. Darboux* die Erkenntnis, dass die Gerade in allen ihren Lagen *Normale* einer Fläche ist[277]). Die bezügliche Kongruenz ist am ausführlichsten von *R. Menzel*[265]) untersucht worden.

Wenn drei Punkte A, B, C von g Kugeln zu Bahnflächen haben, deren Centra A', B', C' selbst auf einer g' liegen, so ist die Bahnfläche *jedes* Punktes von g eine Kugel. Auch diese Bewegung ist in sich dualistisch. Die Punkte von g und g' sind projektiv zu einander, sodass es einen Punkt einer jeden Geraden giebt, der eine Ebene beschreibt. Es folgt hieraus, dass man durch ein *räumliches Gelenkviereck* einen Punkt in einer Ebene π' laufen lassen kann. Ein Modell dieser Art ist von *Darboux* konstruiert worden[278]).

Um *algebraische* Bewegungen zu finden, kann man von den Formeln von *Rodrigues* ausgehen (Nr. 6) und deren Parameter $x_0, y_0, z_0, A, B, C, D$ als algebraische Funktionen einer oder mehrerer Variabeln wählen. Man erhält so algebraische Bewegungen für Freiheit erster und zweiter Stufe. Auf die Fruchtbarkeit dieses Weges hat *G. Darboux*[279]) hingewiesen und folgende Resultate abgeleitet: Sind die Parameter lineare Funktionen einer Variablen, so sind die Bahnkurven räumliche c_3. Nimmt man sie als lineare Funktionen zweier Variablen, so sind die Bahnflächen *Steiner'sche Flächen*; es giebt im allgemeinen 10 Punkte, die Ebenen beschreiben. Im Anschluss hieran hat *Darboux* auch die Frage erörtert, ob, wenn drei oder vier Punkte Ebenen als Bahnflächen besitzen, dadurch notwendig noch andere Punkte auf Ebenen bleiben. Dies kann eintreten; man kann sogar erreichen, dass die Punkte von einer oder zwei Geraden je ein E_2[199]) beschreiben. Eine Bewegung, bei der *jeder* Punkt eine F_2 beschreibt, ist *nicht möglich*.

Als spezielle Bewegung bei Freiheit *dritter* Stufe ist längst der Fall bekannt, dass eine rechtwinklige Ecke ein E_2[199]) umhüllt und ihr Scheitel eine Kugel beschreibt[280]). Dieser Scheitel liegt nämlich *stets* auf dem oben (Nr. 20) genannten H_2, und beschreibt daher eine Bahn*fläche*[281]). Ein anderes Beispiel bietet eine Gerade g, die mit

277) Man erhält die Fläche, indem man auf g die Segmente zwischen A, B, C und der Projektion des Scheitels der Ecke halbiert. Vgl. auch *Mannheim*, Bull. sciences math. (2) 9 (1885), p. 137.

278) Es befindet sich im Conservatoire des arts et métiers zu Paris.

279) Paris C. R. 92 (1889), p. 118; vgl. noch *Königs*, Cinématique, p. 363 ff.

280) Gergonne's Ann. de math. 5 (1815), p. 172, 351.

281) Diesen Beweis gab *A. Schoenflies*, Geometrie der Bewegung, p. 185.

zwei Punkten in zwei Ebenen bleibt. Diese Bewegung und der durch g erzeugte Komplex $\mathfrak{C}_4$ ist von *R. Menzel*[265]) untersucht worden.

Analog zu dem Trieder, das sich längs einer Kurve bewegt, kann man ein Trieder betrachten, dessen Ebenen dauernd mit der Tangentialebene und den Hauptschnitten einer Fläche zusammenfallen. Hauptzweck dieser besonders von *Mannheim* untersuchten Bewegung ist wiederum Ableitung allgemeiner Sätze der Flächentheorie, insbesondere der Krümmungseigenschaften[281a]). *Mannheim* hat auch die Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel kinematisch diskutiert und für die Flächentheorie verwertet. Er hat besonders die *Parallelflächen*, die *Fusspunktflächen*[282]) und die *Wellenfläche* behandelt[283]).

22. Flächeninhaltsätze[284]). Bewegt sich σ in σ', so soll das Flächenstück, das vom Bogen $A_1 A_2$, von $O_1 O_2$ und von den Normalen $A_1 O_1$ und $A_2 O_2$ begrenzt wird, als die *zu A gehörige Fläche* $\mathfrak{F}_A$ bezeichnet werden. Diese Flächen hat zuerst *J. Steiner*[285]) in Betracht gezogen und über sie folgende Sätze abgeleitet.

Rollt eine geschlossene Kurve p von einer Geraden g' genau einmal ab, so giebt es in σ einen Punkt S, dessen zugehörige Fläche einen *kleinsten* Inhalt besitzt. Dieser Punkt S ist Schwerpunkt von p für diejenige Massenverteilung, die in jedem Punkt der Kurve ihrer Krümmung proportional ist (*Krümmungsschwerpunkt*). Für jeden andern Punkt A von σ ist die Fläche $\mathfrak{F}_A$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{F}_A = \mathfrak{F}_S + \pi A S^2$$

bestimmt, sodass sie auf *Kreisen* um S konstant ist. Ist die Polkurve von σ' eine konvexe geschlossene Kurve p', so besteht, wenn p von p' genau einmal abrollt, die Gleichung

$$\mathfrak{F}_A = \mathfrak{F}_{S_1} + \tfrac{1}{2}(2\pi + \varphi) A S_1^2,$$

wo S_1 den Krümmungsschwerpunkt derjenigen Massenverteilung bedeutet, die der Summe der entsprechenden Krümmungen beider Polkurven proportional ist, und φ den Winkel, den die beiden Normalen

---

281a) Vgl. auch *R. v. Lilienthal*, Deutsche Math.-Ver. 11 (1902), p. 37.

282) Fusspunktflächen entstehen durch Abrollen kongruenter Flächen, analog wie die Fusspunktkurven, Bull. sciences math. (2) 11 (1887), p. 355.

283) Géométrie cinématique, p. 320 ff. Dort finden sich noch weitere Beispiele flächenläufiger Bewegung.

284) Für eine zusammenfassende Darstellung vgl. *M. Despeyrous*, Cours de mécanique 1, p. 402 u. *A. Amsler*, Über den Flächeninhalt und das Volumen durch Bewegung erzeugter Kurven, Schaffhausen 1881.

285) J. f. Math. 21 (1840), p. 33 u. 101.

von A in O_1 und O_2 bilden; $2\pi + \varphi$ ist also der Winkel der gesamten Drehung[286]). Ein analoger Satz gilt auch für das Abrollen eines beliebigen Stückes von p von dem entsprechenden von p'.

Die Steiner'schen Sätze sind von verschiedenen Seiten neu bewiesen und ergänzt worden[287]). Ihre analytische Quelle besitzen sie in einer von *G. Darboux*[288]) gegebenen Formel, die den *Inhalt des Sektors* $\mathfrak{S}_A$ betrifft, den irgend ein Punkt M' von σ' mit dem Bogen $A_1 A_2$ der Bahnkurve von $A(x, y)$ bestimmt. Sind x, y Koordinaten für ein in σ festes System und ist Θ der Drehungswinkel, der dem Übergang von σ_1 in σ_2 entspricht, so besteht die Formel

$$\mathfrak{S}_A = {}^1/_2\, \Theta(x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c) = {}^1/_2\, \Theta t_A^2,$$

wo t_A die Potenz auf einen gewissen Kreis bedeutet, dessen Konstanten a, b, c nur von M' abhängen. Wird statt M' das Drehungscentrum O gewählt, so fällt der Mittelpunkt des Kreises in den Krümmungsschwerpunkt.

Die obige Gleichung liefert eine Reihe von Sätzen, die *geschlossene* Bewegung betreffen, d. h. eine solche, bei der σ nach einem vollen Abrollen von der Kurve p' wieder in die Anfangslage zurückkehrt[289]). Da nämlich die Gleichung drei Konstanten enthält, so muss zwischen den Flächen von vier Punkten eine *lineare Relation* bestehen; eine Thatsache, der zuerst *G. H. Zeuthen*[290]) ohne Beweis Ausdruck gegeben hat. Die bezüglichen Formeln und Sätze sind später von *H. Holditch*[291]), *B. Williamson*[292]), *C. Leudesdorf*[293]) und *A. B. Kempe* aufgestellt worden. Sie lauten:

1) Bewegen sich zwei Punkte A und B auf derselben Kurve c', so ist die Differenz zwischen der Fläche von c' und der zu einem Punkt C der Strecke AB gehörigen Fläche von der Gestalt der Kurve c' unabhängig, und es ist ihr Wert $\pi AC \cdot CB$.

---

286) Sind p und p' kongruente und symmetrisch gelegene Kurven, so ist Umfang und Inhalt der von zwei symmetrischen Punkten beschriebenen Doppelkurve von der Natur von p unabhängig. Vgl. *R. Henning*, J. f. Math. 65 (1866), p. 54 und *Gigon*, Nouv. ann. (2) 7 (1868), p. 462.

287) Vgl. z. B. *Ph. Gilbert*, Brux. Mém. cour. 30 (1861), p. 3.

288) Bull. sciences math. (2) 11 (1878), p. 337. Vgl. auch *Th. Orloff*, Mosk. math. Samml. 11 (1883), p. 457.

289) Die bezüglichen Flächeninhalte unterscheiden sich von denen der Steiner'schen Sätze um den Inhalt der Polkurve.

290) Nouv. ann. (2) 10 (1871), p. 90.

291) Lady's and gentlemen's diary for the year 1858.

292) An elementary treatise in the integral calculus, London 1877, p. 120.

293) Mess. of math. (2) 7 (1878), p. 125 u. 8 (1879), p. 11.

2) Sind A, B, C drei Punkte einer Geraden, so ist für jede geschlossene Bewegung

$$BC \cdot \mathfrak{F}_A + CA \cdot \mathfrak{F}_B + AB \cdot \mathfrak{F}_C + \pi BC \cdot CA \cdot AB = 0.$$ [294])

3) Für vier beliebige Punkte A, B, C, P besteht die Gleichung

$$ABC \cdot \mathfrak{F}_P = BPC \cdot \mathfrak{F}_A + CPA \cdot \mathfrak{F}_B + APB \cdot \mathfrak{F}_C + \pi t_P^2,$$

wo t_P die Potenz von P für den durch ABC gehenden Kreis ist.

Wie *Kempe*[295]) bemerkte, besteht eine solche Gleichung auch dann, wenn es n voller Umdrehungen bedarf, bis die Bahnkurven sich schliessen. Statt des Gliedes πt_P^2 tritt das Glied $n\pi t_P^2$ auf; dies gilt auch, wenn die Drehung von σ bald positiv, bald negativ ist. Auch dürfen sich die Bahnkurven kreuzen; alsdann sind die einzelnen Flächenteile mehrfach, und zwar positiv resp. negativ zu zählen. Ist insbesondere die Gesamtdrehung Null, so ist

$$\text{3a)} \quad ABC \cdot \mathfrak{F}_P + BCP \cdot \mathfrak{F}_A + CPA \cdot \mathfrak{F}_B + PAB \cdot \mathfrak{F}_C = 0.$$

Die Steiner'schen Sätze können auf die allgemeinste Bewegung von σ in σ' übertragen werden. *Kempe*[296]) fand, dass es einen Kreis k_0 giebt, dessen Punkten *Flächen vom Inhalt Null* entsprechen, und dass die Flächen, die zu den Punkten eines mit ihm konzentrischen Kreises gehören, gleich dem n-fachen des zugehörigen Kreisringes sind, falls σ n volle Umdrehungen gemacht hat[297]). Der Kreis k_0 existiert jedoch, wie *Ligin* bemerkte, nicht immer reell[298]); es giebt aber stets einen Punkt K *kleinster* Fläche und es ist

$$\mathfrak{F}_P = \mathfrak{F}_K + n\pi PK^2.$$

Hat nun die Fläche $\mathfrak{F}_K$ einen negativen Wert, so ist k_0 reell.

Sätze wie die vorstehenden bestehen auch für die *Bögen* der Bahnkurven und für die *Enveloppen* der Geraden. Ein Satz *Steiner*'s[299]) lautet, dass wenn p von einer Geraden g' abrollt, für jeden Punkt A von σ die Bogenlänge A_1A_2 gleich der entsprechenden Bogenlänge

---

294) Eine Verallgemeinerung für nicht feste A, B, C giebt *E. B. Elliot*, Mess. of math. (2) 7 (1878), p. 150.

295) Mess. of math. (2) 7 (1878), p. 165.

296) Mess. of math. (2) 8 (1879), p. 42. Für die Übertragung bei nicht geschlossener Bewegung vgl. *V. Ligin*, Bull. sciences math. (2) 11 (1878), p. 310.

297) Für $n = 0$ treten statt der Kreise Geraden auf; *J. Kleiber*, Arch. d. Math. Phys. (2) 14 (1896), p. 426.

298) So z. B. niemals im Fall einfacher konvexer Polkurven.

299) J. f. Math. 21 (1840), p. 35. Vgl. auch *E. Catalan*, Bull. Soc. philom. 1858; *P. Serret*, Nouv. ann. 18 (1859), p. 341. Eine Erweiterung giebt *C. Lamarle*, Brux. Bull. (2) 4 (1858), p. 239.

der Fusspunktkurve von A in Bezug auf p ist. *Mannheim*[300]) hat ihn auf die Bogenlängen der Enveloppen ausgedehnt, die zu beliebigen Kurven von σ gehören. Er ist auch auf den Fall ausdehnbar, dass eine abwickelbare Fläche von einer Ebene abrollt.

Der Satz, der die Bogenlänge der von einer Geraden g umhüllten Enveloppe betrifft, stammt von *Ribaucour*[301]); es existiert ein Punkt T, sodass der Bogen, der zwei Lagen g_1 und g_2 entspricht, gleich dem Produkt aus $(g_2 g_1)$ in den Abstand von g und T ist. Ist die Bewegung geschlossen, so fällt nach *Darboux* T wieder in den Krümmungsschwerpunkt von p'.

Darboux hat auch die zu den Enveloppen mehrerer Geraden gehörigen *Bogenlängen* und *Flächeninhalte* mit einander verglichen, falls die Bewegung geschlossen ist. Sind S_a, S_b, S_c die Bogenlängen, die zu den Geraden a, b, c gehören, so besteht die Gleichung

$$S_a \sin(bc) + S_b \sin(ca) + S_c \sin(ab) = 0,$$

während für die Flächen, die einen Punkt M' mit dem Berührungspunkt auf g_1 und g_2 verbinden, der Satz gilt, dass die Geraden, für die die bezüglichen Flächen gleichen Inhalt haben, je einen c_2 einer konfokalen Schar umhüllen, dessen Centrum bei geschlossener Bewegung in den Krümmungschwerpunkt fällt. Für die Flächen, die zu vier Geraden gehören, hat *A. Schumann*[302]) bei geschlossener Bewegung die bezügliche Gleichung aufgestellt.

E. Duporcq[303]) hat Flächen in Betracht gezogen, die von *Strecken* AB, resp. Bögen AB überstrichen werden. Die Seiten eines geschlossenen Polygons liefern Flächen, deren Summe Null ist, sodass jede geschlossene Kurve eine Fläche vom Inhalt Null überstreicht; zwischen den Flächen, die zu drei Strecken gehören, besteht wieder eine lineare Relation.

Ein grosser Teil der vorstehenden Sätze gestattet die Ausdehnung auf die Bewegung um einen Punkt, und auf die allgemeinste räumliche Bewegung bei einem, wie bei zwei Freiheitsgraden. Da die Bewegung von sechs Parametern abhängt, so besteht bei zwei Freiheitsgraden zwischen den Körperstücken, die von sieben begrenzten Oberflächenteilen beschrieben werden, eine lineare Relation[304]). *Darboux*[305])

300) Géométrie cinématique, p. 524, 528, u. J. éc. polyt. 40 (1863), p. 205.

301) Bull. Soc. philom. 1869, p. 12.

302) Zeitschr. f. Math. 25 (1880), p. 87.

303) J. de math. (5) 1 (1895), p. 443.

304) *G. Königs*, J. de math. (4) 5 (1889), p. 337. *B. Elliot* überträgt Sätze von *Leudesdorf* und *Kempe* auf die Kugel, Lond. Math. Soc. Proc. 12 (1881), p. 47.

305) Bull. sciences math. (2) 2 (1878), p. 338.

hat den Ort der Punkte bestimmt, deren Bahnflächen mit einem Punkt M' Kegelflächen konstanten Inhalts bilden [306]).

C. Die Mechanismen.

23. Mehrere in einander bewegliche Ebenen. Die Gesetze der gegenseitigen (relativen) Bewegung mehrerer Ebenen in einander bilden die kinematisch-geometrische Grundlage für die allgemeine Theorie der ebenen Ketten und derjenigen Mechanismen, deren Punktbahnen einer festen Ebene parallel sind (Nr. 28).

Sind σ_1, σ_2, σ_3 drei ebene Systeme, die sich irgendwie in einander bewegen, so liegen die drei Pole O_{12}, O_{13}, O_{23} auf einer *Geraden* [307]). Bewegen sich beliebig viele Systeme $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ in einander, so gilt das gleiche für die Pole je dreier Systeme σ_i, σ_k, σ_l. Die Gesamtheit aller dieser Pole bildet die *Polkonfiguration* $\mathfrak{P}^{(n)}$, deren allgemeine Gesetze zuerst *L. Burmester* [308]) methodisch untersucht hat. Für einzelne Fälle war dies schon vorher geschehen [309]). Die vier Seiten eines Gelenkvierecks bilden vier gegen einander bewegliche Systeme, und wenn sich das Viereck in einer fünften Ebene σ' bewegt, so erhält man einen Fall, der von *E. Philipps* [310]) betrachtet worden ist. Die 10 Pole O_{ik} der fünf Ebenen bilden die bekannte *Desargues*'sche Konfiguration 10_3 [311]), was gewöhnlich so ausgesprochen wird, dass das Gelenkviereck dem Polviereck eingeschrieben ist, das aus den Polen der Ebenen σ_i in Bezug auf σ' gebildet ist [312]). Die Pole von n Systemen σ_i bilden in derselben Weise die bekannte Konfiguration, die ein ebener Schnitt der Verbindungslinien und Verbindungsebenen von n Raumpunkten ist.

Ist ω_{ik} die zur Bewegung von σ_k in σ_i gehörige momentane Winkelgeschwindigkeit, so besteht die Gleichung

$$O_{13}O_{23} : O_{12}O_{23} = \omega_{21} : \omega_{31},$$

306) Vgl. auch *F. A. Hirst*, J. f. Math. 62 (1863), p. 246, wo sich ein hiergehöriger Satz über Fusspunktflächen findet.

307) Gemäss den Sätzen über Zusammensetzung der Drehungen, vgl. Nr. 2.

308) Civiling. (2) 26 (1880), p. 248, sowie Kinematik, p. 430 ff.

309) Vgl. ausser Fussn. 310 auch *T. Rittershaus*, Civiling. (2) 21 (1875), p. 47 u. (2) 26 (1880), p. 27 u. 283.

310) Ann. des mines (5) 3 (1853), p. 1. *Mannheim*, Géométrie cinématique, p. 77.

311) d. h. es liegen je drei Pole auf einer Geraden und durch jeden Punkt gehen drei dieser Geraden.

312) Ein ähnlicher Satz besteht für jedes Polpolygon; vgl. *G. Jung*, Ist. Lomb. Rend. (2) 18 (1885), p. 337.

wie aus den Sätzen über Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen folgt (IV 2, 12, *Timerding*). Eine Relation, die Pole und Winkelgeschwindigkeiten aller Systeme mit einander verbindet, hat *G. Jung*[312]) gegeben.

Das vorstehende bildet die einfachste Quelle für die *doppelte Erzeugung der cyklischen Kurven.* Man lässt sie dazu (Fig. 5) durch den Punkt P eines Parallelogramms $SAPB$ entstehen, dessen Seiten SA und SB sich um S mit verschiedener Geschwindigkeit drehen. Von den vier sich in σ' bewegenden Seiten σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 kann man einerseits die Seiten SA und AP ins Auge fassen; dann liegt der bezügliche Pol O_a als Punkt von σ' stets auf SA, andrerseits aber auch die Seiten SB und BP, sodass der Pol O_b stets auf SB liegt. Dies liefert die beiden verschiedenen Erzeugungen[313]).

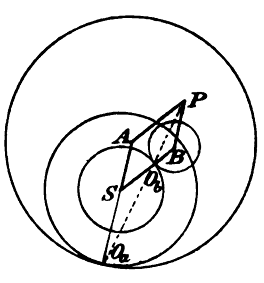


Fig. 5.

Die Frage, wie die Konfiguration $\mathfrak{P}^{(n)}$ durch gewisse Pole *eindeutig* und *konstruktiv* bestimmt ist, hat *L. Burmester*[314]) erörtert. Seine Methoden sind jedoch unmittelbar nur zu benutzen, falls alle Pole im Endlichen liegen; überdies entspricht sein Ausgangspunkt nicht der allgemeinsten Art und Weise, wie die gegenseitige Bewegung von n Ebenen bestimmt sein kann. Ihre allgemeinste Bestimmung geschieht durch Paare zu einander gehöriger Hüllkurven, und zwar sind hierzu $3n - 4$ Paare in der Weise notwendig und hinreichend, dass jeder Ebene σ_i wenigstens drei Kurven angehören. Demgemäss hat *C. Rodenberg*[315]) als allgemeinste Bestimmungsstücke der Bewegung die *Normalstrahlen* (Nr. 9) ins Auge gefasst. Durch $3n - 4$ unabhängige, d. h. solche, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, ist die Polkonfiguration $\mathfrak{P}^{(n)}$ im allgemeinen *eindeutig* bestimmt[316]). Sind nur

313) Diese Auffassung findet sich der Sache nach zuerst bei *G. Bellermann*, Epicykloiden und Hypocykloiden, Berlin 1867. Für die Folgerungen, die hieraus für die *Klassifizierung* fliessen, und für weitere Litteratur vgl. *F. Schilling*, Zeitschr. f. Math. 44 (1899), p. 37; *L. Burmester*, Kinematik, p. 136. *F. Schilling* hat auch eine Sammlung bezüglicher Modelle herausgegeben, die bei *M. Schilling*, Halle a. S. erschienen sind. Für Modelle der cyklischen Kurven vgl. z. B. auch *W. Dyck*, Katalog, p. 335 ff.

314) Die Grundlage bildet das Gelenkviereck und das Viereck der Pole O_{12}, O_{23}, O_{34}, O_{41}. Als Einzelresultat erwähne ich, dass wenn O_{12}, O_{13}, O_{14} eine Gerade bilden, sie mit O_{23}, O_{24}, O_{34} eine Involution bilden; Kinematik, p. 436.

315) Zeitschr. f. Math. 37 (1892), p. 218.

316) Für $n \geqq 6$ braucht also kein Pol gegeben zu sein.

$3n - 5$ Normalstrahlen gegeben[317]), so ist jeder Pol an eine bestimmte Gerade gebunden; dem System $\Gamma^{(n)}$ dieser n Geraden kommen wichtige Eigenschaften zu[318]). Mit ihrer Hülfe hat *C. Rodenberg* die allgemeinsten Bedingungen aufgestellt, die von der Zahl der Normalstrahlen und Pole erfüllt sein müssen, damit $\mathfrak{P}^{(n)}$ eindeutig bestimmt ist, und im Anschluss hieran auch die Bestimmung der $\mathfrak{P}^{(n)}$ konstruktiv erledigt; seine Konstruktionen sind auch dann ausführbar, wenn gewisse Pole ins Unendliche fallen.

Für je zwei Systeme σ_i, σ_k giebt es eine *quadratische Verwandtschaft* $\mathfrak{B}_{ik}$; bei drei Systemen ist durch zwei Verwandtschaften die dritte bestimmt. Ist A, A' ein Punktepaar der einen, A, A'' ein Punktepaar der andern, so werden im allgemeinen A', A'' *keine* entsprechenden Punkte der dritten sein. Es kann dies aber eintreten; derartige Punkte A, A', A'', die ein *Tripel* heissen, haben eine grundlegende Bedeutung. Ihre Theorie verdankt man wesentlich *C. Rodenberg*[319]). Ihre kinematische Bedeutung ist die, dass die drei Punkte A, A', A'' auch in *zweiter* Annäherung gegenseitigen festen Abstand besitzen. Solcher Tripel giebt es im allgemeinen fünf. Für sie bestehen folgende Sätze:

1) Auf der Polgeraden existiert ein (uneigentliches) Tripel; seine drei Punkte bilden mit den drei Polen eine Involution; es ist im allgemeinen *nicht* in zweiter Annäherung fest; ist dies aber der Fall, so gehen die drei Polbahnentangenten durch einen Punkt. 2) *Ein* Dreieckstripel ist immer reell; giebt es deren zwei, so gehen die drei zugehörigen Kollineationsaxen durch einen Punkt. 3) Durch $3n - 4$ Paare A, A' sind sämtliche $\mathfrak{B}_{ik}$ im allgemeinen zu bestimmen; ebenso wenn alle Polgeraden und auf ihnen die bezüglichen Tripel gegeben sind.

Man kann auch die Wendepole V_{ik} in Betracht ziehen und ihre gegenseitige Abhängigkeit bestimmen. Auf diese Weise hat *M. Grübler*[320]) die Krümmungsverhältnisse behandelt.

Die vorstehende Theorie führt zu folgenden Definitionen[315]). Ist die $\mathfrak{P}^{(n)}$ in jeder Lage *eindeutig* bestimmt, so heisst die Bewegung *zwangläufig*. Für singuläre Lagen der $\mathfrak{P}^{(n)}$ können sich mehrere Ebenen momentan wie ein einziges starres System verhalten, sodass sie ein-

317) Die Kette besitzt dann noch Freiheit zweiter Stufe.

318) Über ihre Beziehungen zur Fachwerktheorie vgl. IV 5 a (*Henneberg*).

319) Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins 36 (1890), p. 192 u. Civiling. (2) 42 (1890), p. 565, sowie Zeitschr. f. Math. 37 (1892), p. 239, 336 ff. Vgl. auch *L. Burmester,* Techn. Blätt. 22 (1890). Ein von *Rodenberg* konstruiertes Modell findet sich bei *W. Dyck,* Katalog, p. 328 beschrieben.

320) Riga, Industrie-Zeitung 17 (1891), p. 61.

ander nicht zu bewegen vermögen. Sie befinden sich alsdann in einer *Todlage*[321]). Dies tritt immer und nur dann ein, wenn von den $3n-4$ Bedingungen, die die $\mathfrak{P}^{(n)}$ festlegen, auf gewisse m Systeme mehr als $3m-4$ fallen, sodass sie die Starrheit dieser Systeme bewirken. Es kann aber auch die $\mathfrak{P}^{(n)}$ *nicht eindeutig* bestimmt sein; eine solche Lage heisst nach *Rodenberg Verzweigungslage*[322]). Der einfachste Fall dieser Art wurde bereits von *Aronhold*[323]) erörtert; er tritt für zwei Systeme σ, σ' ein, wenn die Paare A, A' und B, B' in dieselbe Gerade fallen. Jeder Doppelpunkt O' und O'' der durch AB', BA' bestimmten Involution kann alsdann Pol sein; ein Fall, der beim Kurbelgetriebe eintritt, falls $a+d=b+c$ ist. Er bewirkt, dass die Bahnkurve einen „*Sonderdoppelpunkt*" erhält (Nr. **12**), dessen Normalen resp. durch O' und O'' laufen[324]). Die Verzweigungslage tritt immer ein, wenn die $3n-4$ Paare A, A', die die $\mathfrak{B}_{ik}$ bestimmen, auf einer $\Gamma^{(n)}$ liegen[325]). Alsdann giebt es für *je* zwei Systeme σ_i, σ_k im allgemeinen mehrere Pole.

Bei drei Systemen σ_1, σ_2, σ_3 bilden für jeden Punkt A die Geschwindigkeiten v_{12}, v_{23}, v_{31}, da sie Vektoren sind, ein Dreieck, die sechs Geschwindigkeiten v_{ik} also ein Sechseck mit parallelen Seiten; wenn daher die Pole O_{ik} und eine der Grössen v_{ik} bekannt sind, so sind die andern konstruierbar; man benutzt dazu entweder die lotrechten Geschwindigkeiten[326]) oder die von *H. Mohr*[130]) eingeführten Systeme σ_e (Nr. **10**).

In ähnlicher Weise kann man die *Beschleunigungen* mittelst der Punkte G_{ik}, H_{ik} und V_{ik} ermitteln; hierzu dienende Methoden hat *D. J. F. Wittenbauer*[327]) gegeben. Wie auch die Winkelgeschwindigkeiten für die Bewegung von σ_2 in σ_1, resp. von σ_3 in σ_2 sich ändern, so ist, falls V_{12} und V_{23} bekannt sind, V_{13} an eine Gerade gebunden. Dies bewirkt, dass die Konstruktionen linear möglich sind, sie vereinfachen sich noch durch Einführung der G_{ik} und H_{ik}.[328])

321) Die Todlage ist bereits ein dynamischer Begriff. Die Bewegung ist möglich, kann aber von gewissen Gliedern nicht eingeleitet werden. Todlagen des Kurbelgetriebes berücksichtigt eingehend *L. Allievi* in der Biella piana.

322) Gewöhnlich ebenfalls als Todlage bezeichnet.

323) Kinematische Geometrie, p. 140. Die konstruktive Behandlung giebt *L. Burmester,* Kinematik, p. 114.

324) Der Pol des Kurbelgetriebes kommt nach O' aus andern Lagen wie nach O''; daher die beiden im Doppelpunkt vorhandenen Kurvenzweige.

325) *C. Rodenberg,* Zeitschr. f. Math. 37 (1892), p. 248, wo sich auch eine nähere Behandlung für $n=3$ findet.

326) *Schadwill,* Gliedervierseit, p. 412.

327) Zeitschr. f. Math. 32 (1887), p. 314; 33 (1887), p. 193; 40 (1895), p. 91.

328) Vgl. Nr. **10**.

24. Die durch Gelenkketten herstellbaren Verwandtschaften. Wenn von n Ebenen je zwei σ_i und σ_k nur um einen gemeinsamen festen Punkt O_{ik} (*Pol*) drehbar sind, so bilden sie eine *Gelenkkette*, und jedes σ_i heisst ein *Glied* [329]). Jedes Glied lässt sich als *Strecke* oder *Polygon* annehmen, sodass die Endpunkte, resp. die Eckpunkte die *Drehpunkte* oder *Gelenke* abgeben. Den einfachsten Typus dieser Ketten bildet das Gelenkviereck des Kurbelgetriebes.

Da die Bahnkurven der verschiedenen Glieder einer Gelenkkette in gewissen *verwandtschaftlichen Beziehungen* [330]) stehen, so kann man [331]) die Gelenkketten benutzen, um durch sie Verwandtschaften mechanisch zu vermitteln, resp. Kurven zu beschreiben [332]).

Eine Verwandtschaft, die man schon lange gelenkig zu erzielen vermochte, ist die der *Ähnlichkeitstransformation*. Der einfachste Apparat, der dies leistet, ist der von *O. Scheiner* [333]) angegebene *Pantograph*, der (Fig. 6) ein Parallelogramm $ABCD$ benutzt. Werden auf dessen Seiten Punkte P, Q, R, S so angenommen, dass sie auf einer Geraden liegen, so bleibt dies bei allen gelenkigen Veränderungen bestehen. Wird nun die Bewegung von $ABCD$ in σ' so vorgeschrieben, dass P festbleibt, während Q eine Kurve c durchläuft, so durchlaufen R und S ähnliche und mit c ähnlich gelegene Kurven. *J. J. Sylvester* [331]) hat erreicht, dass die eine Kurve gegen die andere um einen Winkel gedreht liegt (Plagiograph). Werden nämlich die Dreiecke $BCE \sim DFC$ hinzugefügt, so beschreiben, wenn A festgehalten wird, E und F die bezüglichen Kurven [334]).

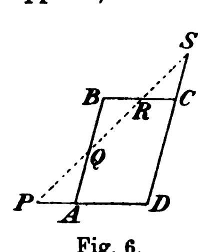


Fig. 6.

Die schnelle Entwickelung, die die Theorie der Gelenkketten erfahren hat, beruht darauf, dass man die Verwandtschaft der *Inversion* [335])

329) Näheres hierüber in Nr. 28 u. 29.

330) Es handelt sich um Punktverwandtschaften der Ebenen σ_i und σ_k.

331) *J. J. Sylvester*, Conversion of motion, p. 179.

332) *J. Neuberg*, Tiges articulés, giebt eine zusammenfassende Darstellung und viele Litteratur.

333) Pantographice, seu ars delineandi res quaslibet per parallelogrammum lineare seu cavum, mechanicum, mobile, Romae 1631.

334) Ersetzt man in Fig. 3 die Buchstaben $A'A_1PAB_1B$ durch $ABCDQR$, so geht sie in die Figur von *Sylvester* über. In der That kann auch aus dem Satz von *Sylvester* die dreifache Erzeugung der Koppelkurve gefolgert werden; *S. Roberts*, Lond. Math. Soc. Proc. 7 (1876), p. 18; ebenso der Satz von der Vertauschbarkeit von Arm und Koppel; vgl. *Neuberg*, Tiges articulés, p. 11.

335) Ist O ein fester Punkt und gilt für je zwei entsprechende Punkte P, P' die Gleichung $OP \cdot OP' = \text{const.}$, so heissen sie *invers* gegen O.

gelenkig vermitteln kann. Diese folgenreiche Entdeckung, die übrigens zunächst unbeachtet blieb, geht auf *Peaucellier* [336]) zurück. Sind (Fig. 7) im Viereck $ABCD$ die Seiten $AB = AD$ und $CB = CD$, und wird E so angenommen, dass $BCDE$ ein Rhombus ist, so ist für alle Lagen $AC \cdot AE = \text{const.}$; es beschreiben daher, wenn A festgehalten wird, C und E *inverse Kurven*. Dasselbe findet statt, wenn $ABCD$ ein beliebiges Viereck mit *senkrechten Diagonalen* ist, während E auf der Diagonale AC so gewählt wird, dass $BE = BC$ ist; es beruht darauf, dass ein solches Viereck in allen Lagen senkrechte Diagonalen behält [337]). In dieser Weise wurde der *Inversor* von *L. Lipkin* [338]) angegeben. Eine einfache Form des Inversors gab auch *H. Hart* [339]). Wird (Fig. 8) das Antiparallelogramm $ABCD$, in dem AC und BD die parallelen Diagonalen sind, durch eine ihnen parallele Gerade in P, Q, R, S getroffen, so beschreiben, wenn P festgehalten wird, Q und R inverse Kurven. *Sylvester* hat die vorstehenden Inversoren ebenfalls so modifiziert, wie den *Scheiner*'schen Pantographen (Fig. 9).

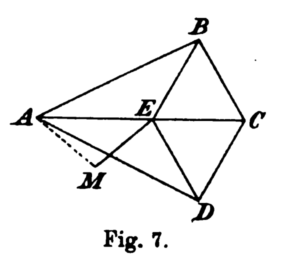


Fig. 7.

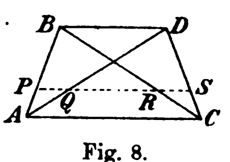


Fig. 8.

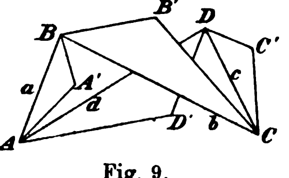


Fig. 9.

Mittelst der Inversoren kann man eine *genaue Geradführung* gelenkig erzeugen. Wird an den Inversor *Peaucellier*'s ein Glied ME so angefügt, dass $ME = MA$ ist, und neben A auch M festgehalten, so ist die Kette zwangläufig und während E auf dem durch A gehenden Kreis läuft, beschreibt C ein Stück einer Geraden. Analog kann man jeden andern Inversor zur Geradführung benutzen [340]).

---

336) Nouv. ann. (2) 3 (1864), p. 344 u. (2) 12 (1873), p. 71.

337) Diese Vierecke spielen hier eine hervorragende Rolle. Ihre Bedeutung dürfte zuerst *W. Johnson* erkannt haben, Mess. of math. (2) 5 (1874), p. 190.

338) Petersburg Bull. 16 (1871), p. 57.

339) Mess. of math. (2) 4 (1874), p. 82, 116. Vgl. auch *A. Mannheim*, ib. (2) 14 (1884), p. 20.

340) Eine zweite auf mehr elementarer Grundlage ruhende Geradführung gab *Hart* in Mess. of math. (2) 5 (1874), p. 35. Vgl. auch *G. Darboux*, Bull. sciences math. (2) 3 (1879), p. 151. Eine genaue Geradführung giebt auch *P. L. Tschebyscheff*, Petersburg Mém. de l'Acad. 1881; sie ist von *C. Stephanos* zu einer Kreisführung verallgemeinert worden, Paris C. R. 95 (1882), p. 677; ferner *Gagarine*, Paris C. R. 93 (1881), p. 711 u. *R. Bricard*, Mathesis (2) 4 (1894), p. 111.

Die Möglichkeit der gelenkigen Geradführung erzeugte naturgemäss die Frage, *welche Kurvengattungen* sich sonst noch durch Gelenkketten beschreiben lassen[341]). Es ist *J. J. Sylvester*[342]), der dieser Frage sofort ein besonderes Interesse zuwandte und auf den die Anregungen auf diesem Gebiet wesentlich zurückgehen. Er bemerkte, dass man erstens die Art der Verwandtschaft mannigfach wechseln kann, je nachdem man die Fixpunkte und die beschreibenden Punkte in den durch die einzelnen Glieder gebildeten Systemen σ_i wählt[343]); zweitens kann man durch Kombination einfacher Ketten zur gelenkigen Erzeugung immer weiterer Kurvenklassen gelangen. Wenn nämlich eine Kette $\mathfrak{G}$ einen Punkt Q_1 von σ_1 auf der Kurve c führt, während σ sich um O dreht, und eine Kette $\mathfrak{G}_1$, während der Punkt Q_1 von σ_1 die Kurve c durchläuft, einen Punkt R_2 von σ_2 eine Kurve c_1 beschreiben lässt, so kann man $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G}_1$ so verbinden, dass Q_1 zwangläufig die Kurve c durchläuft, während sich σ um O dreht. Es bildet daher die Kombination von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ ein Gesamtgelenk $\mathfrak{G}_2$, das aus der Drehbewegung von σ resp. der Bewegung eines Punktes auf einem Kreis die Bewegung von R_2 auf c_1 entstehen lässt[344]). Ausser *Sylvester* haben in dieser Richtung besonders *A. B. Kempe* und *H. Hart*[345]) methodisch gearbeitet; dabei ist noch das Bestreben vorhanden, mit einer möglichst geringen Zahl von Gliedern auszukommen[346]). Ein besonderes Problem dieser Art behandelt *R. Müller*[347]). Wird ein Punkt S mit zwei Seiten eines Gelenkvier-

---

341) Mechanische Beschreibung der algebraischen Kurven durch sogenannte *lineale* Mechanismen hat bereits *H. Grassmann* gelehrt.

342) Conversion of motion, p. 179.

343) Durch den Inversor kann jede *Kreisverwandtschaft* dargestellt werden. Die allgemeinste darstellbare Verwandtschaft erörtert *V. Ligin*, Nouv. ann. (2) 14 (1875), p. 534; vgl. auch *F. Dingeldey*, Diss. Leipzig 1885. Es lassen sich auch anallagmatische Kurven erzeugen, was schon *Sylvester* bemerkte und *A. Mannheim* bewies, Lond. Math. Soc. Proc. 6 (1875), p. 36. Einen speziellen Fall dieser Verwandtschaft behandelt *P. Somoff*, Warschau Univ.-Nachr. 7 (1894).

344) Die geführte Kurve c_2 kann einfacher werden, als die führende Kurve c. Eine gewisse Kette erzeugt die zu c_2 inverse Kurve; durch Verbindung mit einem Inversor erhält man eine c_2.

345) Vgl. Mess. of math. (2) 4 (1874), p. 82 u. (2) 7 (1877), p. 189; Lond. Math. Soc. Proc. 6 (1874), p. 137; 8 (1876), p. 288; 14 (1883), p. 199. Auch *Hart*'s Geradführungen beruhen auf Kombinationen von Peaucellier'schen Inversoren. Vgl. auch *F. Schilling*, Zeitschr. f. Math. 44 (1899), p. 214, der einige einfache Modelle angiebt, die dies erkennen lassen.

346) Auch auf elementarem Wege sind gelenkige Kurvenerzeugungen verschiedenster Art konstruiert worden.

347) Zeitschr. f. Math. 40 (1895), p. 257.



ecks gelenkig verbunden, so kann man verlangen, dass sich von seiner Bahnkurve c_6 ein Kreis oder eine Gerade abspaltet. Als Lösung des zweiten Falls ergiebt sich *Hart's* zweite Geradführung, die Lösung des ersten bilden übergeschlossene Mechanismen (Nr. 25)[348]).

Eine Fragestellung besonderer Art, die auf *J. Kleiber*[349]) zurückgeht, ist folgende. Man kann den Pantographen *Scheiner's* so auffassen, dass er zu einem Punkt Q den Punkt R konstruiert, der durch die Gleichung $PR = \lambda PQ$ bestimmt ist. In Verallgemeinerung hiervon kann man die Pantographen auch so benutzen und mannigfach kombinieren, dass sie einen der Gleichung $PR = \Sigma\lambda_i PQ_i$ genügenden Punkt konstruieren (für $\Sigma\lambda_i = 1$). Man kann auch zu *räumlichen* Ketten dieser Struktur gelangen, und sie zur Konstruktion affiner und kollinearer Kurven benutzen[350]). Alle diese Apparate zeigen die Eigenschaft, dass bei den durch sie möglichen Umformungen gewisse analytische Relationen invariant bleiben, nämlich diejenigen, die den affinen Charakter der bezüglichen Kurven ausdrücken. Dies führt nun zu der Frage, die kinematische Bedeutung anderer algebraischer Umformungen anzugeben, bei denen gewisse Relationen invariant bleiben und umgekehrt, und zu sehen, ob und wie sie sich durch Kombination von Gelenkketten realisieren lassen. Auch diese Frage hat *Kleiber*[351]) in einzelnen Fällen behandelt.

Gelenkketten sind auch für *analytische Zwecke* konstruiert worden. Schon in seinen ersten Arbeiten gab *Sylvester*[352]) eine solche zur Ausziehung der Quadratwurzel (*Extractor*); *St. Loup*[353]) konstruierte eine Kette zur Auflösung der Gleichungen dritten Grades; kürzlich gab *A. Emch*[354]) Gelenkketten zur Auswertung elliptischer Integrale.

Für den praktischen Wert dieser Ketten kommen die Geschwindigkeitsverhältnisse in Betracht (Nr. **10**); diese haben *V. Ligin* und

---

348) Einen Apparat zur Beschreibung eines sphärischen c_4 giebt *H. Hart*, Lond. Math. Soc. Proc. 6 (1874), p. 136.

349) Arch. d. Math. Phys. (2) 14 (1896), p. 432. Modelle, die diese Ketten und ihren Zusammenhang mit den Pantographen und Plagiographen *Sylvester's* illustrieren, sind bei *W. Dyck*, Katalog, p. 318 ff. näher beschrieben. Vgl. auch die ähnlichen Zwecken dienenden Apparate von *P. Somoff*, Fussn. 447.

350) Die ersten Ketten für kollineare Kurven gab ebenfalls *Hart*, Lond. Math. Soc. Proc. 8 (1877), p. 286. Vgl. auch *H. G. Zeuthen*, Tidskr. for Math. (4) 1 (1877), p. 161.

351) Zeitschr. f. Math. 41 (1896), p. 176, 233, 281.

352) Eine Vereinfachung gab *W. Johnson*, Mess. of math. (2) 5 (1876), p. 159.

353) Paris C. R. 79 (1874), p. 1323.

354) Ann. of math. (2) 1 (1900), p. 81. *F. T. Freeland* giebt eine Kette, die x^m für rationales m darstellt, Amer. J. of math. 3 (1881), p. 316.

M. d'Ocagne behandelt[355]; in neuester Zeit eingehend auch *A. Ciappi*[157a]. Eine graphische Konstruktion der Werte von v und φ giebt *H. Mohr*[180].

25. Die Untersuchungen von A. B. Kempe[356] und die übergeschlossenen Ketten. *A. B. Kempe* ging davon aus, dass zwischen den Cosinus der Gegenwinkel eines Vierecks eine lineare Relation besteht. Kombiniert man zwei *ähnliche* Vierecke gelenkig, und nimmt auf zwei entsprechenden Seiten zwei entsprechende Punkte P und P_1 an, so gelangt man zu einer Relation, die nur die Seiten und einen (von P abhängigen) Parameter enthält. Wird nun dieser Relation z. B. noch die Bedingung hinzugefügt, dass der Abstand eines Punktes der Kette von einer festen Geraden konstant sein soll, so gelangt man auf diese Weise zu einer Reihe von Geradführungen, die diejenigen von *Peaucellier* und *Hart*, sowie andere von *Kempe* selbst angegebene als Spezialfälle liefern.

Man verdankt *Kempe*[357] weiter den Satz, dass *jede algebraische Kurve* durch eine *Gelenkkette* beschrieben werden kann. Der Beweis dieses Satzes beruht erstens darauf, dass man einen Punkt gelenkig auf einer Geraden führen kann und zweitens auf der Existenz der folgenden, ebenfalls von *Kempe* angegebenen Ketten: einer, die eine *Schiebung* bewirkt, sodass sie einen Punkt Q eine zu P kongruente Kurve beschreiben lässt (*Translator*), einer zweiten, die die *Verdoppelung der Winkel* bewirkt, sodass wenn P auf seiner Kurve mit einer festen Geraden OX einen Winkel $POX = \varphi$ bildet, Q auf einer Kurve so geführt wird, dass $QOX = 2\varphi$ ist (*Multiplikator*), endlich einer dritten, die in ähnlicher Weise die *Addition* oder *Subtraktion* von Winkeln bewirkt (*Additor* und *Soustractor*)[358]. *Kempe* hat bereits darauf hingewiesen, dass diese Ideen auf den *Raum* übertragbar sind. Die Ausführung hat *G. Königs*[359] gegeben, und da man im Raum einen Punkt gelenkig auf einer Ebene führen kann (Nr. **21**), so kann man jede *algebraische* Bahnfläche *gelenkig* konstruieren.

Weitere Untersuchungen von *Kempe* betreffen die Theorie der *übergeschlossenen* Ketten. Wenn es bei einer zwangläufigen Kette Punkte P, Q giebt, deren Abstand bei der Bewegung *konstant* bleibt,

355) Nouv. ann. (2) 20 (1881), p. 456; (3) 1 (1882), p. 153; (3) 3 (1884), p. 199.

356) Sie finden sich zusammengestellt in *Kempe*, Straight line. Modelle der bezüglichen Apparate erörtert auch *W. Dyck*, Katalog, p. 315.

357) Lond. Math. Soc. Proc. 7 (1876), p. 213 und Straight line, p. 33 ff.

358) Man kann auch bewirken, dass ein Punkt eine Kurve beschreibt, die zu einer andern bezüglich einer Geraden symmetrisch liegt (*Reversor*).

359) Paris C. R. 120 (1895), p. 861. Jede einem System Σ auferlegte algebraische Bedingung ist sogar gelenkig ausführbar, ib. 120 (1895), p. 981.

so kann man die Kette durch Einfügung eines Gliedes PQ zu einer *übergeschlossenen zwangläufigen Kette* machen; ebenso kann es möglich sein, ganze Gelenkketten so einzufügen, dass sich übergeschlossene Ketten ergeben[360]). Das einfachste Beispiel liefert ein Parallelogramm, das Punktepaare konstanten Abstandes in Menge darbietet. Übergeschlossene Ketten hat *Kempe* zunächst für ein Gelenkviereck $ABCD$ bestimmt. Sind a, b, c, d seine Seiten und nimmt man je einen Punkt A', B', C', D' resp. mit a, b, c, d fest verbunden an, so erhält man ein neues Viereck, und nun stellt sich *Kempe*[361]) die Aufgabe, dies so zu thun, dass für beide Vierecke die gleichen Relationen bestehen. Ist dies der Fall, so kann durch beide die gleiche zwangläufige Bewegung vermittelt werden und man erhält eine übergeschlossene Kette. Hierher gehört z. B. der Pantograph *Sylvester's* und seine Umformung des *Hart*'schen Inversors[362]) (Fig. 9).

Eine *analytische* Studie dieser Ketten hat *G. Darboux*[363]) geliefert gemäss folgender Überlegung. Wenn von den Relationen zwischen den Parametern eines polygonalen Streckensystems einige in *Identitäten* übergehen, so können die übrigbleibenden Gleichungen durch unendlich viele Werte der Parameter befriedigt werden; durch solche Werte wird eine bewegliche übergeschlossene Kette geliefert. *L. Burmester*[364]) hat folgende Sätze abgeleitet. Wird ein Punkt P mit je einem Punkt A_1, B_1, C_1, D_1 einer Seite des Vierecks $ABCD$ verbunden, und sucht man die Bedingung der Beweglichkeit, so müssen A_1, B_1, C_1, D_1 auf einem Kreise liegen; P ist *Brennpunkt* eines $ABCD$ eingeschriebenen c_2 und bleibt bei der Bewegung immer wieder ein solcher Brennpunkt, sodass die Punkte P eine *Fokalkurve* bilden. Werden mehrere Punkte P so bestimmt, dass sie mit allen zugehörigen Gelenken eine übergeschlossene Kette bilden, so ergeben sich die Ketten von *Kempe*, resp. eine noch allgemeinere Klasse[365]).

Eine einfache Erklärung gewisser übergeschlossener Ketten hat *J. Kleiber*[366]) gegeben; sie beruht auf dem Satz von *Clifford*[151]),

360) Vgl. über diese Ketten auch Nr. 29.

361) Lond. Math. Soc. Proc. 9 (1878), p. 133.

362) Die Ecken der über AB, BC, CD, DA konstruierten Dreiecke bilden hier stets ein Parallelogramm.

363) Bull. sciences math. (2) 3 (1879), p. 151.

364) Zeitschr. f. Math. 38 (1893), p. 193.

365) Hieraus folgt, dass die Koppelkurve nicht nur auf drei, sondern auf ∞^1 Arten durch übergeschlossene Mechanismen erzeugbar ist; *J. Kleiber*, Zeitschr. f. Math. 36 (1891), p. 296. Modelle zu diesen Mechanismen erörtert *W. Dyck*, Katalog, p. 331.

366) Zeitschr. f. Math. 36 (1891), p. 296, 328; 41 (1896), p. 179.

dass wenn man durch das Innere eines Dreiecks Parallelen zu zwei Seiten zieht, bei allen gelenkigen Umformungen das Dreieck der Ecken sich ähnlich bleibt und die Verhältnisse der Seiten konstant. Diese Anordnung gestattet auch jede durch Schiebung erfolgende *Umordnung*. Mittelst dieser Umordnungen gelangt man in einfacher Weise zu den bekannten und zu neuen übergeschlossenen Ketten, in die Dreiecke und Parallelogramme eingehen.

26. Relative Bewegung[367]. Bewegt sich ein Gebilde Σ in Σ', während ein Punkt A in Σ eine Eigenbewegung ausführt, so heisst diese seine *relative* Bewegung bezüglich Σ. Seine Bewegung in Bezug auf Σ' heisst *absolute* Bewegung; diejenige Bewegung, die A als unveränderlicher Punkt von Σ in Σ' haben würde, seine *Führungsbewegung*. Diese Begriffe finden besonders auch dann Anwendung, wenn Gebilde bestimmter geometrischer Eigenschaft in Σ mit der Zeit wechseln, wie z. B. der Pol auf der Polkurve, die Momentanaxe auf dem Axenkegel und der Axenfläche, der Schnittpunkt oder Berührungspunkt zweier beweglichen Kurven auf ihnen u. s. w. Die nämlichen Bezeichnungen gelten für Geschwindigkeiten und Beschleunigungen jeder Art und jeder Ordnung[368].

Grundlegend ist hier der Satz, dass sich die absolute Geschwindigkeit v, die relative v_r und die Führungsgeschwindigkeit v_f wie *Vektoren* verhalten; d. h. es ist $v = v_r \overset{\wedge}{+} v_f$; für ein in Σ festes Axensystem x, y, z bestehen daher die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} v_x = \xi + qz - ry + \dfrac{dx}{dt}, \\ v_y = \eta + rx - pz + \dfrac{dy}{dt}, \\ v_z = \zeta + py - qx + \dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Für die *Beschleunigungen* gilt ein solcher Satz nur, wenn die Führungsbewegung in einer *Translation* besteht, sei es längs einer

367) Innerhalb der Kinematik kommt die relative Bewegung wesentlich für die Theorie der Zahnräder und der allgemeinen Mechanismen in Betracht (Nr. 23 u. 27). Weiteres über sie in IV 6.

368) Ist σ das Bogenelement der Polkurve, so wird die relative Geschwindigkeit $d\sigma : dt = u$ *Wechselgeschwindigkeit* des Pols genannt. Bei der Drehung um einen festen Punkt heisst die relative Geschwindigkeit $d\sigma : dt = \psi$ die *Wechselgeschwindigkeit der Momentanaxe*, wenn σ der Bogen ist, den der Axenkegel auf der Einheitskugel erzeugt. Für die allgemeinste Bewegung giebt es zwei analoge Komponenten $u = de : dt$, $\psi = d\sigma : dt$, wo de das Element des kürzesten Abstandes für zwei Erzeugende ist.



Geraden oder längs einer Kurve. Da man nun die Bewegung von Σ in die Bewegung eines Punktes O und eine Drehung um O zerlegen kann, so kann man die Untersuchung der relativen Beschleunigung auf den Fall der Drehung um einen Punkt beschränken.

Die Sätze über die relative Beschleunigung knüpfen sich an den Namen von *G. Coriolis*[369]). Bei dem Problem, die dynamischen Gleichungen der relativen Bewegung analytisch aufzustellen, fand er für die Beschleunigungen die Formel

$$\varphi = \varphi_r \widehat{+} \varphi_f \widehat{+} \varphi_c,$$

wo φ die von der wirkenden Kraft herrührende Beschleunigung darstellt, φ_f derjenigen Kraft entspricht, die der Bewegung von Σ in Σ' äquivalent ist, und $\varphi_c = 2\omega v_r \sin(a, v_r)$ normal zur Momentanaxe a und zu v_r ist und als *Coriolis'sche Beschleunigung* bezeichnet wird[370]). Sie stellt die doppelte Geschwindigkeit dar, mit der der Endpunkt V_r des Vektors $OV_r = v_r$ um a rotiert[371]). Das obige Resultat ist seitdem vielfach abgeleitet worden, wesentlich durch drei verschiedene Methoden, eine geometrisch differentielle, eine analytische und eine vektorielle[372]). Die letztgenannten haben den Vorzug, dass sie auf jedes $\varphi^{(n)}$ ausdehnbar sind. Wird v von O aus als Vektor OV abgetragen, so ist (Nr. **10**) φ die Geschwindigkeit von V und aus (1) folgt sofort

$$\varphi_x = \frac{dv_x}{dt} + qv_z - rv_y;$$

aus dieser von *E. Bour*[373]) gefundenen Formel kann die Zerlegung von φ in φ_r, φ_f und φ_c durch Umformung leicht abgeleitet werden. Die Verallgemeinerung dieser Formel auf $\varphi^{(n)}$ gab *Ph. Gilbert*[374]), nämlich die Gleichung

---

369) J. éc. polyt. 21 (1832), p. 268; 24 (1835), p. 146. Näheres in IV 6.

370) *Ph. Gilbert* giebt auf Grund dieses Satzes Konstruktionen für Krümmungscentra der Bahnkurven der relativen Bewegung, Brux. Ann. Soc. scientif. 3B (1879), p. 81.

371) Die zugehörige Kraft, auf den Punkt V_r bezogen, stellt nach *G. Coriolis* das Analogon der Centrifugalkraft für die Rotation dar.

372) In dieser Weise leitete zuerst *B. de St. Venant* die Formeln für v und φ ab, und zwar mittelst der symbolischen Gleichung $D = D_r + D_f$, angewandt auf einen beliebigen Vektor, Paris C. R. 21 (1845), p. 623 (vgl. Nr. 7). *J. Petersen*, Kinematik, p. 11, 37, setzt $x = f(t_1, t_2)$, $y = \varphi(t_1, t_2)$, $z = \psi(t_1, t_2)$, sodass $t_2 =$ const. resp. $t_1 =$ const. die relative und die Führungsbewegung definieren, und erhält die Formeln für absolute Bewegung bei variablem t_1 und t_2.

373) J. de math. (2) 8 (1863), p. 1. Die Leistung von *Bour* besteht vornehmlich in der Einführung vereinfachender analytischer Hülfsgrössen.

374) J. de math. (4) 4 (1888), p. 456, wo sich die obige Ableitung findet.

$$\varphi_x^{(n+1)} = \frac{d\varphi_x^{(n)}}{dt} + q\varphi_z^{(n)} - r\varphi_y^{(n)};$$

er hat sie auch benutzt, um im Fall der Bewegung eines einzelnen Punktes die Komponenten von $\varphi^{(n)}$ für solche Koordinatensysteme aufzustellen, die von Punkt zu Punkt wechseln, insbesondere zur Ableitung der Gleichungen von Nr. **10**. Eine allgemeine Formel, die nicht Rekursionsformel ist, gab *J. Somoff* [375]) auf dem Wege vektorieller Differenziation; nach ihm ist

$$\varphi^{(n)} = \varphi_f^{(n)} \widehat{+} \varphi_r^{(n)} \widehat{+} (n+1) D\varphi_r^{(n-1)}$$
$$\widehat{+} \frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2} D^2 \varphi_r^{(n-2)} \widehat{+} \cdots \widehat{+} (n+1) D^n v_r.$$

Dreht sich Σ um den in Σ' festen Punkt O, während sich in Σ ein System S um O dreht, so gilt auch für die *Winkelgeschwindigkeit* der relativen und absoluten resp. zusammengesetzten Bewegung von S in Σ und Σ' und der Führungsbewegung von Σ in Σ', dass sie sich wie Vektoren verhalten; d. h. es ist $\omega = \omega_r + \omega_f$. Da wieder λ die Geschwindigkeit des Endpunktes U des Vektors $OU = \omega$ ist, so lassen sich die Formeln für λ und $\lambda^{(n)}$ ebenfalls nach der oben befolgten vektoriellen Methode ableiten. Wird in S ein System XYZ angenommen, so bestehen für die Komponenten nach diesen Axen die Gleichungen

$$\lambda_x = \frac{dp}{dt} + \beta r_f - \gamma q_f = \frac{dp_r}{dt} + \frac{dp_f}{dt} + q_f r_r - r_f q_r,$$

und es ist wiederum

$$\lambda = \lambda_r \widehat{+} \lambda_f \widehat{+} \lambda_c,$$

wo λ_c eine analoge Bedeutung hat, wie oben φ_c. Diese Formeln hat bereits *H. Resal* [376]) gegeben; ihre Ausdehnung auf $\lambda^{(n)}$ ist durch *Ph. Gilbert* [377]) geleistet worden. Ebenso verdankt man ihm Formeln, die die Beziehungen zwischen $\varphi^{(n)}$ und $\lambda^{(n)}$ zum Ausdruck bringen. *G. Königs* [378]) hat mittelst der vorstehenden Sätze Kurven bestimmt, die bei räumlicher Bewegung eine Hüll*kurve* besitzen, indem er näm-

---

375) Kinematik, p. 394 u. Petersburg Mém. de l'Acad. 9 (1866). Vgl. auch *M. Lévy*, Paris C. R. 86 (1878), p. 1068; *Ph. Gilbert*, ib., p. 1390 u. Accélérations 18, p. 252, wo sich eine umfassende Zusammenstellung ähnlicher Formeln findet; *A. Laisant*, Paris C. R. 87 (1878), p. 204; *G. Castellano*, Riv. di mat. 2 (1889), p. 19.

376) Cinématique, p. 266. Die obige Ableitung gab *Gilbert*, Paris C. R. 103 (1886), p. 1248.

377) Accélérations 18, p. 263 ff.

378) Paris C. R. 119 (1894), p. 897. Vgl. auch Cinématique, p. 306.

lich den Ort eines Punktes sucht, für den v_r und v_f in dieselbe Gerade fallen. Die Aufgabe führt auf Quadraturen; die Kurven sind überdies unabhängig von der Axenfläche von Σ'.

27. Zahnräder und verwandte Mechanismen. *Zahnräder* dienen im allgemeinen zur Übertragung *gleichmässiger* Drehungen von einer *Axe* oder *Welle* auf eine andere[379]). Die Übertragung erfolgt durch die bei der gegenseitigen Bewegung ins Spiel tretenden *Druck-* und *Reibungskräfte*. Je nachdem die Axen parallel sind, sich schneiden oder windschief liegen, heissen die Räder *cylindrisch*, *konisch* oder *räumlich* resp. *hyperboloidisch*. Eine Darstellung ihrer allgemeinen kinematischen Gesetze hat *Th. Olivier*[380]) gegeben. Sind a und b die Axen, Φ_a und Φ_b die Oberflächen zweier mit ihnen verbundenen Zähne und Σ_a resp. Σ_b die Systeme, denen Φ_a und Φ_b angehören, so findet die drehende Bewegung um a und b so statt, dass Φ_a und Φ_b einander stets berühren, also *Hüllflächenpaare* für die relative Bewegung von Σ_a gegen Σ_b sind[104]).

Ist Σ das System, in dem die Bewegung von Σ_a und Σ_b erfolgt, so erhält man Flächenpaare Φ_a und Φ_b erstens so, dass man sich Σ_a fest denkt. Alsdann liefert jede Fläche Φ_b eine zugehörige Hüllfläche Φ_a in Σ_a; dabei bilden die auf Φ_a liegenden Charakteristiken von Φ_b die momentanen Berührungslinien. Man kann aber auch in Σ eine Fläche Φ *beliebig* nehmen und die Hüllflächen bestimmen, die zu ihr für die Bewegung von Σ_a in Σ und von Σ_b in Σ gehören, so bilden auch sie ein Paar Φ_a, Φ_b. Auf Φ entstehen dann im allgemeinen zwei *verschiedene* Scharen von Charakteristiken k_a resp. k_b. Diese Darstellung liefert unmittelbar die zwei Zahnrädertypen, die *Olivier* unterschieden hat. Falls jede Charakteristik k_a mit der entsprechenden k_b nur *einen* Punkt gemein hat, so berühren sich auch Φ_a und Φ_b nur in *einem Punkt* und die Räder heissen nach *Olivier Präzisionsräder*[380]). Wenn dagegen k_a und k_b ganze *Kurventeile* gemein haben, so berühren sich auch Φ_a und Φ_b in Kurven; die Räder eignen sich daher zur Kraftübertragung und heissen *Krafträder*[380]). Eine Unterscheidung anderer

379) Die Übertragung kann übrigens auch so erfolgen, dass die Drehungen nicht gleichmässig sind, vgl. Fussnote 390. Für Modelle vgl. z. B. *W. Dyck*, Katalog, p. 344.

380) Engrenages, p. 4 ff. Vgl. *G. Gautero*, Bologna Mem. (4) 1 (1880), p. 203. Die allgemeine Theorie ist über die Arbeiten von *Olivier* nicht hinausgekommen. Ich habe daher im Text die von ihm herrührende Einteilung in *Präzisionsräder* und *Krafträder* beibehalten, obwohl diese Namen in neuerer Zeit nicht mehr geläufig sind. Man spricht statt dessen von *Punkt*verzahnung und *Linienverzahnung*.

Art knüpft an die Art der relativen Bewegung von Σ_a gegen Σ_b an, die entweder in einem blossen *Rollen* oder in einem *Rollen nebst Gleiten* besteht[381]).

Sind die Räder *cylindrisch*, ω_a und ω_b die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten, und konstruiert man in einer Ebene σ, die zu a und b senkrecht ist, Kreise, sodass $\varrho_a : \varrho_b = \omega_b : \omega_a$ ist, so stellen diese Kreise die Polkurven für die Bewegung von σ_a gegen σ_b dar (*Rollkreise*). Sind auch die Zähne cylindrisch, so reduziert sich die Theorie auf den Fall *ebener* Zahnräder[382]).

Hier kommt zunächst die Frage in Betracht, wie man für eine *beliebige* ebene Bewegung Hüllkurvenpaare φ_a und φ_b *graphisch* angenähert finden kann. *J. V. Poncelet*[383]) hat zu diesem Zweck die einem beweglichen System σ_b angehörige Kurve φ_b als Enveloppe von Kreisen, insbesondere von Krümmungskreisen betrachtet, die Lagen dieser Kreise in der festen Ebene σ_a bestimmt und dann wieder deren Enveloppe gezeichnet. Grösseren Nutzen gewährt ein von *Ch. E. L. Camus*[384]) eingeführter Kunstgriff, der die Bestimmung der Hüllbahn φ_a zu φ_b auf die Bestimmung einer Bahnkurve zurückführt. Ist nämlich p diejenige Polbahn, durch deren Abrollen von p_b in σ_b die Kurve φ_b als Bahnkurve eines Punktes A entsteht, so beschreibt A beim Abrollen der Kurve p von p_a in σ_a die Kurve φ_a als Bahnkurve[385]). Nimmt man nun p beliebig, so erhält man in den Bahnkurven φ_a und φ_b *desselben* Punktes von σ in σ_a und σ_b stets ein Paar entsprechender Hüllkurven.

In der Theorie der Zahnräder sind die Kurven p_a und p_b Kreise, man kann dann auch p als Kreis nehmen und findet φ_a und φ_b als cyklische Kurven[386]); in dieser Weise gelangt man zur *Cykloidenverzahnung*. Die *Triebstockverzahnung* beruht darauf, dass wenn φ_a

---

381) Eine Übersicht giebt *V. Ligin*, Nouv. ann. (2) 13 (1874), p. 497. Eine andere Unterscheidung der Bewegungsart giebt *F. Grashof*, Maschinenlehre 2, p. 235.

382) Der Ort der Berührungspunkte von φ_a und φ_b in σ heisst in diesem Fall nach *Reuleaux Eingriffskurve*. Sie ist wichtig für die Auswahl solcher Stücke entsprechender Kurven φ_a und φ_b, die man zur Konstruktion der materiellen Räder benutzen kann.

383) Seit 1827; vgl. *H. Resal*, Cinématique, p. 125.

384) Paris, Mém. de l'Acad. 1733, p. 117.

385) p heisst bei *Reuleaux* Nebenpolbahn. Die drei Pole O_a, O_b und O_{ab} fallen dauernd zusammen. Das Kurvenstück φ_a muss so gewählt werden, dass seine Normalen p_a treffen. Geschieht dies unter konstantem Winkel, so ist φ_a eine Parallelkurve zu p_a.

386) Bereits von *de la Hire* gekannt, Paris, Mém. de l'Acad. 9 (1694), p. 341. Vgl. auch *L. Euler*, Petersburg Abh. 5 (1754), p. 299.

und φ_b entsprechende Hüllkurven sind, dies auch für zwei Parallelkurven φ_a' und φ_b' von ihnen gilt, die sich je in einem Punkt der gemeinsamen Normale von φ_a und φ_b berühren. Insbesondere kann man φ_a als Punkt wählen und erhält φ_a' als Kreis und φ_b' als Parallelkurve einer cyklischen Kurve. Die *Evolventenverzahnung*[387]) entsteht, falls man eine durch den Pol O gehende Gerade p als Polbahn von σ und zwei zu p_a und p_b konzentrische Kreise, die p berühren, als Polkurven p_a' und p_b' von σ_a und σ_b gegen σ wählt. Nimmt man dann A auf p beliebig, so bilden die zu p_a' und p_b' gehörigen Kreisevolventen ein Hüllpaar φ_a, φ_b. Diese drei Fälle stellen die hauptsächlichsten Typen der ebenen Zahnräderprofile dar[388]). Praktisch kommt dabei noch der Gesichtspunkt in Betracht, den Winkel der gemeinsamen Normale von φ_a und φ_b mit der Polkurvennormale möglichst gross zu machen, weil hiervon die Grösse der gleitenden Reibung und des gegenseitigen Druckes und damit die Triebkraft der Räder in erster Linie abhängt.

Allgemeinere Probleme über ebene Zahnräder haben kürzlich *É. Delassus* und *M. Disteli* behandelt. *Delassus*[389]) geht von der Bewegung dreier beliebigen Ebenen σ_a, σ_b, σ gegen einander aus und fragt nach solchen Punkten A von σ, deren in σ_a resp. σ_b liegende Bahnkurven ein Hüllkurvenpaar für die Bewegung von σ_a gegen σ_b darstellen. Die notwendige und hinreichende Bedingung ist, dass A auf der *Polgeraden* $O_a O_b$ liegen muss. Fallen nun die Pole O_a, O_b und O_{ab} stets zusammen, so hat *jeder* Punkt von σ diese Eigenschaft; als Zahnräder ergeben sich zwei Polkurven p_a und p_b, die sich ohne Gleitung gegen einander bewegen. Sie liefern die sogenannten *unrunden* Räder, bei denen die Drehungen *nicht* mit gleichmässiger Geschwindigkeit erfolgen[390]). Fallen die Pole nicht zusammen, und soll noch *jeder* Punkt der Polgeraden die genannte Eigenschaft haben, dann ist diese Gerade zugleich Polkurve für σ gegen σ_a und für σ gegen σ_b, was dem Fall der Evolventenverzahnung entspricht. Es kann aber auch nur ein einzelner Punkt dieser Art auf der Polgeraden existieren, dann haben die Polkurven all-

---

387) Zuerst von *L. Euler* bemerkt, Petersb. Abh. 11 (1765), p. 209.

388) Für die einzelnen Fälle und ihre zeichnerische Behandlung vgl. man die p. 191 genannten Lehrbücher. Eine analytische Behandlung einzelner Fälle giebt *P. Richelmy*, Torino Atti 16 (1880), p. 29.

389) Bull. sciences math. (2) 22 (1898), p. 251.

390) Vgl. Fussn. 379. Über die unrunden Räder vgl. z. B. *Burmester*, Kinematik, p. 370 ff. Auf sie als ideale Rollkurven können noch Zähne, aus Hüllkurven bestehend, aufgesetzt werden.

gemeinen Charakter und dies liefert Hüllkurvenpaare allgemeinster Art. *Disteli*[391]) giebt eine allgemeine graphische, resp. analytische Methode zur Konstruktion solcher Polkurven p_a und p_b, die als unrunde Rollräder[390]) dienen können. Aus jeder als Tangentengebilde aufzufassenden Kurve kann ein solches Kurvenpaar p_a und p_b konstruiert werden; nimmt man sie insbesondere als Punkt, resp. Strahlbüschel, so ergeben sich die beim Antiparallelogramm auftretenden kongruenten Ellipsen resp. Hyperbeln.

Cylindrische Räder sind auch so möglich, dass *räumliche* Zahnprofile auftreten. Man erhält sie z. B. so, dass man φ_a resp. φ_b Schraubungen um a resp. b ausführen lässt[392]). Man gelangt auf diese Weise auch zu Präzisionsrädern dieser Art; die *Olivier*'sche Erzeugungsweise liefert sie, indem man in Σ eine auf der Ebene (ab) senkrechte Ebene η als Fläche Φ und in ihr eine Gerade g als Ort der Berührungspunkte wählt. Diese Räder sind bereits von *R. Hooke*[393]), später von *White*[394]) angegeben und von *Olivier*[395]) theoretisch erörtert worden; sie rollen ohne Gleitung von einander ab. Der Ort der Berührungspunkte ist für Σ_a und Σ_b je eine *Schraubenlinie* s_a resp. s_b; doch können Φ_a und Φ_b noch mannigfach gewählt werden. Die *White*'schen Räder entstehen so, dass man an a resp. b je ein Dreieck befestigt, sodass eine Ecke des einen in eine Seite des andern fällt, und diese um a resp. b die gleiche Schraubung ausführen lässt; dabei liefert die bezügliche Ecke die Schraubenlinien s_a und s_b. *Olivier* bemerkt, dass der Ort der Berührungspunkte in η nicht eine Gerade zu sein braucht und dass s_a und s_b nicht die nämliche Tangente haben müssen. Man kann die Räder auch in solche mit Hüllflächen verwandeln, indem man die Schraubenlinien durch ihre abwickelbaren Flächen ersetzt, sodass je eine Tangente die momentane Berührungslinie ist.

Die allgemeine Theorie der *konischen* Räder ist von der Theorie der ebenen nicht wesentlich verschieden. Legt man um die Axen a und b Rotationskegel mit den Öffnungswinkeln α und β, sodass

---

391) Zeitschr. f. Math. 43 (1898), p. 1.

392) Eine weitere Modifikation stellen solche Räder um parallele Axen dar, bei denen die Cylinder durch Kreiskegel ersetzt sind. Sie benutzte zuerst *O. Römer*, Machines approuvées par l'Académie, Paris 1735, p. 89.

393) Collection of Lectures Nr. 2, London 1674, p. 70. Ein Modell zeigte *Hooke* schon 1666 in London vor.

394) Sie erschienen 1808 auf der Pariser Ausstellung. Vgl. auch *Poincaré*, Cinématique, p. 158.

395) J. de math. 4 (1839), p. 304. *Euler* hatte solche Räder für unmöglich gehalten; vgl. *Olivier*, Engrenages, p. 100.

$$\sin\alpha : \sin\beta = \omega_b : \omega_a$$

ist, so sind sie Polkegel für die relative Bewegung von S_a gegen S_b (*Rollkegel*). Schneidet man die Räder durch eine Kugel um O, so reduziert sich die Aufgabe auf die Drehung der Kugel in sich und es übertragen sich alle für ebene Räder abgeleiteten Resultate. Das gleiche gilt aber auch für diejenigen, bei denen räumlich gestaltete Zahnprofile in Betracht kommen, also auch die Rädertypen von *Hooke* resp. *White*; und ebenso auch von den Ergebnissen von *Delassus* und *Disteli*.

Praktisch kommt übrigens für die Übertragung einer Drehung von einer Axe auf eine andere ausser den konischen Rädern wesentlich noch das *Cardanische* Gelenk (*Hooke*'scher Schlüssel) in Betracht (Nr. **14**). Zur Übertragung einer *konstanten* Winkelgeschwindigkeit kann es jedoch nur bei kleinen Bewegungen annäherungsweise benutzt werden[396]). Ist γ der Winkel, den die Ebenen der beiden grössten Kreise bilden, C einer ihrer Schnittpunkte, und werden die Bögen CA und CB durch ϑ_a und ϑ_b bezeichnet, sodass $\omega_a : \omega_b = d\vartheta_a : d\vartheta_b$ ist, so ist

$$\omega_a : \omega_b = 1 - \sin^2\gamma \sin^2\vartheta_a : \cos\vartheta_a;$$

das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ist daher nicht konstant, auch nicht einmal angenähert. Durch Verbindung zweier Cardanischen Gelenke kann man aber eine sphärische Gelenkkette erreichen, für die sich bei *jedem* Winkel γ ein *konstantes* Verhältnis für $\omega_a : \omega_b$ einstellt. Für diesen von *Goubet* angegebenen Mechanismus[397]) hat *H. Resal*[398]) die bezüglichen Formeln eingehend abgeleitet. Das gleiche leistet ein von *Clemens* angegebener Apparat, den näher *C. Rozé*[399]) und ebenfalls *Resal* erörtert haben[400]).

Im Fall *räumlicher* Räder hat man die beiden windschiefen Axen a und b als konjugierte Rotationsaxen der relativen Bewegung von Σ_a gegen Σ_b zu betrachten[400]). Die Axe c der bezüglichen momentanen Schraubung teilt den kürzesten Abstand von a und b so, dass (Nr. **18**)

$$AC : BC = \operatorname{tg}(ac) : \operatorname{tg}(bc), \quad \omega_a : \omega_b : \omega = \sin(bc) : \sin(ca) : \sin(ab)$$

ist. Als Axenfläche ergiebt sich daher für Σ_a und Σ_b je ein *Rotationshyperboloid*, das durch Rotation von c um a resp. b entsteht. Sind a

396) Genaue Erörterung bei *Th. Caronnet*, Nouv. ann. (3) 16 (1897), p. 472.
397) Er erschien 1878 auf der Pariser Ausstellung.
398) Paris C. R. 117 (1893), p. 599.
399) Paris C. R. 84 (1877), p. 1148.
400) Vgl. auch *S. Cappa*, Torino Atti 18 (1882), p. 549.

und b, sowie ω_a und ω_b gegeben, so sind die Hyperboloide bestimmt[401]).

Bereits 1816 hat *Olivier*[402]) räumliche Präzisionsräder angegeben, die zu denen von *Hooke* resp. *White* analog sind, sodass ihre relative Bewegung in einem blossen Rollen besteht, später (1831) auch solche Präzisionsräder, für die die Relativbewegung im Rollen und Gleiten besteht. Krafträder der ersten Art sind nicht möglich; Krafträder der zweiten Art kannte im Fall rechtwinkliger Axen bereits *Pappus*, nämlich die Schraube ohne Ende; das ihnen zugrunde liegende Prinzip lässt sich nach *Olivier* für beliebige Axen benutzen.

Um methodisch zu diesen Zahnprofilen zu gelangen, kann man gemäss *Olivier*'s allgemeiner Methode als Fläche Φ eine Ebene ε wählen und sie so bewegen, dass sie sich um a resp. b dreht, und senkrecht zu sich mit konstanter Geschwindigkeit η verschiebt[403]). Die Flächen Φ_a und Φ_b sind dann Tangentenflächen von Schraubenlinien, und falls ihre Erzeugenden l_a und l_b von a resp. b den Abstand r_a und r_b haben, und k_a resp. k_b die Schraubenparameter sind, so ist

$$r_a \omega_a \cos(\varepsilon a) = r_b \omega_b \cos(\varepsilon b) \quad \text{und}$$
$$k_a \omega_a \sin(\varepsilon a) = k_b \omega_b \sin(\varepsilon b) = 2\pi\eta.$$

Wenn nun die in ε liegenden momentanen Charakteristiken l_a und l_b nur einen Punkt gemein haben, was den allgemeinen Fall darstellt, so erhält man Präzisionsräder, und nur wenn l_a und l_b zusammenfallen, Krafträder. Beides ist möglich[404]).

Ist ε zu einer Axe a parallel, so geht Φ_a in die Cylinderfläche einer Kreisevolvente, und die Berührungskurve in eine Kreisevolvente selbst über; es kann sowohl Präzisionseingriff, wie Krafteingriff[405]) erzielt werden. Ist ε zu beiden Axen parallel, so sind Φ_a und Φ_b Evolventencylinder, es ist aber nur Präzisionseingriff möglich.

Die *allgemeine* Theorie räumlicher Räder liefert als Hüllflächen-

---

401) Formeln giebt *K. Keller*, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 14 (1870), p. 738.

402) Über die Entstehung seiner Arbeiten berichtet *Olivier* in der Vorrede zu Engrenages. Ein Modell solcher Räder beschreibt genauer *T. Rittershaus* bei *W. Dyck*, Katalog, p. 344.

403) *J. Pützer*, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 4 (1860), p. 234, 251. Vgl. auch *F. Grashof*, Maschinenlehre 2, p. 83, wo diese Verzahnung als allgemeine Evolventenverzahnung bezeichnet wird.

404) Krafträder treten auf, falls $r_a \pm r_b$ dem kürzesten Abstand von a und b gleich ist.

405) Ausser der Relation der vorigen Fussnote muss $\sphericalangle(ab) = \frac{1}{2}\pi$ sein. Diese Räder fand *Olivier* schon 1815.

paare Φ_a, Φ_b solche Regelflächen, deren gegenseitige Bewegung in Drehungen um die Erzeugenden in Verbindung mit Gleitungen *beliebiger* Richtung besteht[406]). Den einfachsten Typus stellen die bereits erwähnten Schraubenflächen dar. Zu allgemeinen Zahnprofilen, die den ebenen Zahnrädern analog sind, gelangte, wenn auch nur in *angenäherter* Form, zuerst *J. B. Bélanger*[407]), indem er von den als Axenflächen möglichen Rotationshyperboloiden H_2, H_2' ausging, und diese längs einer grossen Zahl von Erzeugenden mit sehr dünnen Streifen versah. *Genaue* Zahnräder dieser Art hat geometrisch zuerst *D. Tessari*[408]) angegeben, indem er auf eine der beiden hyperboloidischen Axenflächen ein paraboloidisch gestaltetes Zahnprofil aufsetzt und die andere Zahnfläche konstruktiv bestimmt. Eine allgemeine rechnerische Behandlung des Problems lieferte *H. Resal*[409]).

Zur Übertragung von Drehungen konstanter Geschwindigkeit dienen ausser den Zahnrädern auch die *Reibungsräder*, bei denen die Übertragung nicht durch Druck, sondern *nur* durch *Reibung* erfolgt; allerdings können so nur geringe Kraftwirkungen erzielt werden. Sind die Axen parallel, so müssen die Rollkreise resp. die Axencylinder selbst als Reibungsräder verwandt werden, ebenso die Axenkegel, wenn die Axen sich schneiden. Bei windschiefen Axen stellen zwei um sie gelegte Rotationshyperboloide den einfachsten Typus von Reibungsrädern dar. Während aber die Axencylinder und Axenkegel zugleich auch die Axenflächen der entstehenden Bewegung sind, trifft dies für die Hyperboloide nicht mehr zu; die Axenflächen der entstehenden Bewegung sind von ihnen verschieden. Diesen wichtigen Punkt hat *F. Schilling*[410]) klargestellt; das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ändert nämlich seinen Wert, je nachdem H_2 oder H_2' als das treibende Rad gewählt wird, und je näher oder weiter von den Kehlkreisen die zu den Zähnen benutzten Segmente liegen. Er zeigt auch, welche Segmente hierzu verwendbar sind; es kann solche Segmente sogar auch in dem Fall geben, dass sich H_2 und H_2' in zwei reellen Geraden durchdringen.

28. Allgemeine Theorie der kinematischen Ketten. In engem Zusammenhange mit den vorstehenden Entwickelungen steht ein Zweig

406) Vgl. auch *T. Rittershaus*, Civiling. (2) 24 (1878), p. 171.

407) Paris C. R. 52 (1861), p. 126.

408) Torino Annali del R. Museo industr. 2 (1871), p. 567, 698; auszugsweise auch in Torino Atti 6 (1870), p. 413.

409) Paris C. R. 117 (1893), p. 391.

410) Zeitschr. f. Math. 42 (1897), p. 37. Es wird die Annahme gemacht, dass die Räder unendlich dünn sind.

der Maschinenwissenschaft, welcher von *F. Reuleaux*[411]) begründet worden ist und von ihm den Namen „Kinematik, *Maschinengetriebe-* oder *Zwanglauflehre*" erhalten hat[412]). Aufgabe dieses Zweiges ist die Systematik, Analyse und Synthese der zur Erzielung bestimmter Bewegungen in Maschinen sich eignenden Körperverbindungen. In strengerer Weise entwickelt und weiter ausgebaut wurden die Grundlagen dieses Gebietes von *F. Grashof*[413]) und von *L. Burmester*[414]) umfassend mit der geometrischen Bewegungslehre in Verbindung gebracht[415]).

Rein phoronomisch betrachtet ist jeder Mechanismus und jede Maschine eine bewegliche Verbindung von Körpern, welche zufolge ihrer Berührungen in ihrer gegenseitigen Beweglichkeit beschränkt sind. Die Teile zweier Körper, in denen sie sich berühren, heissen *Elemente*; sie bilden zusammen ein *Elementenpaar*[416]). Unter einer *kinematischen Kette* versteht man eine durch Elementenpaare vermittelte solche Verbindung von Körpern, durch welche die letzteren — die sogenannten *Glieder* der Kette — in ihrer gegenseitigen Beweglichkeit beschränkt werden. Die Glieder heissen *singulär*, *binär*, *ternär* u. s. f., wenn die Anzahl der in ihnen enthaltenen Elemente 1, 2, 3, u. s. f. ist. Bezeichnet n die Anzahl aller Glieder einer Kette, n_1 die Zahl der singulären, n_2 die der binären, n_3 die der ternären u. s. f. Glieder dieser Kette, endlich e die Anzahl aller Elemente, so ist

$$(1) \qquad n = \sum^i (n_i); \qquad\qquad (2) \qquad e = \sum^i (i n_i).$$

Die Kette heisst *geschlossen*, wenn jedes Glied mit wenigstens zwei

411) Kinematik, Bd. 1. Vgl. hierzu *D. Padeletti*, Giorn. di mat. 14 (1876), p. 195 und 15 (1877), p. 54, 101, 178 u. 248, sowie die kritischen Bemerkungen und abweichenden systematischen Gesichtspunkte von *G. Königs*, Paris C. R. 133 (1901), p. 330, 385, 432, 533 u. 621. Wegen kinematischer Modelle vgl. den bezüglichen Abschnitt bei *W. Dyck*, Katalog, p. 315—350.

412) Die Bezeichnung „Kinematik" rührt von *Ampère* (vgl. Fussn. 1) her, jedoch in einem weiteren Sinne; vgl. hierzu *T. Rittershaus*, Zur heutigen Schule der Kinematik, Civiling. (2) 21 (1875), p. 423 ff., sowie *D. Padeletti*, Giorn. di mat. 14 (1876), p. 195.

413) Maschinenlehre, Bd. 2.

414) Kinematik.

415) Bezüglich der geschichtlichen Entwickelung der Kinematik vgl. die entsprechenden Abschnitte der angeführten Werke von *Reuleaux*, *Burmester* und *Weiss*, sowie *Rittershaus*, Artikel „Kinematik" der Allgemeinen Encyklopädie von *Ersch* und *Gruber* (2) 36 (1884), und Civiling. (2) 21 (1875), p. 423 ff.; weiter auch *M. Grübler*, Wandlungen der Kinematik in der Gegenwart, Civiling. (2) 35 (1889), p. 219 ff.

416) *J. Schadwill*, Verh. d. Ver. z. Beförder. d. Gewerbfl. 55 (1876), p. 348.

anderen Gliedern verbunden ist, also keine singulären Glieder in ihr auftreten, *offen*, wenn das Gegenteil der Fall ist. Die Kette wird *eben* genannt, wenn die Bahnen der Relativbewegungen aller Gliederpunkte in parallelen Ebenen liegen, im anderen Falle *räumlich*. Die Kette heisst *zwangläufig*, wenn die Bahnen der Punkte jedes Gliedes gegen jedes andere Glied ganz bestimmte Kurven sind. Ein *Mechanismus* ist eine zwangläufige geschlossene kinematische Kette, von welcher ein bestimmtes Glied in Ruhe gehalten oder ruhend gedacht wird. Aus einer n-gliedrigen Kette gehen demnach im allgemeinen n verschiedene Mechanismen hervor. *Getriebe* nennt man einen Mechanismus, in welchem ein bestimmtes Glied die Bewegung der übrigen Glieder gegen das ruhende hervorruft. Eine *Maschine* ist ein Getriebe zum Zwecke bestimmter Arbeitsverrichtung. Mechanismen, Getriebe und Maschinen sind sonach Spezialfälle geschlossener zwangläufiger kinematischer Ketten, wie *Reuleaux* zuerst nachgewiesen hat[417]).

Die Bedingungen, unter welchen geschlossene kinematische Ketten *zwangläufig* sind, hängen ab von der Art der Elementenpaare, welche die Verbindungen zwischen den Kettengliedern vermitteln. Nach *Reuleaux* unterscheidet man *niedere* und *höhere* Elementenpaare. Niedere Paare sind umkehrbar ohne Änderung der Relativbewegungen ihrer Elemente, d. h. zusammenfallende Punkte beider Elemente durchlaufen dieselbe Bahnkurve bei deren Relativbewegungen; höhere Paare haben diese Eigenschaft nicht. Niedere Paare können sich in Flächen berühren und heissen daher auch *Umschlusspaare*; höhere Paare berühren sich nur in Kurven oder Punkten. Die wichtigsten niederen Paare sind das *Schraubenpaar*, und dessen Spezialfälle, das *Drehkörper-* (*Dreh-*) und das *Prismen-*(*Richt-*)Paar; diese bedingen Schraubungen, bezw. Drehungen, bezw. Schiebungen als Relativbewegungen ihrer Elemente.

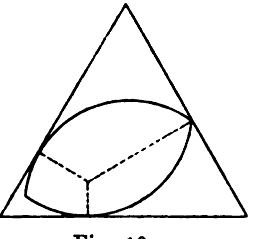
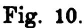
Entsprechend der Einteilung der Elementenpaare unterscheidet man *niedere Elementenpaar-* oder *Umschlusspaarketten* und *höhere Elementenpaarketten*; erstere enthalten nur niedere, letztere auch höhere Paare.

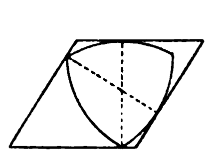
Die Bedingungen zu ermitteln, unter denen ein Elementenpaar innerhalb seines relativen Bewegungsgebietes geschlossen bleibt, ist die Aufgabe der Theorie der *Stützung*[418]). Ist die Relativbewegung der Elemente eine ebene, bewegt sich also eine Scheibe s gegen eine

417) Bezüglich der dynamischen Probleme der Maschinentheorie vgl. IV 8 (*Heun*).

418) Der Begriff der zureichenden Stützung wurde von *Reuleaux* (Kinematik, § 17) eingeführt. Vgl. hierzu die kritischen Bemerkungen und Ergänzungen von *T. Rittershaus*, Civiling. (2) 21 (1875), p. 423; *Th. Beck*, Civiling. (2) 22 (1876), p. 571 und *Grashof*, Maschinenlehre 2, § 7 ff.

andere s', so hängt die zureichende Stützung von s gegen Drehung oder Schiebung ab sowohl von der Zahl der Stützpunkte, in denen die die Scheiben begrenzenden Kurven sich berühren, als auch von der gegenseitigen Lage der Normalen in den Stützpunkten (*Stütznormalen*). Der Schluss eines zwangläufigen ebenen Elementenpaares erfordert mindestens drei Stützpunkte, deren Normalen sich in einem Punkte (dem Drehungscentrum) schneiden, und aufeinander folgend



Fig. 10.


Fig. 11.

Winkel einschliessen, von denen zwei grösser als 90° sein müssen. Als Beispiel diene das Bogenzweieck im Dreieck (s. Fig. 10). Ist die letztere Forderung nicht erfüllbar, so muss die Zahl der Stützpunkte mindestens vier betragen, wie z. B. in dem höheren Elementenpaar: Bogendreieck im Rhombus (s. Fig. 11).

Bei räumlicher Bewegung haben *Reuleaux*, *Beck* und *Grashof* (vgl. Fussn. 418) die Bedingungen zureichender Stützung nur in den einfachsten Fällen (Cylinder und Prisma) erörtert; wesentlich allgemeiner sind die bezüglichen Untersuchungen von *P. Somoff*[419]), welche mit der allgemeinen Theorie der linearen Schraubensysteme (IV 2, **15—18**, *Timerding*) in engstem Zusammenhange stehen. Von seinen Resultaten kommt hier wesentlich nur das eine in Betracht dass sich mit Hülfe von sechs Stützungen eine nach Axe und Parameter bestimmte Schraubung (zwangläufige Bewegung) erzielen lässt; dazu müssen die Stütznormalen einem und demselben Komplexe ersten Grades angehören und ihre Richtungen müssen so gewählt werden, dass wenigstens vier von ihnen eine Opposition bilden.

29. Ebene kinematische Ketten. Für die ebenen *Drehkörperpaar-* oder *Gelenkketten* ist die im allgemeinen, d. h. bei willkürlichen Dimensionen der Kettenglieder, notwendige und hinreichende Bedingung der *Zwangläufigkeit* die Erfüllung der Relation[420])

---

419) Zeitschr. f. Math. Phys. 42 (1897), p. 133, 161; Warschau, Univ. Nachr. 1898, Nr. 8 u. 9, und Zeitschr. f. Math. Phys. 45 (1900), p. 245.

420) *M. Grübler*, Civiling. (2) 29 (1883), p. 167.

(3) $$\sum_{2}^{\frac{n}{2}} i(2i-3)n_i = 2g-4;$$

hierin ist g die Anzahl aller Gelenke, bezw. Axen, um welche die Glieder sich gegenseitig drehen, während n und n_i die in Nr. 28 angeführte Bedeutung besitzen. Drehen sich k Glieder um dieselbe Gelenkaxe ($k > 2$) und zählt man ein solches k-faches Gelenk wie $k-1$ eigentliche Drehkörperpaare, so lässt sich (3) durch die einfachere Relation

(3a) $$2g - 3n + 4 = 0$$

ersetzen, in welcher g nunmehr die Anzahl aller Drehkörperpaare ist[421]). Wenn bei einer Gelenkkette

$$2g - 3n + 4 < 0,$$

so ist sie willkürlich beweglich. Wenn dagegen

$$2g - 3n + 4 > 0,$$

so ist die Kette unbeweglich. In letzterem Falle kann sie jedoch zwangläufig beweglich werden, wenn die Funktionaldeterminante der Bedingungsgleichungen der Starrheit der Glieder identisch verschwindet. Derartige Ketten, bei welchen folglich die Dimensionen der Kettenglieder nicht mehr willkürlich sind, sondern ganz speziellen Bedingungsgleichungen genügen müssen, heissen *übergeschlossene* Gelenkketten (Nr. 25). Beseitigt man in einer solchen eine entsprechende Anzahl von Gliedern, so erhält man stets eine geschlossene, der Relation (3a) genügende Kette, welche also auch bei willkürlichen Dimensionen der Kettenglieder zwangläufig sein würde.

Die geschlossenen zwangläufigen Gelenkketten haben folgende allgemeine Eigenschaften: 1) Die Zahl n ist eine gerade. 2) Die Anzahl der Elemente eines Gliedes ist höchstens gleich $\frac{n}{2}$. 3) Die Zahl n_2 ist unabhängig von n_3 und $\geqq 4$.

Die Relationen (1), (2) und (3) führen zu Bildungsweisen zwangläufiger Gelenkketten, ebenso zu topologischen Eigenschaften der-

---

421) In Form einer Regel, aber ohne Beweis findet sich diese Relation bei *J. J. Sylvester,* Lond. Roy. Inst. Proc. 7 (1875), p. 170—198 und Revue scient. (2) 4 (1874), p. 490. In einem speziellen Falle hat diese Beziehung bereits verwendet *P. Tschebyscheff,* Arbeiten der zweiten Zusammenkunft russischer Naturforscher in Moskau 1869; in deutscher Übersetzung: Verh. d. Ver. z. Beförd. d. Gewerbfl. 19 (1870), p. 174. Eine Erweiterung der Relation auf willkürlich bewegliche Ketten gab *K. Birkeland,* Tidskr. for Math. (5) 4 (1886), p. 174.

selben[422]). Die Bildungsgesetze von Mechanismen, welche aus Gelenkketten hervorgehen, behandelt unter besonderem Gesichtspunkte systematisch *J. Taubeles*[423]); auch bildet er die *Umkehrungen* der Gelenkketten, in welchen die Gelenke durch Glieder entsprechend ersetzt werden.

Wechsellage nennt man eine solche Lage der Glieder gegen einander, durch welche sie in eine Kette mit anderer Gliederzahl und anderen Bewegungsverhältnissen überzugehen vermag[424]). Es bleiben dann einige der Glieder der ursprünglichen Kette nach dem Durchgang durch die Wechsellage dauernd in relativer Ruhe. Die neue Kette kann entweder zwangläufig geschlossen oder offen sein. Bezüglich der Tod- und Verzweigungslagen, sowie der Polkonfigurationen, Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne und der Krümmungsverhältnisse der Gelenkketten vgl. Nr. 23.

Enthält eine Kette auch *Prismenpaare*, so ist sie zwangläufig beweglich nur unter folgenden Einschränkungen: 1) in den nur Prismenelemente enthaltenden Gliedern dürfen die Schubrichtungen (Prismenaxen) nicht sämtlich parallel sein; 2) binäre nur Prismenelemente enthaltende Glieder dürfen nicht unmittelbar verbunden sein; 3) die Zahl der Drehkörperpaare, welche in jeder geschlossenen (d. i. in sich zurücklaufenden) Gruppe von Gliedern ausser Prismenpaaren die Verbindungen zwischen den Gliedern der Gruppe vermitteln, muss entweder ≥ 2 oder $= 0$ sein. Nennt man eine geschlossene Gliedergruppe, in welcher kein Drehkörperpaar auftritt, ein *Gleitvielseit*, und bezeichnet die Anzahl aller von einander unabhängigen Gleitvielseite der Kette mit γ, so ist unter obigen drei Einschränkungen die im allgemeinen notwendige und hinreichende Bedingungsgleichung der Zwangläufigkeit für die ebenen Umschlusspaarketten:

$$2g - 3n + 4 = \gamma, \tag{4}$$

in welcher n die Zahl der Glieder und g die Anzahl aller Prismen- und Drehkörperpaare bezeichnet. Die Maximalzahl der Elemente eines Gliedes wird dann gleich $\frac{1}{2}(n + \gamma)$.

Ist $\gamma = 0$ (wie zumeist in Maschinen und Mechanismen), so geht (4) in (3a) über und es gelten für derartige Umschlusspaarketten die gleichen Sätze, welche bei Gelenkketten bestehen[425]).

Bei *Prismenketten* (welche nur Prismenpaare enthalten) ist die

---

422) *M. Grübler*, Civiling. (2) 20 (1883), p. 167.
423) Technische Blätter 19 (1887), p. 20.
424) *Reuleaux*, Kinematik 1, p. 186.
425) *M. Grübler*, Verh. d. Ver. z. Beförd. d. Gewerbefl. 64 (1885), p. 179.

Bedingungsgleichung der Zwangläufigkeit unter den oben angeführten Einschränkungen 1) und 2)

$$g - 2n + 3 = 0, \tag{5}$$

worin g die Anzahl aller Prismenpaare bezeichnet. Die Einschränkung 2) erleidet eine Ausnahme nur bei der dreigliedrigen Prismenkette, der sogenannten *Keilkette.*

Bezeichnet h die Anzahl aller Hüllkurvenpaare, welche in den *höheren* Elementenpaaren einer Kette zur Übertragung der Bewegung zwischen den Gliedern *notwendig* sind, so ist unter den mehrerwähnten drei Einschränkungen die im allgemeinen notwendige und hinreichende Bedingungsgleichung der Zwangläufigkeit für die ebenen höheren Elementenpaarketten

$$h + 2g - 3n + 4 = \gamma, \tag{6}$$

in welcher g, wie vorher, die Anzahl aller Drehkörper- und Prismenpaare und γ die Anzahl der unabhängigen Gleitvielseite bezeichnet. Die Zahl der Elemente eines Gliedes ist $\leqq \frac{1}{2}(n + \gamma + h)$. Treten nur höhere Elemente in einem Gliede auf, so ist deren Anzahl $\geqq 3$.

Aus (6) folgt für $\gamma = 0$ und $g = 0$, dass zur Bestimmung der zwangläufigen Bewegung von n komplanen Ebenen

$$h = 3n - 4$$

Hüllkurvenpaare im allgemeinen notwendig und hinreichend sind[425]).

30. Räumliche kinematische Ketten. Von den räumlichen Ketten sind besonders die Umschlusspaarketten in Anwendung gekommen. Die einfachsten Fälle führt *Reuleaux*[426]) auf, ohne jedoch den Nachweis ihrer Zwangläufigkeit vollständig zu geben.

Die einfachen räumlichen Gelenkketten wurden zuerst von *Rittershaus*[427]) hinsichtlich ihrer Zwangläufigkeit untersucht. Er beantwortet die Frage, ob sich eine dreigliedrige offene Gelenkkette durch ein weiteres Gelenk zu einer zwangläufigen Kette schliessen lässt, dahin, dass dies im allgemeinen nicht einmal für eine momentane Drehung möglich, dass dagegen bei $n = 4$ Gliedern sich jedem Punkte einer gewissen Fläche, und bei $n = 5$ Gliedern jedem Punkte des Raumes sich eine momentane Drehaxe zuordnet, und bei $n = 7$ Gliedern jede Gerade die Axe des zwangläufig schliessenden Gelenkes sein kann. Ausnahmen treten ein, wenn einige der Axen sich schneiden. Die Resultate decken sich zum Teil mit den von *A. F. Möbius*[428])

---

426) Kinematik 1, p. 554 ff.

427) Civiling. (2) 21 (1875), p. 443 und 22 (1876), p. 559.

428) J. f. Math. 18 (1838), p. 189.

gefundenen. Ausser den genannten Fällen behandelt *Grashof*[429]) noch den der räumlichen Prismenkette, von welcher er nachweist, dass sie bei 4 Gliedern mit 4 Prismenpaaren, deren Axen nicht derselben Ebene parallel sind, zwangläufig ist. Auch führt er noch Fälle von Schraubenketten und Ketten mit nicht zwangläufigen Elementenpaaren an, deren Zwangläufigkeit nachgewiesen wird.

In systematischer Weise beantwortet *E. Delassus*[430]) die Frage, wie die Bewegung von Körpern mit verschiedenen Freiheitsgraden durch kinematische Verkettung mittels Schraubenpaaren erzielt werden könne.

Für die Schraubenketten ist die im allgemeinen notwendige und hinreichende Bedingungsgleichung der Zwangläufigkeit

$$5s - 6n + 7 = 0,$$ [431])

in welcher n die Zahl der Glieder und s die der Schraubenpaare ist. Zu dieser Relation gelangt *Hochmann*[432]), indem er von der allgemeineren

$$6(n-1) - K = R$$

ausgeht, in welcher K die Anzahl der Zwangsbedingungen, R der Freiheitsgrad der Kette ist, und darin $R = 1$ und $K = 5s$ setzt; doch ist die Ableitung nicht einwandfrei.

D. Anhang.

31. Kinematik veränderlicher Systeme[433]). Den Fall, dass ein bewegliches ebenes System σ' sich stets *ähnlich* bleibt, hat bereits *Chasles*[434]) betrachtet; er bewies, dass es für je zwei Lagen σ_1' und σ_2' einen *Ähnlichkeitspol* O giebt, sodass durch Drehung um ihn σ_1' mit σ_2' in ähn-

429) Maschinenlehre 2, §§ 45—54 und 63, 64.

430) Ann. éc. norm. (3) 17 (1900), p. 446.

431) Ohne Beweis mitgeteilt von *M. Grübler*, Riga Industrie-Zeitung 15 (1889), p. 162.

432) Die Kinematik der Maschinen, p. 67.

433) Es handelt sich im Text weniger um kinematische Wendung der allgemeinen Theorie veränderlicher Systeme (vgl. Bd. III), sondern vielmehr um Resultate spezifisch kinematischer Bedeutung. Ausgeschlossen bleibt auch die Betrachtung der allgemeinen kollinearveränderlichen Systeme, sowie die Lehre von den nichteuklidischen Bewegungen. Es genüge die Bemerkung, dass wesentlich solche Fälle kollinearveränderlicher ebener „Bewegungen" betrachtet worden sind, bei denen drei Punkte festbleiben und jeder andere Punkt eine Gerade resp. einen Kegelschnitt beschreibt; vgl. *L. Burmester*, Zeitschr. f. Math. 20 (1875), p. 385 u. Math. Ann. 14 (1879), p. 472, sowie *J. Petersen*, Tidskr. for Math. (3) 5 (1875), p. 21.

434) Bull. scienc. math de *Férussac* 14 (1830), p. 322.

liche Lage kommt. Eingehender sind die allgemeinen Gesetze ähnlich veränderlicher Systeme von *Th. Schönemann* und *A. Grouard* untersucht worden. Für ähnlich veränderliche Systeme spielen wieder die *imaginären Kreispunkte* die gleiche ausgezeichnete Rolle, wie für starre Systeme[435]). Ebenso sind die Beziehungen *affiner* Räume denen der starren Systeme analog, nur dass hier den Kreispunkten ein ausgezeichneter Charakter nicht mehr zukommt.

Bei der *stetigen* Bewegung eines *ebenen ähnlich-* oder *affinveränderlichen* Systems σ^s resp. σ^a in seiner Ebene ist in jeder Lage wieder ein *Momentanpol* vorhanden, und zwar so, dass die Momentanbewegung in einer Drehung um O und in einer Dehnung längs jeder durch O laufenden Geraden l besteht. Die Gesamtbewegung ist wiederum durch zwei sich stets berührende *Polkurven* charakterisiert. Ebenso gilt das Prinzip der *Umkehrbarkeit* der Bewegung nebst den in Nr. 3 genannten allgemeinen Folgerungen[436]). Von den besonderen Resultaten, die *Schönemann*[437]) und *Grouard*[438]) für die Bewegung eines Systems σ^s abgeleitet haben, erwähne ich folgende: Die Bahntangente eines Punktes A bildet mit OA einen konstanten Winkel. Es existiert ein *Wendekreis* und auf ihm ein *Wendepol*, durch den alle Wendetangenten gehen, sowie auch ein *Rückkehrkreis*; durch drei Krümmungsradien ist der Wendekreis bestimmt. Genauer sind die Krümmungsverhältnisse und die bezüglichen geometrischen Örter von *L. Geisenheimer*[439]) untersucht worden. Die Verwandtschaft zwischen den Punkten A, A' ist nach *R. Müller*[440]) eine ein-zweideutige dritten Grades.

Von besonderen Bewegungen eines σ^s kennt man wesentlich solche, bei denen der Pol *fest* bleibt, zuerst diejenige, bei der jede Gerade durch einen festen Punkt geht. Nach *J. Petersen*[441]) und *Chr. Wiener*[442])

435) Eine analytische Behandlung aller Transformationen, die die Kreispunkte resp. den Kugelkreis in sich überführen, giebt *Königs*, Cinématique, p. 308 ff.; vgl. auch Bd. III.

436) *L. Burmester*, Zeitschr. f. Math. 19 (1874), p. 162, 465. *J. Somoff*, Zeitschrift f. Math. 30 (1885), p. 199 giebt eine analytische Darstellung der allgemeinen Resultate.

437) Schulprogramm Brandenburg 1862.

438) L'Institut 35 (1865), p. 159; 37 (1869), p. 27, 84, 124, 171.

439) Zeitschr. f. Math. 24 (1879), p. 129.

440) Zeitschr. f. Math. 36 (1891), p. 129. Die $\mathfrak{B}$ ist ein spezieller Fall derjenigen, die man erhält, wenn man eine F_3 in gewöhnlicher Weise und dann stereographisch auf eine Ebene abbildet; Diss. Leipzig 1883.

441) Nouv. ann. (2) 5 (1866), p. 480.

442) Ann. di mat. (2) 1 (1868), p. 139.

tritt sie ein, wenn drei Geraden durch je einen festen Punkt gehen; jeder Punkt beschreibt einen durch O gehenden Kreis[443]). Allgemein besteht für Bewegung mit festem Punkt O der Satz, dass wenn *zwei* Punkte auf ähnlichen Kurven ähnliche Punktreihen durchlaufen, dies *alle* Punkte thun[444]). Ein analoger Satz besteht für ein affinveränderliches ebenes System σ^a, das drei feste Doppelpunkte besitzt[445]). Von solchen Bewegungen sind folgende betrachtet worden: Die Bewegung eines σ^s, bei der alle Punkte ähnliche *Geraden* durchlaufen[446]); ferner die Bewegung von σ^s, bei der alle Punkte ähnliche *Kreise* beschreiben und jede Gerade einen C_2 umhüllt, endlich solche Bewegungen eines σ^a, bei der alle Geraden *Parabeln* umhüllen oder alle Punkte affine *Ellipsen* beschreiben u. s. w.[436]). Eine Realisierung verschiedener Klassen von ähnlich- und affinveränderlichen Bewegungen lässt sich durch Kombination von Pantographen und Plagiographen ausführen, wie zuerst *J. Kleiber*[349]) und kürzlich auch *P. Somoff*[447]) gezeigt haben. Besondere Bewegungen hat *Mannheim* zu dem Zweck untersucht, um für *einzelne* Punkte die Tangente und den Krümmungskreis zu bestimmen, resp. für geometrische Kurven Konstruktionen abzuleiten[448]).

Auch die *Flächeninhaltsätze* lassen sich auf ähnlich resp. affin veränderliche Systeme ausdehnen[449]), sowohl die Sätze von *C. Leudesdorf* und *A. B. Kempe*, wie auch die Theoreme von *G. Darboux* über die Bogenlängen und die Flächen der Geradenenveloppen, endlich auch die analogen Sätze der räumlichen Bewegung. Bei affinveränderlichen Systemen treten statt der Kreise naturgemäss Kegelschnitte auf.

Chasles hat in der oben genannten Arbeit vom Jahre 1830 auch bereits die Hauptsätze über ähnlich veränderliche räumliche Systeme

---

443) Vgl. auch *H. Durrande*, Nouv. ann. (2) 6 (1867), p. 60; *F. G. Affolter*, Arch. d. Math. Phys. 55 (1873), p. 175.

444) Vgl. auch *F. Nicoli*, Modena Mem. (2) 1 (1883), p. 59. Sind die Bahnkurven c_n, so sind die Enveloppen der Geraden im allgemeinen Kurven c_{2n}.

445) Falls alle Punkte affine Kurven beschreiben, fällt die Polkurve mit dem Wendekreis zusammen; *Th. Schönemann*, Fussn. 420.

446) Sie ist die Umkehrung der *Wiener-Petersen'schen Bewegung*.

447) Zeitschr. f. Math. 46 (1901), p. 169.

448) Géométrie cinématique, p. 15, 47, 477. Spezielle Fälle der Bewegung eines Σ^s behandelt auch *G. Fouret*, Paris C. R. 88, (1879), p. 227; *Königs*, Cinématique, p. 329; *Burmester*, Kinematik, p. 86 u. a.

449) *A. Schumann*, Zeitschr. f. Math. 26 (1881), p. 157; *E. E. Elliot*, Lond. Math. Soc. Proc. 14 (1882), p. 62; *J. Neuberg*, Liège, Mém. (2) 16 (1889), p. 12; *F. Morley*, Quart. J. of math. 24 (1890), p. 359; *J. Kleiber*, Arch. d. Math. Phys. (2) 14 (1896), p. 405.

Σ' abgeleitet. Für zwei Lagen Σ_1' und Σ_2' giebt es im allgemeinen eine im Endlichen gelegene *Gerade* a, sodass durch Drehung um sie Σ_1' und Σ_2' in ähnliche Lage übergehen, und zwar in Bezug auf einen auf a gelegenen *Ähnlichkeitspol* O.[450])

Das analoge gilt für affine Systeme[451]) Σ_1^a und Σ_2^a. Die Bewegung besteht in einer Drehung um den Affinitätspol O, resp. um a, und einer Dilatation, die für jede von O ausgehende Richtung wechselt, und deren Grösse für alle diese Richtungen durch ein *Ellipsoid* bestimmt ist (vgl. IV 14, **12**, *Abraham*). Übrigens können auch *alle* Punkte von a Doppelpunkte für Σ_1^a und Σ_2^a sein.

Von *speziellen* hierhergehörigen räumlichen Bewegungen ist die wichtigste die eines affinveränderlichen H_2, das man so verbiegen kann, dass die Kanten jedes aus vier Erzeugenden gebildeten Vierecks konstante Länge haben. Auf diese aus dem täglichen Leben längst bekannte Bewegungsform hat theoretisch zuerst *G. Durrande*[452]), später *M. Henrici*[453]) hingewiesen. *Durrande* zeigte, dass die Bewegung die eines affinveränderlichen H_2[199]) ist, und dass die Bahntangenten aller Punkte senkrecht zur Fläche sind. Hieraus folgt, dass das H_2 beständig in eine konfokale Fläche übergeht und bei der Deformation die Gesamtheit dieser konfokalen H_2 durchläuft, sodass jede Bahnkurve eine Polhodie (Nr. **16**) ist[454]). Hält man bei der Deformation des H_2 eine Erzeugende g fest, so beschreibt jeder andere Punkt des H_2 eine Kugel, deren Centrum auf g liegt; man erhält damit die oben (Nr. **21**) angegebene Darboux'sche Bewegung. Eine einfache Art, die Bewegung des H_2 zu erzeugen, hat *A. Mannheim*[455]) angegeben. Er geht von vier Geraden aus, die in den Scheiteltangentialebenen des H_2 liegen und deformiert das bezügliche Gelenkviereck so, dass diese Beziehung stets erfüllt bleibt.

J. Larmor[456]) hat gezeigt, dass man ein Gebilde von 27 Geraden in ähnlicher Weise gelenkig deformieren kann wie das H_2. Es ist durch drei solcher H_2 gebildet; seinen einfachsten Fall stellen die Kanten und Mittellinien eines Parallelepipedons dar.

450) Einen besondern Fall solcher Bewegung erörtert *F. Nicoli*, Modena Mem. (2) 1 (1883), p. 171, 249; vgl. auch *K. Moshammer*, Wien. Ber. 74 (1876), p. 131.

451) Vgl. *A. Grouard*, Bull. Soc. philom. 9 (1872), p. 34, 39.

452) Ann. éc. norm. (2) 2 (1873), p. 116.

453) *O. Henrici* hat ein bezügliches Modell Jan. 1875 der Lond. math. Soc. vorgelegt. Vgl. auch *W. Dyck*, Katalog, p. 261.

454) So zuerst bei *G. Darboux*, Paris C. R. 101 (1885), p. 202.

455) Paris C. R. 102 (1886), p. 253.

456) Cambr. Phil. Soc. Proc. 5 (1884), p. 161.

A. Grouard[451]) erkannte bereits die Existenz der Beschleunigungspole $G^{(n)}$ bei einem σ^a und zeigte, dass auf Kreisen um sie das bezügliche $\varphi^{(n)}$ konstant und dem Radius proportional ist, und für alle Punkte einer durch $G^{(n)}$ laufenden Geraden mit ihr einen konstanten Winkel bildet. Die Erklärung dieser Übertragbarkeit der Sätze von Nr. **10** liegt darin, dass auch für ein beliebiges Σ^s oder Σ^a die Endpunkte der v und φ ein zu ihnen *affines* System Σ_v resp. Σ_φ (Nr. **19**) bilden, wie bei starren Systemen Σ.[457]) Analytisch liegt sie darin, dass die Formeln für die Bewegung eines Σ^s oder Σ^a dieselbe *lineare* Form haben, wie diejenigen von Nr. **19**, ebenso daher auch die Formeln für die Differentialquotienten[458]).

Man kann daher auch die Sätze der allgemeinen *Chasles*'schen Theorie auf affinveränderliche Systeme übertragen und die bezüglichen zugehörigen Komplexe studieren. Auch diese Aufgabe hat bereits *R. Durrande* analytisch behandelt[459]). Die hier auftretenden Verwandtschaften sind teilweise allgemeinerer Natur, als im Fall starrer Systeme, doch giebt es auch hier in jeder Ebene einen Punkt, dessen Geschwindigkeit resp. Bahntangente zu ihr senkrecht ist u. s. w.; es bilden jedoch die Punkte mit den Normalebenen kein Nullsystem. Eine ausführliche geometrische Darstellung auf Grund der Sätze über Σ, Σ_v, Σ_φ (Nr. **19**) und mit Anwendung auf die einfachsten Fälle wurde kürzlich von *L. Burmester*[460]) gegeben.

Auch die Theorie der relativen Bewegung ist auf veränderliche Systeme übertragbar. Im besondern gilt die *Somoff*'sche Gleichung von Nr. **26**, wie aus dem Beweise von *M. Levy*[375]) hervorgeht, für beliebige kollinearveränderliche Systeme.

---

457) *Burmester*, Zeitschr. f. Math. 23 (1878), p. 110; *K. Moshammer*, Wien. Ber. 74 (1876), p. 140.

458) Für die analytische Darstellung vgl. *A. Picart*, Nouv. ann. (2) 6 (1867), p. 158; *V. Ligin*, ib. (2) 12 (1875), p. 481; *G. Formenti*, Giorn. di mat. 17 (1879), p. 232; besonders aber *H. Durrande*, Paris C. R. 73 (1871), p. 736; 74 (1872), p. 1243; 75 (1872), p. 1177; 78 (1874), p. 1036, sowie Ann. éc. norm. (2) 2 (1874), p. 89.

459) Vgl. auch *F. Castellano*, Torino Atti 29 (1893), p. 300.

460) Zeitschr. f. Math. 47 (1902), p. 128.

(Abgeschlossen im Juni 1902.)

IV 4. GEOMETRIE DER MASSEN*).

VON

G. JUNG

IN MAILAND.

Inhaltsübersicht.

*) Bei der deutschen Übersetzung des vorliegenden Artikels und seiner formalen Anpassung an die Artikel IV 2 und IV 5 ist die Redaktion, ausser durch den Verfasser selbst, vielfach durch Hrn. *H. E. Timerding* unterstützt worden, wofür sie demselben auch hier ihren besten Dank ausspricht. *F. Klein.*

Litteratur.

Lehrbücher.

M. Bresse, Cours de *mécanique**) appliquée, t. 1, 2. éd. Paris 1866.
L. N. M. Carnot, De la *correlation des figures* de géométrie, Paris 1801.
— *Géométrie de position,* Paris 1803.
M. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Bruxelles 1837; réimprimé Paris *1875.*
D. Chelini, Elementi di *meccanica* razionale con appendice sui principî fondamentali della Matematica, Bologna 1860.
L. Cremona, Elementi di *calcolo grafico,* Torino 1874.
C. Culmann, Die *graphische Statik,* Zürich 1866; 2. Aufl. 1875.
L. Euler, Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, Rostochii et Gryphiswaldiae 1765.
H. Grassmann, Die lineale *Ausdehnungslehre,* Leipzig 1844.
— *Geometrische Analyse,* Leipzig 1847.
— Gesammelte mathematische und physikalische *Werke,* Bd. 1, Leipzig 1894.
O. Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes (2. Aufl. 1869), 3. Aufl. Leipzig 1876.
J. L. Lagrange, Mécanique analytique, Paris 1788 (*Méc. an.*).
A. F. Möbius, Der *barycentrische Calcul,* Leipzig 1827.
— Lehrbuch der *Statik,* 2 Bde., Leipzig 1837.
— Elemente der *Mechanik des Himmels,* Leipzig 1843.

---

*) In der durch kursiven Druck hervorgehobenen Abkürzung wird das betreffende Werk im folgenden zitiert.

A. F. Möbius, Gesammelte *Werke,* 4 Bde., Leipzig 1885—87.

F. N. M. Moigno, Leçons de mécanique analytique, *statique* (d'après les méthodes de *L. A. Cauchy*), Paris 1868.

L. Poinsot, Elements de *statique,* 10. éd., Paris 1861.

S. D. Poisson, Traité de mécanique, Paris 1811.

Th. Reye, Die *Geometrie der Lage* (1. Aufl. Bd. 2, Hannover 1868); 2. Aufl. Bd. 2, Leipzig 1880; 3. Aufl. Bd. 2, Leipzig 1892.

Ed. J. Routh, A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, 2 vols., 6. ed., London 1897; deutsch von *A. Schepp,* Die *Dynamik* der Systeme starrer Körper, 2 Bde., Leipzig 1898.

W. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Bd. 1 (1. Aufl. 1870); 2. Aufl., Leipzig *1879.*

J. A. Segner, Programma sistens specimen theoriae turbinum, Halae 1755.

J. Somoff, Theoretische *Mechanik,* 2 Bde., Leipzig 1879, übersetzt von *A. Ziwet.*

Monographieen.

A. M. Ampère, Sur quelques nouvelles propriétés des axes permanens de rotation des corps et des plans directeurs de ces axes (1821), Paris, Mém. de l'Acad. 5 (1826), p. 86.

G. Bellavitis, Sposizione del metodo delle equipollenze 1835, Modena, Mem. 25 (1854).

E. Beltrami, Sul potenziale magnetico, Ann. di mat. (2) 10 (1882).

J. Binet, Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des moments d'inertie des corps (1811), J. éc. polyt. 16 (1813), p. 41.

D. Chelini, Dell' uso delle coordinate obliquangole nella determinazione dei momenti d'inerzia, Bologna, Mem. (2) 5 (1865), p. 144.

— Sulla composizione geometrica dei sistemi di rette, aree e punti, Bologna, Mem. 2 (10) (1870).

A. Cauchy, Sur les moments d'inertie, Exercices de math. 1827 = Oeuvres complètes (2) 7, Paris 1889, p. 124.

A. Cayley, Note on a general theorem contained in the preceding (i. e. *W. Thomson,* On the principal axis of a solid body) paper, Cambr. and Dubl. Math. J. 1 (1846), p. 207.

— Report on the progress of the solution of certain special problems of dynamics, Brit. Assoc. Report 1862, London 1863.

G. Jung, Intorno ai momenti d'inerzia di una sezione piana e ai diversi modi di rappresentarli, Ist. Lomb. Rend. (2) 8 (1875).

— Sui momenti obliqui di un sistema di punti e sull' „imaginäres Bild" di *Hesse, Collectanea mathematica* in memoriam *Dominici Chelini,* Milano 1881.

J. N. Haton de la Goupillière, Mémoire sur une théorie nouvelle de la géométrie des masses, Thèse Paris 1857 = J. éc. polyt. 37 (1857).

J. MacCullagh, On the rotation of a solid body round a fixed point; compiled by *S. Haughton,* Dubl. Irish Trans. 22 (1849), p. 139 = The collected works of *J. MacCullagh,* Dublin 1880, p. 329

R. Mehmke, Über die Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hülfe *Grassmann*scher Methoden, Math. Ann. 23 (1894).

O. Mohr, Über die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen, Civiling. (2) 33 (1887).

L. Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps, Paris 1834; J. de math. 16

(1851) (das Kap. III, welches die Theorie der Trägheitsmomente enthält, wurde, obwohl vor 1834 geschrieben, zum ersten Male 1851 veröffentlicht).
Th. Reye, Beitrag zu der Lehre von den Trägheitsmomenten, Zeitschr. f. Math. Phys. 10 (1865).
— Trägheits- und höhere Momente eines Massensystems in Bezug auf Ebenen, J. f. Math. 72 (1870).
W. Ritter, Die Trägheitsellipse geometrisch abgeleitet, Schweiz. Bauzeitung 11 (1888).
W. Thomson (Lord *Kelvin*), On the principal axis of a solid body, Cambr. and Dubl. Math. J. 1 (1846).
R. Townsend, On principal axis of a body, their moments of inertia, and distribution in space, Cambr. and Dubl. Math. J. 1 (1846) und 2 (1847).

---

1. Der Begriff des Massensystems. Die *Geometrie der Massen*[1]) geht von dem Gedanken aus, die Punkte des Raumes nicht schlechthin zu betrachten, sondern ihnen noch eine nach Belieben, positiv oder negativ, wählbare Zahl als ihre *Masse* beizuschreiben, sodass die Punkte als mit bestimmten Koeffizienten behaftet erscheinen[2]). Hierbei wird von der physikalischen Bedeutung dieses Wortes zunächst abgesehen, die Massen bedeuten in der geometrischen Theorie vielmehr blosse Zahlen, denen erst in den Anwendungen eine besondere Interpretation gegeben wird. So können sie im physikalischen Sinne Massen oder Gewichte bedeuten, das Wort Gewicht kann aber auch, wie in der Fehlertheorie, in übertragenem Sinne verstanden werden.

1) Der Name „Geometrie der Massen" wurde zum ersten Male von *Hâton de la Goupillière* in seiner Thèse (Mémoire sur une théorie nouvelle de la Géométrie des masses, J. éc. polyt. 37 (1857), siehe auch Revue gén. des sciences (1893), p. 337 ff.) eingeführt, später von einigen anderen Autoren acceptiert; z. B. gebraucht ihn *J. Somoff,* Mechanik (1879) für die einleitenden Kapitel zur Statik und Dynamik (p. 1—107); *W. Schell,* Theorie der Bewegung 1 (1879), Kap. VI—IX. — Abgesehen vom Namen kann man die erste Idee einer von der Mechanik losgelösten Geometrie der Massen, ebenso wie die Idee einer von der Mechanik abgetrennten Kinematik oder Geometrie der Bewegung, bei *L. M. N. Carnot* (Géométrie de position 1803 (§ 297 und p. 482; § 298), und Corrélation des figures 1801, § 218) finden; denselben Gedanken verfolgte später *M. Chasles* (Aperçu historique 1837, 2. éd., p. 105, 220—221, 397 u. s. w.). Die Kinematik wurde durch *A. M. Ampère* und viele andere zur selbständigen Disziplin erhoben (vgl. IV 3 (*Schoenflies*), Fussn. 1), die Geometrie der Massen ist dies heute noch nicht, obwohl bereits hinreichendes Material dafür zusammengetragen ist.

2) Den Ausdruck „mit einem Koeffizienten behafteter Punkt" gebraucht *A. F. Möbius,* Barycentrischer Calcul 1827 = Werke 1, p. 28; *H. Grassmann,* Geometrische Analyse 1847 = Werke 1, p. 375 nennt die Massenpunkte „Punktgrössen"; vgl. auch *W. Schell,* Theorie der Bewegung 1, p. 73 und *L. Cremona,* Calcolo grafico 1874, p. 59.

Die Massen können ferner elektrische oder magnetische Mengen oder auch Lichtstärken und Wärmemengen u. s. w. bedeuten. In der Bevölkerungstheorie erscheinen sie als Anzahlen von Personen, die durch eine gewisse örtliche und zeitliche Umgrenzung zusammengehören u. s. w. Geometrisch lassen sich die Massen durch geradlinige Strecken von bestimmter Länge und Sinn und beliebiger, aber gemeinsamer Richtung darstellen, die man von den einzelnen Massenpunkten ausgehen lässt[3]).

Die Hauptbedeutung der Geometrie der Massen liegt indessen in der Mechanik. So gehören in sie alle Probleme, welche die Theorie der statischen Momente und des Schwerpunktes, ferner die Theorie der Trägheits- und Deviationsmomente betreffen, und die nicht nur in der Dynamik, sondern auch in der Festigkeitslehre und anderswo Verwendung finden.

Wir bezeichnen einen Massenpunkt durch ein Symbol A, welches seinen Ort festlegt, und die Masse α, welche dem Punkte A als Faktor beigefügt wird. Ist $\alpha = 1$, so ist einfach A zu schreiben, und der Punkt heisst dann nach *H. Grassmann* ein einfacher Punkt[2]).

Der Inbegriff von n solchen Massenpunkten $\alpha_i A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, der durch das Symbol $(\alpha_i A_i)_n$ oder einfacher (αA) gekennzeichnet sein möge, soll ein *Massensystem* heissen, $\mu = \sum \alpha_i$ dessen *Gesamtmasse*[3]). Es ist nicht ausgeschlossen, dass die Massenpunkte in unendlicher Zahl vorhanden sind und ein Kontinuum bilden; in diesem Falle, der in der Folge nur an einer Stelle (Nr. 23) ausführlicher betrachtet werden soll, verwandeln sich die weiterhin zu betrachtenden Summen in leicht verständlicher Weise in *Integrale*.

I. Lineare Momente. Der Schwerpunkt.

2. Polare lineare Momente. Die verschiedenen Arten von Massensystemen. Durch ein gegebenes Massensystem wird jedem

3) Solche Segmente von gleicher, aber willkürlicher, nicht orientierter Richtung u repräsentieren *skalare Massen.* Wollte man die Bezeichnung der α_i auch auf orientierte Grössen ausdehnen, so würde man zum Begriff der *vektoriellen Massen* gelangen $(\alpha_i A_i)$, welche durch nicht parallele *Vektoren* α_i, *die von den* A_i *ausgehen,* repräsentiert werden. Bezeichnet man mit Σ_g eine Vektorensumme, so würde die *Gesamtmasse* des Systems in diesem Falle durch den Vektor $\mu = \Sigma_g \alpha_i$, der auch Null sein kann, gegeben sein. — Übrigens hängt die Vorstellung von Vektoren, die an einzelne Punkte des Raumes angeheftet sind, auf das genaueste mit der Theorie der *gebundenen* Kräftesysteme zusammen, die in IV 2, **32** u. ff. (*Timerding*) behandelt ist. Man vergleiche dort insbesondere, was die Idee vektorieller Massensysteme angeht, die Auseinandersetzungen über *astatisches Gleichgewicht* und *astatische Äquivalenz.* Vgl. auch dort die Litteraturnachweise.

Punkte des Raumes in folgender Weise ein bestimmter *Vektor* zugeordnet: Sind x, y, z die Koordinaten des angenommenen Punktes P, x_i, y_i, z_i die Koordinaten eines Massenpunktes A_i des Systems, α_i dessen Masse, so werden die Komponenten des Vektors:

$$(1) \quad \xi = \sum \alpha_i (x_i - x), \quad \eta = \sum \alpha_i (y_i - y), \quad \zeta = \sum \alpha_i (z_i - z).$$

Dieser Vektor heisst das *polare Moment* des Massensystems für den Punkt P als *Pol*[4]). Sind ξ', η', ζ' die Komponenten des polaren Momentes für einen anderen Punkt P' mit den Koordinaten x', y', z', so wird

$$(2) \quad \xi - \xi' = \mu (x' - x), \quad \eta - \eta' = \mu (y' - y), \quad \zeta - \zeta' = \mu (z' - z).$$

Ist $\mu \neq 0$, so findet sich ein einziger Punkt S, für den das polare Moment verschwindet, für dessen Koordinaten x_s, y_s, z_s sonach wird:

$$(3) \quad \sum \alpha_i (x_i - x_s) = 0, \quad \sum \alpha_i (y_i - y_s) = 0, \quad \sum \alpha_i (z_i - z_s) = 0$$

oder:

$$(3a) \quad \sum \alpha_i x_i = \mu \cdot x_s, \quad \sum \alpha_i y_i = \mu \cdot y_s, \quad \sum \alpha_i z_i = \mu \cdot z_s.$$

Dieser Punkt heisst der *Schwerpunkt des Massensystems*[5]). Derselbe bleibt ungeändert, wenn alle Massen in demselben Verhältnisse vergrössert oder verkleinert werden.

Mit Hülfe seiner Koordinaten x_s, y_s, z_s lassen sich die Komponenten des polaren Momentes für einen beliebigen Punkt des Raumes in folgender Weise schreiben:

$$(4) \quad \xi = \mu (x_s - x), \quad \eta = \mu (y_s - y), \quad \zeta = \mu (z_s - z).$$

Das polare Moment des Massensystems ist also für alle Punkte gleich dem Momente der in den Schwerpunkt konzentrierten Gesamtmasse. Man findet demnach das polare Moment des Massensystems für irgend einen Punkt, indem man den Vektor, der von diesem Punkte nach dem Schwerpunkte hingeht, im Verhältnisse $1 : \mu$ vergrössert, und wenn das polare Moment für irgend einen Punkt P be-

---

4) Über die Benennung „polares Moment“ vgl. *W. Schell*, Theorie der Bewegung 1, p. 74; *H. Grassmann*, Werke 1, p. 161, 375 nennt das polare lineare Moment eines Massenpunktes die „Abweichung der Punktgrösse αA“ von dem Punkte (Pole) P; p. 378 nennt er es auch die „Mittelgrösse des vielfachen Punktquadrates αA^2“ (vgl. Fussnote 38), sodass das polare lineare Moment eines Massensystems mit der *Grassmann*'schen „Mittelgrösse“ identisch ist.

5) In dieser Form (3a) ist der Schwerpunkt zuerst von *P. Varignon* eingeführt worden, Paris, Hist. de l'Acad. 1714. Vgl. IV 2, 32 (*Timerding*).

kannt ist[6]), so ergiebt sich umgekehrt eine einfache Konstruktion des Schwerpunktes[7]).

Ist $\mu = 0$, so sind die Gleichungen (3) im allgemeinen unerfüllbar. Die Gleichungen (2) werden dann:

$$\xi = \xi', \quad \eta = \eta', \quad \zeta = \zeta';$$

das polare Moment M ist also für alle Punkte des Raumes dasselbe[8]); der Vektor, den es darstellt, werde mit q bezeichnet. Ist $q \neq 0$, so heisst das Massensystem ein *magnetisches System*[9]) und der Vektor q seine *Axe*[10]); man kann sagen, dass der Schwerpunkt S des Systems *in der Richtung von* q ins Unendliche gerückt ist.

Es kann aber sein, dass die Gleichungen (3) identisch erfüllt sind, d. h. dass neben $\mu = 0$ auch noch der Vektor q verschwindet. Es verschwindet also das polare Moment für jeden Punkt des Raumes, und *jeder* Punkt lässt sich als Schwerpunkt des Massensystemes ansehen[11]). Das Massensystem heisst in diesem Falle ein *indifferentes System*.

Wenn alle Einzelmassen α_i gleiches Zeichen haben, so ergiebt sich auch für die Gesamtmasse notwendigerweise ein endlicher, von Null verschiedener Wert, und es ist immer ein bestimmter eigentlicher

---

6) Man findet dieses Moment durch Konstruktion des Vektors PP' gleich der geometrischen Summe der Strecken $\alpha_i PA_i$.

7) *J. Somoff* (Mechanik 2, p. 20) schreibt diese Konstruktion des Schwerpunktes, die von dem planaren linearen Momente (vgl. Nr. 3) unabhängig ist, *B. de Saint-Venant* zu; sie findet sich aber für den Fall eines Systems einfacher Punkte schon bei *L. M. N. Carnot* (Corrélation des figures 1801, §§ 207, 209, 218), für ein *allgemeines* (siehe unten) Massensystem wurde sie gegeben von *G. Bellavitis* (Metodo delle equipollenze 1835), von *A. F. Möbius* (Mechanik des Himmels 1843 = Werke 4, p. 124), ferner von *H. Grassmann* (Ausdehnungslehre 1844 = Werke 1¹, p. 72, 168) und endlich von *B. de Saint-Venant* (Paris, C. R. 21 (1845), p. 623).

8) *Grassmann*, Werke 1¹, p. 375.

9) Der Name „magnetisches System" ist deswegen gerechtfertigt, weil ein System von magnetischen Massen (*Grassmann*, Ausdehnungslehre 1844, § 104; vgl. auch *E. Beltrami*, Ann. di mat. (2) 10 (1882), p. 252) ein solches Massensystem darstellt; siehe auch Fussn. 40 u. 55.

10) *Grassmann*, Ausdehnungslehre 1844, § 102 (s. unten Fussn. 55). *Grassmann* bemerkt hier, dass der Vektor q einen in seiner Richtung unendlich fern gelegenen Punkt ersetzt und als Mitte oder *Mittelaxe* der Massenpunkte erscheint (p. 189). Einige Autoren nennen das System „schwerpunktslos", aber es ist damit nur gemeint, dass im *Endlichen* kein Schwerpunkt existiert (vgl. *Grassmann*, Werke 1¹, p. 169). Der Schwerpunkt bleibt bestimmt, nur liegt er in unendlicher Entfernung. Vgl. auch *Moebius*, Barycentrischer Calcul, § 9.

11) *Moebius*, Barycentrischer Calcul, § 10 sagt: das System hat keinen Schwerpunkt, es ist damit aber gemeint „keinen *bestimmten* Schwerpunkt".

Schwerpunkt vorhanden. Das Massensystem heisst dann ein *Schwersystem*, weil eine Anzahl schwerer Massenpunkte ein Beispiel eines solchen Systems liefern. Die Theorie der Schwersysteme unterscheidet sich von derjenigen der allgemeinen Systeme erst bei näherer Betrachtung der quadratischen Momente (welche beim Schwersystem notwendig alle positiv sind, wenn man alle $\alpha_i > 0$ voraussetzt).

Als ein *allgemeines Massensystem* werden wir weiterhin ein solches System ansehen, dessen Gesamtmasse $\neq 0$ ist.

3. Planare lineare Momente. Statische Momente hinsichtlich einer Ebene. Als das *statische Moment* eines gegebenen Massensystems für eine Ebene π [12]) (*planares lineares Moment*) bezeichnet man den *skalaren Ausdruck*, den man erhält, indem man die Masse jedes Massenpunktes des Systems mit seinem Abstande von der Ebene π multipliziert und alle diese Produkte addiert. Ist

$$Ux + Vy + Wz = T$$

die Gleichung der Ebene π, so wird das zugehörige statische Moment des Massensystems:

$$(5) \qquad M = \frac{\sum \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}$$

oder wegen (3a):

$$(5a) \qquad M = \frac{\mu (Ux_s + Vy_s + Wz_s - T)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}.$$

Das statische Moment eines *allgemeinen Massensystems* wird also für alle Ebenen des Raumes gleich dem statischen Momente der in dem Schwerpunkte konzentrierten Gesamtmasse, nämlich gleich dem Produkte aus dieser Gesamtmasse und dem Abstande des Schwerpunktes von der Ebene [13]). Insbesondere verschwindet es für alle Ebenen, die durch den Schwerpunkt gehen [13]), oder anders ausgedrückt: der Schwerpunkt S wird umhüllt von den Ebenen, für die das statische Moment Null ist.

Ist das System *ein magnetisches System*, also $\mu = 0$, $q \neq 0$, so sind die Ebenen, für die das statische Moment des Massensystems verschwindet, alle der Axe desselben parallel (vgl. Nr. 5), und für irgend eine andere Ebene wird das statische Moment gefunden, indem man die Axe q des magnetischen Systems auf die zu der Ebene nor-

---

12) Der Begriff des statischen Momentes geht bis auf *Archimedes* zurück (vgl. *W. Schell*, Theorie der Bewegung 1, p. 81).

13) *Moebius* (Barycentrischer Calcul = Werke 1, p. 28) gründet auf diese Eigenschaft die Definition des Schwerpunktes.

male Richtung projiziert[14]). Das statische Moment wird also ein Maximum, nämlich $= q$, für die Ebenen, welche zu der Axenrichtung des magnetischen Systems normal sind.

Das statische Moment eines *indifferenten Massensystems* verschwindet für alle Ebenen des Raumes.

4. Ebene Projektionen eines Massensystems. Geradlinige Systeme. Als *Projektion* eines Massenpunktes αA auf eine Ebene π kann man den Massenpunkt αA^0 der Ebene π bezeichnen, welcher der Lage nach in die Projektion A^0 des Punktes A fällt und dessen Masse gleich der des projizierten Massenpunktes ist. Dabei kann das Projektionszentrum im besonderen im Unendlichen liegen. Es gelten für die Projektion *eines allgemeinen Massensystems* die Sätze:

1) Der Schwerpunkt S^0 des ebenen Massensystems, dessen Massenpunkte die Projektionen der Massenpunkte eines gegebenen räumlichen Massensystems auf eine Ebene π sind, wird gefunden, indem man den Schwerpunkt S des räumlichen Massensystems auf die Ebene π projiziert. Geht insbesondere die Ebene π durch den Schwerpunkt S des räumlichen Systems, so fällt der Schwerpunkt S^0 mit dem Schwerpunkt S zusammen[15]).

2) Das polare Moment des ebenen Massensystems für irgend einen Punkt P_0 seiner Ebene π ist ein Vektor in dieser Ebene und wird gefunden, indem man den Vektor, der das polare Moment des räumlichen Massensystems für denselben Punkt P_0 darstellt, auf die Ebene π projiziert.

3) Das statische Moment des ebenen Massensystems für eine in seiner Ebene π liegende gerade Linie g^0 wird gefunden, indem man das statische Moment des räumlichen Massensystems für diejenige Ebene bildet, welche durch die Linie g^0 geht und auf der Ebene π senkrecht steht.

Die orthogonale Projektion des *magnetischen Massensystems* auf eine beliebige Ebene bildet im allgemeinen wieder ein magnetisches Massensystem, dessen Axe durch die Projektion des Vektors q auf die Ebene gefunden wird. Wenn aber die Ebene zur Axenrichtung des

---

14) *C. Culmann* (Graphische Statik 1866, p. 25) gebraucht für die Projektion auf die zu einer Ebene normale Richtung den Ausdruck *Antiprojektion.* Vgl. auch *L. Cremona,* Calcolo grafico 1874, p. 26.

15) Zwischen den projizierenden Strahlen besteht die Beziehung $\sum_g \alpha_i A_i A_i^0 = \mu SS^0$, d. h. SS^0 kann als *mittlerer Vektor* der Vektoren $\alpha_i A_i A_i^0$ aufgefasst werden. Ist a_i der Fusspunkt des auf SA_i von einem beliebigen Raumpunkt P gefällten Perpendikels, so ist $\sum \alpha_i SA_i \cdot Sa_i = 0$ (vgl. für den Fall $\alpha_i = 1$ *Carnot*, Corrélation des figures, p. 161).

räumlichen Massensystems normal ist, so wird die Projektion insbesondere ein *indifferentes* Massensystem.

Analoge Sätze lassen sich für nur geradlinige Massensysteme aufstellen.

5. Sätze über den Schwerpunkt. Der Schwerpunkt als Zentrum der mittleren Entfernungen. Die Gleichungen (3) in Nr. 2, welche den Schwerpunkt eines *allgemeinen Massensystems* als den Punkt definieren, für den das polare Moment verschwindet, gestatten folgende geometrische Interpretation: Die Strecken, welche den Schwerpunkt S mit den einzelnen Punkten des Systems verbinden, jede multipliziert mit der Masse α_i, lassen sich ohne Änderung von Richtung, Sinn und Länge zu einem geschlossenen Polygon zusammenfügen. Umgekehrt wenn im Raume ein beliebiges geschlossenes Polygon gegeben ist und man von einem beliebigen Punkte S aus Strecken SA_i zieht, welche den Seiten dieses Polygons gleich und gleichgerichtet sind (wobei man sich das Polygon in einem bestimmten Sinne umlaufen zu denken hat), so ist der Punkt S der Schwerpunkt für die Endpunkte A_i jener Strecken.

Symbolisch kann man die Gleichungen (3a) in Nr. 2 schreiben:

$$\sum \alpha_i A_i = \mu \cdot S \quad \text{oder} \quad S = \frac{\sum \alpha_i A_i}{\mu}. \tag{6}$$

Der Schwerpunkt erscheint danach als *Mittelpunkt*[16]) oder mit der Gesamtmasse des Systems versehen, als die *Summe*[17]) der einzelnen Massenpunkte.

„Zerlegt man ein allgemeines Massensystem auf beliebige Art in eine Anzahl von Teilsystemen und sucht von allen diesen die Schwerpunkte, indem man sich jedesmal in diesen die Gesamtmasse des Teilsystems konzentriert denkt, so ist der Schwerpunkt aller so gewonnenen Massenpunkte zugleich der Schwerpunkt des gegebenen Massensystems. Liegen alle Massenpunkte eines Massensystems auf einer geraden Linie oder in einer Ebene, so liegt auch sein Schwerpunkt auf dieser Linie oder in dieser Ebene.“ Hieraus ergiebt sich:

„Lassen sich in besonderen Fällen die Massenpunkte eines Massensystems so einteilen, dass die Schwerpunkte der Teilsysteme in einer geraden Linie liegen oder einer Ebene angehören, so geht diese ge-

16) *Grassmann,* J. f. Math. 24 (1842), p. 271, und Werke 1^1, p. 72 u. 618; vgl. auch Fussn. 19, 26 u. 27.

17) *Moebius,* Barcentrischer Calcul = Werke 1, p. 44 u. 611; *Grassmann,* Geometrische Analyse, § 15 = Werke 1^1, p. 376; (vgl. Fussn. 21).

rade Linie oder diese Ebene durch den Schwerpunkt des Gesamtsystems oder ist, wie man sagt, für dasselbe eine *Schwerlinie* oder eine *Schwerebene*." In jedem Falle liegen, wenn man ein vorgelegtes Massensystem irgendwie in zwei oder in drei Teilsysteme zerlegt, die Schwerpunkte dieser Teilsysteme immer auf einer Schwerlinie oder in einer Schwerebene[18]).

Hieraus ergiebt sich eine einfache Methode, um in vielen Fällen den Schwerpunkt eines gegebenen Systems zu finden (vgl. Nr. 24).

Wählt man im besonderen alle Massen des allgemeinen Massensystems gleich 1, so werden die Koordinaten des Schwerpunkts S:

$$(7)\quad x_s = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},\ y_s = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n},\ z_s = \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}.$$

Die Entfernung des Punktes S von einer beliebigen Ebene ist also das Mittel der Entfernungen aller Punkte des Systems von derselben Ebene. Es wird daher im vorliegenden Falle der Schwerpunkt als *Zentrum der mittleren Entfernungen*[19]) bezeichnet. Jede Symmetrieebene oder -Axe des Systems A_i geht durch den Schwerpunkt.

Im *magnetischen System* ist der Schwerpunkt in der Richtung der Axe im Unendlichen gelegen (vgl. Nr. 2). Es ist der uneigentliche Punkt S_∞. Dadurch modifizieren sich die Sätze, welche für den Schwerpunkt des allgemeinen Massensystems gelten, in folgender Weise:

Das Umhüllungsgebilde der Ebenen vom statischen Momente Null[20]) wird jetzt der Punkt S_∞ (vgl. Nr. 3) und als *Summe der Punkte* $\alpha_i A_i$ lässt sich vermöge der symbolischen Gleichung

$$\sum \alpha_i A_i = q$$

der Vektor q[21]) ansehen.

Teilt man ein magnetisches Massensystem irgendwie in zwei nicht magnetische Teilsysteme, so fällt die Verbindungslinie der

---

18) Sind μ_1 und μ_2 die Massen der beiden Teilsysteme, S_1, S_2 ihre Schwerpunkte, so ist $\mu_1 + \mu_2 = \mu$ und $\mu_1 SS_1 + \mu_2 SS_2 = 0$ und analog für drei Teilsysteme.

19) *Carnot*, Corrélation des figures 1801 (vgl. Fussn. 7). *J. V. Poncelet* (J. f. Math. 3 (1828)) bezeichnete das Zentrum der mittleren Entfernungen als „Zentrum der harmonischen Mittel in Bezug auf die unendlich ferne Ebene" (vgl. Nr. 11); vgl. auch *Chasles*, Aperçu historique 1837, 2. éd. 1875, p. 616 ff., 713 ff. *Grassmann* (J. f. Math. 24 (1842), p. 271) veränderte die *Poncelet*'sche Bezeichnung in „harmonische Mitte in Bezug auf eine Ebene" und die *Carnot*'sche Bezeichnung in „Mitte zwischen den Punkten".

20) *Moebius*, Barycentrischer Calcul, § 8 u. 9.

21) *Grassmann*, Werke 1[1], p. 308; vgl. Fussn. 17.

Schwerpunkte dieser Teilsysteme in die Axenrichtung des magnetischen Systems. Die Gesamtmassen der beiden Teilsysteme sind dabei einander entgegengesetzt gleich. Multipliziert man ihren absoluten Betrag mit dem Abstande der beiden Schwerpunkte, so erhält man die Länge der Axe q. Speziell fällt in die Richtung dieser Axe jede Linie, welche einen Massenpunkt des Systems mit dem Schwerpunkte der übrigen verbindet, und diese Verbindungsstrecke ist der Strecke $\frac{1}{\alpha_i} q$ gleich und entgegengesetzt gerichtet, wenn α_i die Masse des herausgegriffenen Massenpunktes ist. Setzt sich ein magnetisches Massensystem aus mehreren magnetischen Teilsystemen zusammen, so setzt sich auch seine Axe q aus den Axen q_i dieser Teilsysteme nach derselben Regel zusammen, nach der Vektoren zu einem Vektor vereinigt werden, was durch die einfache Gleichung $\Sigma_g q_i = q$ angedeutet werden möge.

Im indifferenten System ist jeder Punkt Schwerpunkt (vgl. Nr. 2). Es ist die *Summe der n Punkte* $\alpha_i A_i$ gleich Null.

Teilt man daher das indifferente Massensystem irgendwie in zwei nicht indifferente Teilsysteme, so fallen die Schwerpunkte dieser Teilsysteme zusammen. Insbesondere liegt in jedem Massenpunkte des indifferenten Systems der Schwerpunkt der übrigen und man erhält umgekehrt aus einem allgemeinen Massensysteme ein indifferentes, indem man als weiteren Massenpunkt die in dem Schwerpunkte konzentrierte Gesamtmasse des Systems mit umgekehrtem Vorzeichen hinzufügt.

6. Baryzentrische Koordinaten. Besteht das Massensystem nur aus zwei Massenpunkten $\alpha_1 A_1$ und $\alpha_2 A_2$, so mögen wir durch die Punkte A_1 und A_2 die x-Axe des Koordinatensystems legen, sodass die Koordinaten der Punkte A_1 und A_2 $(x_1, 0, 0)$ und $(x_2, 0, 0)$ werden. Dann werden die Koordinaten y_s und z_s des Schwerpunktes S ebenfalls gleich Null, und x_s wird

$$x_s = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \tag{8}$$

d. h.[18]) der Schwerpunkt S der beiden Massenpunkte $\alpha_1 A_1$ und $\alpha_2 A_2$ teilt das Segment $A_1 A_2$ im umgekehrten Verhältnisse zu den Massen α_1 und α_2, und zwar innen oder aussen, je nachdem α_1 und α_2 gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben[22]). Ist $\alpha_2 = -\alpha_1$, so rückt S auf der Verbindungslinie von A_1 und A_2 in unendliche Entfernung (vgl. Nr. 2).

---

22) Dieses Hebelgesetz rührt bereits von *Archimedes* her.

Wir übergehen der Kürze halber den Fall dreier Massenpunkte. Besteht das Massensystem aus vier Massenpunkten $\alpha_1 A_1$, $\alpha_2 A_2$, $\alpha_3 A_3$, $\alpha_4 A_4$, so liegt sein Schwerpunkt S so, dass jede der drei durch ihn gehenden geraden Linien, die zwei Gegenkanten des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ treffen, diese Kanten im umgekehrten Verhältnisse zu den in ihren Endpunkten angebrachten Massen teilen. Der Abstand des Schwerpunktes S von einer Seitenfläche des Tetraeders steht zu der zugehörigen Höhe in demselben Verhältnisse, wie die in dem gegenüberliegenden Eckpunkte A_r angebrachten Massen α_r zu der Gesamtmasse $\mu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$.

Betrachtet man nun die vier Punkte A_i als fest und nur die zugehörigen Massen α_i als veränderlich, mit der Bedingung, dass ihre Summe μ konstant bleibt, so gehört zu jedem Wertequadrupel $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$ *ein* bestimmter Punkt S und umgekehrt zu jedem Punkte S *ein* Wertequadrupel $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$. Diese vier Werte α_i sind die *barycentrischen Koordinaten* des Punktes S, bezogen auf das *Fundamentaltetraeder* $A_1 A_2 A_3 A_4$[23]). Dieselben sind von *Moebius* eingeführt und in seinem Barycentrischen Kalkul (1827) verwertet worden, wodurch zum ersten Male ein System homogener Koordinaten in die analytische Geometrie eingeführt wurde[24]). Die *Tetraederkoordinaten* von *J. Plücker*[25]) gehen aus den barycentrischen Koordinaten hervor, indem man dieselben noch mit beliebig wählbaren konstanten Faktoren multipliziert.

7. Das Massensystem, aufgefasst als ein System paralleler Kräfte. Die in den voraufgehenden Nummern gegebenen Sätze erhalten eine charakteristische Interpretation, wenn man die Massen α_i eines Massensystems durch Strecken $A_i B_i$ repräsentiert, die sämtlich einer willkürlichen Richtung u parallel von den Punkten A_i des Systems in ein oder dem anderen Sinne je nach dem Vorzeichen von α auslaufen. Man kommt so auf bekannte Sätze der Statik starrer Körper (vgl. IV 2, 32, *Timerding*).

Im Falle eines *allgemeinen Massensystems* (also $\mu \neq 0$) lässt sich

---

23) Sie sind dem Inhalte der Tetraeder proportional, deren Spitze in S liegt und deren Grundflächen die den Punkten A_i gegenüberliegenden Seitenflächen Δ_i des Fundamentaltetraeders sind.

24) S. die Vorrede von *R. Baltzer* zu Bd. 1 von *Moebius'* Werken p. IX, und bei *Grassmann* (Werke 1^1, § 116, 117), was er „barycentrisches Richtsystem von *Moebius*" nennt.

25) J. f. Math. 5 (1830), p. 1 = Werke 1, p. 124. Vgl. auch *Bellavitis*, Metodo delle equipollenze (1835), Nr. 99 u. 100.

eine im Schwerpunkte S angreifende resultierende Strecke SR finden[26]); da u willkürlich ist, so rotiert, wenn die Strecken A_iB_i um die Punkte A_i durch einen Winkel ψ sich drehen, die resultierende Strecke um den Punkt S durch denselben Winkel.

Die Strecken A_iB_i lassen sich als Kräfte auffassen, die in den Punkten A_i angreifen; S ist das Zentrum dieser Kräfte[27]).

Nimmt man alle Massen gleich 1, so lassen sich die Strecken SA_i als Darstellung eines Systems von Kräften deuten, die am Punkte S angreifend sich das Gleichgewicht halten. Wären n am Punkte S angreifende Kräfte nicht im Gleichgewichte, so würde ihre Resultante gleich der Strecke $n \cdot SM$ sein, wenn M das Centrum der mittleren Entfernungen für die Endpunkte der die Kräfte darstellenden Strecken bedeutet.

Wird das *magnetische Massensystem* durch ein System paralleler Kräfte ersetzt, deren Angriffspunkte in die Massenpunkte fallen und deren Intensitäten den Massen proportional sind[28]), so sind die Kräfte im Gleichgewichte, wenn ihre Richtung u mit der Axenrichtung des magnetischen Systems zusammenfällt. Haben sie irgend eine andere Richtung, die mit der Axenrichtung den Winkel ω bilde, so setzen sie sich zu einem Kräftepaare vom Momente $q \cdot \sin \omega$ zusammen[29]). Lässt man den Arm dieses Kräftepaares in die Axenrichtung des magnetischen Systems fallen, giebt ihm im übrigen eine beliebige Länge a, so haben die Kräfte des Paares die Intensität $\frac{q}{a}$ und drehen sich mit den Kräften des Systems, das sie ersetzen, um ihre Angriffspunkte.

Insbesondere kann man das System paralleler Kräfte so auf ein Kräftepaar reduzieren, dass man irgend eine Anzahl dieser Kräfte, die nur nicht selbst einem Kräftepaare äquivalent sein darf, zu einer Resultierenden vereinigt und ebenso die übrigbleibenden Kräfte des Systems. Diese beiden Resultanten bilden dann das Kräftepaar.

Ersetzt man die Massen in einem *indifferenten Massensystem* durch parallele Kräfte, so sind dieselben, wie man auch ihre gemeinsame Richtung u annimmt, im Gleichgewichte[28]).

---

26) Wegen dieser Eigenschaft des Schwerpunkts S nennt ihn *D. Chelini*, Bol. Mem. (2) 10 (1870), p. 343, den „resultierenden Punkt" der gegebenen Punkte $\alpha_i A_i$.

27) Vgl. *Moebius*, Statik = Werke 3, p. 151 ff.

28) *Moebius*, Statik 1, § 107 = Werke 3, p. 151 ff.; sowie IV 2, 34 (*Timerding*).

29) Das Kräftepaar bedeutet eine unendlich ferne, unendlich kleine Kraft; vgl. IV 2, 6 (*Timerding*). Über die Zusammensetzung solcher Kräfte in der unendlich fernen Ebene vgl. *Culmann*, Graphische Statik 1866, §§ 38—44.

8. Kongruente und ähnliche Systeme. Aus einem Massensysteme geht ein *kongruentes Massensystem* durch eine blosse Verrückung im Raume hervor. Hierbei ändert sich die Lage des Schwerpunktes gegen das System nicht. Giebt man der Masse α_i eines jeden Massenpunktes $\alpha_i A_i'$ des neuen Massensystems das entgegengesetzte Vorzeichen, so bildet er mit dem entsprechenden Massenpunkte $\alpha_i A_i$ des ursprünglichen Massensystems zusammen ein magnetisches Massensystem und alle diese magnetischen Systeme vereinigt geben ein magnetisches System, das die beiden kongruenten Massensysteme umfasst. Hieraus folgt (vgl. Nr. 4) die merkwürdige Gleichung

$$\Sigma_g \alpha_i A_i A_i' = \mu \cdot SS',$$ [30])

indem S und S' die Schwerpunkte der kongruenten Massensysteme bedeuten und durch Σ_g die geometrische Addition der Vektoren bezeichnet wird.

Aus einem Massensysteme geht ein *affines System* durch affine Transformation des Raumes hervor. Durch dieselbe Transformation geht dann auch der Schwerpunkt des alten Systems in den Schwerpunkt des neuen Systems über [31]) (vgl. Nr. 24).

II. Quadratische Momente. Das Antipolarsystem.

9. Die verschiedenen Arten quadratischer Momente und ihre gegenseitigen Beziehungen. Die quadratischen Momente eines Massensystems für ein Raumelement, nämlich einen Punkt, eine gerade Linie oder eine Ebene, werden definiert als die *skalaren Ausdrücke*, die man erhält, indem man die Masse jedes Massenpunktes mit dem *Quadrate* seiner in bestimmter (gewöhnlich rechtwinkeliger) Richtung gemessenen Entfernung von dem betreffenden Raumelemente multipliziert und alle diese Produkte addiert. Die quadratischen Momente werden traditioneller Weise als *Trägheitsmomente* bezeichnet, und zwar als *polare* J_p, *axiale* J_g und *planare Trägheitsmomente* J_ε, je nachdem sie sich auf einen *Punkt*, eine *gerade Linie* oder eine *Ebene* beziehen. Eine Strecke, deren Quadrat dem durch die Gesamtmasse dividierten absoluten Werte des Trägheitsmomentes gleich ist, heisst *Trägheitsradius* des Systems in Bezug auf das betreffende Raumelement oder auch kurz Trägheitsradius des Raumelements selber, und man hat den

30) *Moebius*, Mechanik des Himmels (1843), § 76 = Werke 4, p. 134. Er folgert aus ihr den Satz von der Erhaltung des Schwerpunkts.

31) Für ähnliche Figuren stammt das Theorem bereits von *Archimedes*.

verschiedenen Trägheitsmomenten entsprechend *polare* k_p, *axiale* k_g und *planare Trägheitsradien* k_e zu unterscheiden[32]).

Wählt man im Raume irgendwie drei zu einander normale Ebenen ξ, η, ζ und sieht sie als Grundebenen eines Cartesischen Koordinatensystems an, so werden die auf sie bezüglichen *planaren Trägheitsmomente* J_ξ, J_η, J_ζ eines Massensystems (αA) durch die Ausdrücke dargestellt:

$$(9) \qquad J_\xi = \sum \alpha_i x_i^2, \quad J_\eta = \sum \alpha_i y_i^2, \quad J_\zeta = \sum \alpha_i z_i^2.$$

Die *Trägheitsmomente für die Axen* x, y, z dieses Koordinatensystems werden dann[33]):

$$(10) \qquad \begin{cases} J_x = \sum \alpha_i (y_i^2 + z_i^2) = J_\eta + J_\zeta, \\ J_y = \sum \alpha_i (z_i^2 + x_i^2) = J_\zeta + J_\xi, \\ J_z = \sum \alpha_i (x_i^2 + y_i^2) = J_\xi + J_\eta. \end{cases}$$

„Man findet hiernach allgemein das axiale Trägheitsmoment J_g für irgend eine Axe g, indem man die planaren Trägheitsmomente für zwei durch diese Axe gelegte, zu einander normale Ebenen addiert.“

Umgekehrt wird:

$$(11) \quad J_\xi = \tfrac{1}{2}(J_y + J_z - J_x), \quad J_\eta = \tfrac{1}{2}(J_z + J_x - J_y), \quad J_\zeta = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y - J_z).$$

Das *polare Trägheitsmoment* J_0 für den Ursprung O des Koordinatensystems ist:

$$(12) \quad J_0 = \sum \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = J_\xi + J_\eta + J_\zeta = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y + J_z).$$

32) *J. Somoff* (Mechanik 2, 531) behält für das axiale Trägheitsmoment J_g den von *L. Euler* gebrauchten Ausdruck „Trägheitsmoment“ bei, ersetzt aber — im Gegensatz zu *C. Culmann* (Graphische Statik 1866), *W. Schell* (Theorie der Bewegung) und *E. J. Routh* (Dynamik 1) — die von *J. Binet* (J. éc. polyt. 16 (1813)) auf die Ebenen erweiterte Bezeichnung („Trägheitsmoment in Bezug auf eine Ebene“) durch den Ausdruck „quadratisches Moment in Bezug auf eine Ebene“. *Hâton de la Goupillière* (J. éc. polyt. 37 (1857), p. 73—76) nennt das axiale Trägheitsmoment J_g „moment d'inertie“, das planare J_e „somme d'inertie“, das polare J_p „moment central d'inertie“, gebraucht aber später (Revue gén. des sciences 1893) die von uns verwendeten Bezeichnungen. — Schon *Euler* (Theoria motus 1765, Nr. 424) hatte (für schwere Massen) J_g in die Form μk_g^2 gebracht. *Poinsot* (J. de math. 16 (1851), p. 73) führte, daran anknüpfend, zum ersten Male den Begriff des Trägheitsradius ein, indem er k_g den „bras d'inertie autour de l'axe g“ nannte. *Hâton de la Goupillière* nennt den axialen Trägheitsradius k_g „rayon de gyration“ (wie auch *Mac Cullagh* thut), den planaren k_e „module de gyration“, den polaren k_p „rayon central de gyration“. *Schell* (Theorie der Bewegung 1, p. 78, 100) sagt dagegen bezw. „Trägheitsradius“, „Trägheitsarm“ und „Radius des polaren quadratischen Momentes“. *Somoff* (Mechanik 2, p. 74) hat für k_e keinen besonderen Namen.

33) *Euler*, Theoria motus 1765, Nr. 452.

„Das Trägheitsmoment J_p für irgend einen Punkt ist demnach gleich der Summe der Trägheitsmomente für drei durch diesen Punkt gelegte normale Ebenen oder gleich der halben Summe der Trägheitsmomente für drei durch ihn gehende normale Gerade." Man kann auch schreiben:

$$(13) \qquad J_0 = J_\xi + J_x = J_\eta + J_y = J_\zeta + J_z$$

oder:

$$J_\xi = J_0 - J_x, \quad J_\eta = J_0 - J_y, \quad J_\zeta = J_0 - J_z.$$

„Man findet also das Trägheitsmoment J_e für eine Ebene, indem man von dem Trägheitsmomente für irgend einen Punkt dieser Ebene das Trägheitsmoment für die in diesem Punkte auf der Ebene errichtete Normale abzieht."

Die Trägheitsmomente sind, wenn die Massen α_i beliebig positiv oder negativ sein können, nicht notwendigerweise immer positiv, sie sind es aber bei einem *Schwersysteme* (vgl. Nr. 2), wenn alle $\alpha_i > 0$ vorausgesetzt werden. Infolgedessen gelten für die Schwersysteme insbesondere die Sätze: Von den Trägheitsmomenten für drei durch denselben Punkt P gehende, zu einander normale Axen ist jedes kleiner als die Summe der beiden übrigen (wegen (11)) und sie sind alle kleiner als das polare Trägheitsmoment für den Punkt P (wegen (12)). Das Trägheitsmoment für eine Ebene ist kleiner wie das Trägheitsmoment für jede gerade Linie und jeden Punkt der Ebene (wegen (10) und (13)).

Zu den quadratischen Momenten gehören auch die sogenannten *Deviations-*[34]) oder *Centrifugalmomente*[35]). Dieselben beziehen sich auf ein Ebenenpaar, dessen Ebenen gewöhnlich zu einander normal, hier aber im allgemeinen ganz beliebig angenommen werden; und zwar wird das Deviationsmoment für ein solches allgemeines Ebenenpaar gefunden, indem man die Masse jedes Massenpunktes des gegebenen Massensystems mit seinen Abständen von den Ebenen des Ebenenpaares multipliziert und alle diese Produkte addiert, indem man also, wenn x_i und y_i diese parallel zu η und ξ gemessenen Abstände sind, den *skalaren Ausdruck* bildet

$$(14) \qquad D_{\xi,\eta} = \sum \alpha_i x_i y_i.$$

34) Wegen der Bezeichnung vgl. *Routh*, Dynamik 1, p. 2; *Schell*, Theorie der Bewegung 1, p. 104. Beide stützen sich auf *W. M. Rankine*, A manual of applied mechanics, 2. ed., London 1861.

35) S. hauptsächlich *Culmann*, Graphische Statik, 2. Aufl. (1875), § 106; in der französischen Ausgabe (Paris 1880, p. 392) ist übersetzt „moment centrifuge". Vgl auch *F. Müller-Breslau*, Graphische Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1887, p. 27; *O. Mohr*, Civiling. (2) 33 (1887), p. 43. — *D. Chelini* (Bol. Mem. (2) 10 (1870), p. 207) nennt das Deviationsmoment „momento complesso".

Einige Autoren nennen $D_{\xi,\eta}$ auch das „Deviationsmoment in Bezug auf die Axen x, y" (in denen die beiden Ebenen η, ξ von einer dritten geschnitten werden).

Fallen die beiden Ebenen zusammen, so geht offenbar das Deviationsmoment in das der *Ebene* zugehörige planare Trägheitsmoment J_e über.

Verschwindet für zwei Ebenen das Deviationsmoment, so heissen sie nach *Binet*[36]) *konjugiert bezüglich des Massensystems.* Danach heisst eine Ebene, für welche das planare Trägheitsmoment J_e verschwindet, *sich selbst konjugiert.* Drei Ebenen, welche paarweise bezüglich eines Massensystems konjugiert sind, bilden ein *Binet*'sches *konjugiertes Tripel*[36]); sind sie paarweise rechtwinklig, so bestimmen sie für ihren gemeinsamen Punkt P die zugehörigen *Hauptträgheitsebenen* und *Hauptträgheitsaxen*[37]), d. h. das zugehörige *Hauptträgheitstripel.* Im allgemeinen (vgl. Nr. **11**, 2'); **17** und **18**) giebt es für jeden Punkt P nur *ein* solches Hauptträgheitstripel. Der Punkt P heisst für jede dieser drei Hauptebenen und Hauptaxen der *Hauptpunkt.*

Für das Hauptträgheitstripel des Schwerpunkts, das wir auch *Schwerhauptträgheitstripel* nennen, mögen im folgenden stets A, B, C die *planaren*, A', B', C' die *axialen* Trägheitsmomente bedeuten. Ähnlich mögen die zugehörigen *planaren* Trägheitsradien mit a, b, c, die *axialen* mit a', b', c' bezeichnet werden und zwar gelte im Falle des *Schwersystems* stets die Beziehung $a < b < c$, weshalb nach (13) $a' > b' > c'$.

10. Polare quadratische Momente. Das polare quadratische Moment eines Massensystems für einen Punkt P mit den Koordinaten x, y, z[38]) wird durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$J_p = \sum \alpha_i \{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2\}. \tag{16}$$

Führt man in diesen Ausdruck, unter Voraussetzung eines *allgemeinen Massensystems*, die Koordinaten x_s, y_s, z_s des Schwerpunktes S ein, so ergiebt sich nach Formel (3a):

---

36) *Binet*, J. éc. polyt. 16 (1813), für Schwersysteme.

37) Nach *L. Euler*, Theoria motus 1765, p. 175 „*axes principales* cuiusque corporis sunt tres illi axes per eius centrum transeuntes, quorum respectu momenta inertiae sunt vel *maxima* vel *minima*". — Über die Definition nur *einer* Hauptträgheitsaxe siehe unten Nr. 18. Eine solche gab *W. Thomson*, Cambr. and Dubl. Math. J. 1 (1846), p. 127, für ein Schwersystem, auf Grund *dynamischer* Betrachtungen.

38) *Grassmann*, Werke 1¹, p. 375, nennt das polare quadratische Moment eines Massenpunktes αA „die Abweichung des vielfachen Punktquadrates αA^2" von einem Punkte P (vgl. Fussn. 4).

$$J_p = \sum \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - 2\mu (x_s x + y_s y + z_s z) + \mu (x^2 + y^2 + z^2)$$

oder, da für den Schwerpunkt S selbst das Moment

$$J_p^{(s)} = \sum \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \mu (x_s^2 + y_s^2 + z_s^2)$$

ist,

$$J_p = J_p^{(s)} + \mu \cdot \overline{PS}^2. \tag{17}$$ [39])

„Das polare Moment hat also seinen kleinsten oder grössten Wert, je nachdem die Gesamtmasse positiv oder negativ ist, für den Schwerpunkt und ist konstant für die Punkte einer jeden um diesen Schwerpunkt als Mittelpunkt beschriebenen Kugel."

Bezeichnet $k_p^{(s)}$ den polaren Trägheitsradius des Punktes S, sodass $k_p^{(s)}$ der absolute Wert von $\frac{J_p^{(s)}}{\mu}$ ist, und beschreibt man mit diesem Radius $k_p^{(s)}$ um S eine Kugel K_s, von der MN irgend ein Durchmesser sei, so wird für einen beliebigen Punkt P:

$$(18) \quad \begin{cases} J_p = \frac{\mu}{2}(\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2), & \text{wenn } \mu J_p^{(s)} > 0, \\ J_p = \mu \cdot \overline{PM} \cdot \overline{PN} \cdot \cos(MPN), & \text{wenn } \mu J_p^{(s)} < 0. \end{cases}$$

Diese Kugel K_s kann nach *Grassmann*[43]) benutzt werden, um das Massensystem hinsichtlich seiner polaren quadratischen Momente zu repräsentieren. Stimmt μ mit $J_p^{(s)}$ im Vorzeichen überein, so kann man sich die Gesamtmasse μ zu gleichen Teilen auf die Endpunkte M und N eines beliebigen Durchmessers verteilt oder auch gleichförmig über die Kugel ausgebreitet denken. Dieses reduzierte Massensystem stimmt dann mit dem vorgelegten auch in allen linearen Momenten überein. Ist μ im Vorzeichen von $J_p^{(s)}$ verschieden, so liefert die Kugel K_s durch einen beliebigen Durchmesser MN das polare quadratische Moment für P, indem man das *innere Produkt* der Strecken $\overline{PM}$ und $\overline{PN}$ mit der Masse μ multipliziert.

Bildet man das polare Moment für die Massenpunkte A_i des Systems selbst, indem man es jedesmal mit der zugehörigen Masse α_i multipliziert, und addiert alle so entstehenden Ausdrücke, so zeigt die vorhergehende Gleichung (17), dass die Hälfte dieser Summe

$$\sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j \overline{A_i A_j}^2 = \mu \cdot \sum_i \alpha_i \overline{SA_i}^2 \tag{19}$$ [39])

---

39) Die beiden Formeln (17) und (19) verdankt man, sofern man sich auf Schwersysteme beschränkt, *J. L. Lagrange* (Berlin, Mém. de l'Acad. 1785 (Année 1783), p. 290, 291). Von ihnen hat für ein System einfacher Punkte *Carnot* (Corrélation des figures 1801, § 213) verschiedene geometrische Anwendungen gegeben. Für beliebige Massensysteme vgl. die entsprechenden Entwicklungen von *C. A. Laisant, G. Darboux, G. Jung* im Bull. Soc. math. de France 6, 7

wird, wobei in der Doppelsumme für die Indices i, j die $\frac{1}{2}n(n-1)$ binären Kombinationen der Zahlen 1 bis n zu nehmen sind. Sind alle Massenpunkte des Massensystems einfache Punkte, so wird die vorige Gleichung:

$$(20) \qquad \sum\sum \overline{A_i A_j}^2 = n \cdot \sum \overline{SA_i}^2 .$$

Liegt ein *magnetisches Massensystem* vor, und werden die Komponenten seiner Axe q mit A_1, A_2, A_3 bezeichnet, so dass

$$A_1 = \sum \alpha_i x_i, \quad A_2 = \sum \alpha_i y_i, \quad A_3 = \sum \alpha_i z_i,$$

setzt man ferner $A_0 = \frac{1}{2} \sum \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$, so wird das polare quadratische Moment für den Punkt P mit den Koordinaten x, y, z

$$(21) \qquad J_p = -2\{A_1 x + A_2 y + A_3 z - A_0\};$$

das polare Moment verschwindet also für alle Punkte der Ebene ζ_0,[40]) deren Gleichung lautet:

$$A_1 x + A_2 y + A_3 z = A_0 .$$

Diese Ebene ist zu der Axenrichtung des magnetischen Systems normal, und für die Punkte einer jeden zu ζ_0 parallelen Ebene erhält das polare Moment einen konstanten Wert. Derselbe bestimmt sich, indem man den nach der einen Seite positiv, nach der anderen Seite negativ genommenen Abstand dieser Ebene von der Ebene ζ_0 mit der Grösse

$$G = 2\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2},$$

also der doppelten Länge des Vektors q multipliziert[41]). Das magnetische Massensystem lässt sich hinsichtlich seiner polaren quadratischen Momente nach *Grassmann*[42]) durch die Ebene ζ_0 repräsentieren, wenn man dieser noch das „Gewicht" G beischreibt. Die Axe q des magnetischen Systems findet man dann sofort, indem man auf einer Normalen der Ebene ζ_0 die Strecke $\frac{1}{2} G$ aufträgt.

Endlich wird

$$(22) \qquad q^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j \overline{A_i A_j}^2 .^{41})$$

(1878, 1879). *Hâton de la Goupillière* nannte das linke Glied von (19) das „absolute Moment" des Systems (Revue gén. des sciences 1893, p. 329).

40) Bedeuten die Koeffizienten magnetische Massen, so fällt die Ebene ζ_0 mit der von *E. Beltrami* (Ann. di. mat. (2) 10 (1882), p. 252) *Zentralebene* genannten Ebene zusammen, während der skalare Wert von q dann das *Hauptmoment* des Systems angiebt; s. auch *F. P. Ruffini*, Bol. Rend. 3 (1898/99), p. 17 ff. In *Grassmann*'scher Bezeichnung ist die Ebene ζ_0 mit dem zu ihr normalen Vektor eine *innere Plangrösse*.

41) *Darboux, Jung* (Bull. Soc. math. 6, 7 (1878, 1879)).

Für ein *indifferentes System* ist $q = 0$, d. h. $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, also das polare Moment

$$J_p = 2A_0; \tag{23}$$

dasselbe ist mithin konstant für alle Punkte des Raumes[42]). Schliesslich ist

$$\sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j \overline{A_i A_j}^2 = 0.\,^{43)} \tag{24}$$

11. Planare quadratische Momente und Deviationsmomente und ihre Beziehung zu dem mit dem Massensystem verknüpften Antipolarsystem. Die Darstellung der Theorie der planaren quadratischen Momente, welche in den folgenden Nummern gegeben werden soll, geht von einer einfachen geometrischen Konstruktion aus, welche jeder Ebene einen bestimmten Raumpunkt zuordnet. Man verändere das vorgelegte Massensystem (αA) in der Weise, dass man jedem Punkte A_i eine neue Masse α_i' giebt, die dem statischen Momente des Massenpunktes $\alpha_i A_i$ für eine gegebene Ebene π gleich sei. Sucht man dann von dem so veränderten Massensystem $(\alpha_i' A_i)$ den Schwerpunkt, so heisst dieser nach *Culmann* das *Zentrum zweiten Grades*[44])[45]) *der vor-*

42) Vgl. *Moebius*, Barycentrischer Calcul = Werke 1, § 17, 1. Von dieser Eigenschaft gab *Moebius* (J. f. Math. 26 (1843), p. 26 = Werke 1, p. 581) verschiedene geometrische Anwendungen.

43) Die polaren quadratischen Momente fallen mit den von *Grassmann* als „innere Grössen" bezeichneten Ausdrücken zusammen. Das im Text Gesagte erklärt die *Grassmann*'sche Einteilung der „inneren Grössen" in drei Arten (Geometrische Analyse 1847 = Werke 1[1], §§ 16—22, s. auch *Moebius* Anhang zu *Grassmann*'s Geom. Anal. (1847) = Werke 1, p. 621—633) und macht die von ihm gewählten Benennungen „Kugelgrösse", „innere Plangrösse" und „Streckenprodukt" verständlich. Dem Wesen nach stimmt diese von den polaren quadratischen Momenten ausgehende Einteilung des Massensystems mit der in Nr. 2 gegebenen vollkommen überein (vgl. *G. Jung*, Ist. Lomb. Rend. (2) 16 (1883), p. 616).

44) Graphische Statik, 2. Aufl. (1875), § 103.

45) Die Polarverwandtschaft zwischen einer Ebene π und ihrem Zentrum zweiten Grades leitete auf Grund *statisch geometrischer Betrachtungen* im Falle eines *Schwersystems* zuerst *L. Cremona* ab (Corso litogr. di statica grafica, Milano 1867/8, § 12, Nr. 92 ff.), später *O. Mohr*, Civiling. (2) 33 (1887), p. 60 und *W. Ritter*, Schweiz. Bauzeitung 11 (1888), p. 121; für ein *beliebiges* Massensystem gab den Beweis *G. Jung*, Ist. Lomb. Rend. (2) 8 (1875) u. (2) 12 (1879), § 10, sowie auch Collectanea math. in Mem. *D. Chelini*, Milano 1881, § 11. *C. Culmann* leitete die Beziehung aus dem von ihm *auf analytischem Wege* gefundenen Zentralellipsoid ab (Graphische Statik, 1866). Gleichzeitig mit *Culmann* studierte *Bresse*, Cours de mécanique appliquée 1, 2. éd. Paris 1866) diese Polarität in der Ebene und führte zum ersten Male die Benennungen „Antipol einer Geraden", „antipolare Gerade" u. s. w. ein, die dann später von *Culmann* in der zweiten Auflage (1875) seiner graphischen Statik angenommen und auf

gelegten Ebene π bezüglich des gegebenen Massensystems. Dieser spielt für die quadratischen Momente eine ähnlich wichtige Rolle, wie der Schwerpunkt S für die linearen Momente und fällt mit ihm zusammen, sobald π ins Unendliche rückt.

Wir beginnen mit einigen analytischen Formeln.

Sind $Ux + Vy + Wz - T = 0$ und $U'x + V'y + W'z - T' = 0$ die Gleichungen irgend zweier Ebenen π und π', so wird das zugehörige *Deviationsmoment* des Massensystems durch den Ausdruck

$$(25)\quad D_{\pi,\pi'} = \frac{\sum \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)(U'x_i + V'y_i + W'z_i - T')}{U^2 + V^2 + W^2}$$

gegeben.

Sind π und π' zwei *Binet*'sche konjugierte Ebenen, so wird $D_{\pi,\pi'} = 0$ (vgl. Nr. 9) oder

$$(26)\quad \sum \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)(U'x_i + V'y_i + W'z_i - T') = 0.$$

Fallen π und π' in eine einzige Ebene zusammen, so erhält man aus (25) für deren planares Trägheitsmoment J_e den Ausdruck:

$$(27)\quad J_e = \frac{\sum \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)^2}{U^2 + V^2 + W^2}$$

oder

$$(27')\quad J_e = \frac{\Phi}{U^2 + V^2 + W^2},$$

wenn zur Abkürzung der Zähler in (27) gleich Φ gesetzt wird.

Ist π eine im Sinne *Binet*'s *sich selbst konjugierte* Ebene so ergiebt sich aus (26) die Gleichung

$$(28')\quad \Phi = \sum \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)^2 = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich in der Form schreiben:

$$(28)\quad \begin{cases} \Phi = A_{11}U^2 + A_{22}V^2 + A_{33}W^2 + 2A_{23}VW + 2A_{31}WU + 2A_{12}UV \\ \qquad - 2A_1UT - 2A_2VT - 2A_3WT + \mu T^2 = 0, \end{cases}$$

---

den Raum ausgedehnt wurden (diese Benennungen rechtfertigen sich aus Nr. **12**). — Bei *Th. Reye*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 10 (1865), finden sich bereits die Benennungen „Gegenpol" und „gegenpolare Gerade"; er verfährt unter Voraussetzung eines Schwersystems *analytisch*, wie *Culmann*, beweist aber in § 6 ausdrücklich, dass die Punkte und ihre gegenpolaren Ebenen ein Polarsystem bezüglich einer imaginären Ordnungsfläche bilden.

Das Theorem ist implicite für ein *Schwersystem* auch in den von *Hesse*, Vorlesungen über Geometrie des Raumes, 2. Aufl. 1869, 3. Aufl. 1876, 25. Vorl., gegebenen *statisch-analytischen Betrachtungen* und für ein *beliebiges* Massensystem in der Arbeit von *Reye*, J. f. Math. 72 (1870), enthalten, insofern das Antipolarsystem von dem zu dem „imaginären Bild von *Hesse*" und der „zweiten Nullfläche von *Reye*" gehörigen Polarsystem nicht verschieden ist [vgl. Nr. **11**, 1)].

wenn man

$$(29)\begin{cases}\sum \alpha_i x_i^2 = A_{11}, & \sum \alpha_i y_i^2 = A_{22}, & \sum \alpha_i z_i^2 = A_{33}, \\ \sum \alpha_i y_i z_i = A_{23} = A_{32}, & \sum \alpha_i z_i x_i = A_{31} = A_{13}, & \sum \alpha_i x_i y_i = A_{12} = A_{21}\end{cases}$$

und

$$(30) \quad \sum \alpha_i x_i = A_1, \quad \sum \alpha_i y_i = A_2, \quad \sum \alpha_i z_i = A_3, \quad \sum \alpha_i = \mu$$

setzt.

Die Gleichungen (28) resp. (28') und (26) sind nun verschiedener Interpretationen fähig. Zunächst ergiebt die Raumgeometrie die bekannten Sätze:

1) Die Gleichung (28) stellt die Ordnungsfläche $\Phi = 0$ eines Polarsystems Σ dar (des sogenannten *Antipolarsystems* des Massensystems), das stets reell ist, auch wenn die Fläche $\Phi = 0$ imaginär ist;

2) die Gleichung (26) giebt in laufenden Ebenenkoordinaten den Pol der Ebene π in Bezug auf $\Phi = 0$ (oder den Antipol P von π in dem System Σ) und

3) π und π' sind konjugierte Ebenen des Antipolarsystems (vgl. IV 2, 29 (*Timerding*))[45]).

Andererseits folgen aus dem Umstande, dass für die Ebene $\pi \equiv Ux + Vy + Wz - T = 0$ gemäss unserer Grundidee gerade

$$\frac{\alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}$$

als neue Masse α_i' des Punktes A_i in dem veränderten Massensysteme $(\alpha_i' A_i)$ zu wählen ist, die Sätze:

1') Dieselbe Gleichung (26) stellt auch das Zentrum zweiten Grades $(U'V'W'T')$ der Ebene π dar; und der Schwerpunkt des Massensystems ist also auch Mittelpunkt des Antipolarsystems Σ (vgl. oben);

2') alle zu einer gegebenen Ebene π konjugierte *Binet*'sche Ebenen gehen durch ihr Zentrum zweiten Grades; sonach ist jedes *Binet*'sche konjugierte Tripel ein Poldreikant des Antipolarsystems Σ und umgekehrt, und da es für jeden Punkt im allgemeinen nur ein solches *rechtwinkeliges* Poldreikant giebt, so giebt es im allgemeinen zu jedem Punkt auch nur ein *Hauptträgheitstripel* (vgl. Nr. 9, 17 u. 18);

3') das Deviationsmoment $D_{\pi,\pi'}$ zweier Ebenen kann als statisches Moment eines durch eine der Ebenen veränderten Massensystems in Bezug auf die andere Ebene angesehen werden, und ebenso das planare Trägheitsmoment J_π als statisches Moment eines durch die Ebene π veränderten Massensystems in Bezug auf dieselbe Ebene π.[45])

Und deshalb folgt aus dem Vorigen schliesslich:

1'') Die Fläche $\Phi = 0$ wird umhüllt von den im Sinne *Binet's* sich selbst konjugierten Ebenen,

2'') jede dieser Ebenen enthält das ihr zugehörige Zentrum zweiten Grades und

3'') für jede derselben wird das zugehörige Trägheitsmoment J_ε gleich Null[46]).

Die Art der Fläche $\Phi = 0$ hängt von der Art des vorgelegten Massensystems ab. Jedenfalls fällt ihr eigentlicher oder uneigentlicher Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt S oder S_∞ des Massensystems zusammen. Für ein Schwersystem ist die Fläche $\Phi = 0$ imaginär. Hierüber vgl. unten Nr. **12** u. **13**.

Bezeichnet man nun mit s_π den Abstand des Schwerpunktes S, mit p_π den Abstand des Antipols von der *nicht durch S gehenden* Ebene π (der Abstand gemessen in derselben — an sich willkürlichen — Richtung u, in der die Abstände der Massenpunkte $\alpha_i A_i$ von der Ebene π gemessen werden) und beachtet man (vgl. Nr. **3**), dass — wenn $\mu \neq 0$ — für das veränderte Massensystem

$$\frac{\sum \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} = \mu s_\pi$$

die Gesamtmasse ist, so erhält man für ein *allgemeines Massensystem* (aus 3a und den vorigen Sätzen) die Beziehungen[47]):

$$(31) \qquad J_\pi = \mu s_\pi p_\pi \quad \text{und} \quad D_{\pi,\pi'} = \mu s_\pi p_{\pi'}.$$

„Das planare Trägheitsmoment für eine beliebige, nicht durch den Schwerpunkt gehende Ebene wird also gefunden, indem man die Gesamtmasse mit dem Abstande der Ebene von dem Schwerpunkte und von ihrem Antipol multipliziert"; und „das Deviationsmoment für irgend ein Ebenenpaar (von dessen Ebenen aber wenigstens eine keine Schwerebene ist) gewinnt man, indem man den Abstand des Schwerpunktes von der einen Ebene mit dem Abstande ihres Antipols von der anderen Ebene und der Gesamtmasse multipliziert".

Für ein *magnetisches System* ergeben sich, wenn man u in der Richtung der Axe wählt, die Gleichungen

$$(31') \qquad J_\pi = q p_\pi \quad \text{und} \quad D_{\pi,\pi'} = q p_{\pi'},$$

wo $p_{\pi'}$ den Abstand des zu π gehörigen Antipols von der ganz beliebigen Ebene π' und q den skalaren Wert der magnetischen Axe bezeichnet.

46) *O. Hesse*, Vorlesungen über die Geometrie des Raumes, 25. Vorlesung (für Schwersysteme).

47) Vgl. *Culmann*, Graphische Statik, 2. Aufl. (1875), p. 409.

Sind ferner für ein *allgemeines Massensystem* J_π und J_σ die planaren Trägheitsmomente zweier im Abstande p parallelen Ebenen π und σ, von denen die letzte *durch den Schwerpunkt* S geht, so findet man aus (9) und Nr. 3 die zu (17) ähnliche Relation:

(32) $$J_\pi = J_\sigma + \mu p^2$$

und aus (31) und (32), da $p = s_\pi$,

(33) $$J_\sigma = \mu s_\pi (p_\pi - s_\pi) = \mu s_\pi \cdot p_\sigma,$$

wo p_σ der Abstand des zu π gehörigen Antipols P von der parallelen Schwerebene σ ist.

Berührt π *die Fläche* $\Phi = 0$, so wird $J_\pi = 0$ und dann (vgl. (38)):

(34) $$J_\sigma = -\mu k^2,$$

wo k den Abstand der Schwerebene σ von der parallelen Tangentialebene der Fläche $\Phi = 0$ ist.

Sind π und π' zwei beliebige Ebenen und $\pi^{(s)}$ und $\pi'^{(s)}$ die zu ihnen parallelen Schwerebenen, so ergiebt sich für die zugehörigen Deviationsmomente $D_{\pi,\pi'}$ und $D_{\pi^{(s)},\pi'^{(s)}}$ die zu (32) analoge Relation:

(35) $$D_{\pi,\pi'} = D_{\pi^{(s)},\pi'^{(s)}} + \mu s_\pi s_{\pi'},$$ [48])

wo s_π und $s_{\pi'}$ die Abstände des Schwerpunktes von π und π' bezeichnen.

Geht *eine* dieser Ebenen durch S, ist z. B. π' mit $\pi'^{(s)}$ identisch, daher $s_{\pi'} = 0$, so wird

(35') $$D_{\pi^{(s)},\pi'^{(s)}} = D_{\pi,\pi'^{(s)}},$$ [48])

d. h. „das Deviationsmoment für zwei Schwerebenen $\pi^{(s)}$ und $\pi'^{(s)}$ ändert seinen Wert nicht, wenn eine derselben ($\pi^{(s)}$) eine parallele Translation ($\pi^{(s)} - \pi$) erhält“[48]).

Wir unterlassen es, in ähnlicher Weise die in den Formeln (32) bis (35) enthaltenen Sätze in Worte zu fassen.

12. Die Zentralflächen für die planaren quadratischen Momente und die Deviationsmomente. Wir bezeichnen als *Culmann'sche Zentralfläche* eines Massensystems oder des zugehörigen Antipolarsystems die zu dessen Ordnungsfläche $\Phi = 0$ *konjugierte* Fläche $\Phi^c = 0$.[49])

---

48) *Hâton de Goupillière*, J. éc. polyt. 37 (1857), p. 44 (für rechtwinkelige Ebenen π und π' und unter der Voraussetzung eines Schwersystems).

49) Bezieht man eine Fläche zweiten Grades (wenn sie eine Mittelpunktsfläche ist) auf ihre Symmetrieebenen, auf die Symmetrieebenen und auf die zu diesen normale Berührungsebene der Fläche (wenn sie ein Paraboloid ist), so

Liegt ein *allgemeines Massensystem* vor und wählt man als neues Koordinatensystem sein Schwerhauptträgheitstripel (Nr. **9**), so werden

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0, \quad A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0,$$
$$A_{11} = A, \quad A_{22} = B, \quad A_{33} = C,$$

die Gleichung (28) für Φ nimmt die einfachste (kanonische) Form an:

(36)
$$\Phi = AU^2 + BV^2 + CW^2 + \mu T^2 = 0$$
oder in Punktkoordinaten
$$\Phi = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} + \frac{1}{\mu} = 0.$$

Die Gleichung der *Culmann'schen Zentralfläche* ist daher:

(37)
$$\Phi^c = AU^2 + BV^2 + CW^2 - \mu T^2 = 0$$
oder
$$\Phi^c = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - \frac{1}{\mu} = 0.$$

Es seien π und π^c bezw. die Polarebenen eines Punktes P x', y', z' in Bezug auf Φ und Φ^c. Aus der Form ihrer Gleichungen ergiebt sich sofort, dass π und π^c parallel sind und gleichen Abstand vom Schwerpunkte haben. Es gilt auch der umgekehrte Satz, dass die Pole einer beliebigen Ebene in Bezug auf Φ und Φ^c zum Schwerpunkte symmetrisch liegen[45]). Ist insbesondere P ein Punkt der *Culmann*'schen Zentralfläche selbst, so ist er der Antipol der Ebene, die diese Fläche in dem zu ihm symmetrischen Punkte P^0 berührt.

Die *Culmann*'sche Zentralfläche Φ^c wird ein Hyperboloid oder ein reelles Ellipsoid, je nachdem Φ ein Hyperboloid oder ein imaginäres Ellipsoid ist. Ist Φ ein reelles Ellipsoid, so ist Φ^c imaginär. Jedes *Schwersystem* hat sonach ein reelles *Culmann'sches Zentralellipsoid*[50]), dessen Formel auf das Schwerhauptträgheitstripel bezogen

(37')
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist, wo a, b, c die planaren Schwerhauptträgheitsradien (Nr. **9**) bedeuten, sodass

$$A = \mu a^2, \quad B = \mu b^2, \quad C = \mu c^2.$$

Im magnetischen System dagegen ist Φ ein Paraboloid[51]) (vgl. Nr. **13**) und fällt daher nach unserer Definition mit der *Culmann*schen Zentralfläche zusammen.

---

erhält ihre Gleichung die *kanonische Form.* Zwei Flächen heissen dann *konjugiert,* wenn ihre kanonischen Gleichungen auf dieselben Koordinatenaxen bezogen bis auf das Zeichen des konstanten Gliedes übereinstimmen.

50) Graphische Statik, 2. Aufl. (1875), § 102. S. auch *F. P. Ruffini,* Bol. Mem. (4) 3 (1881), p. 9 u. p. 283.

51) *Th. Reye,* J. f. Math. 72 (1870), p. 298.

Es handele sich nun wieder um ein *allgemeines Massensystem*.

Ist π^c eine Tangentialebene der *Culmann*'schen Zentralfläche Φ^c, so ist ihr Antipol der zum Berührungspunkte diametral gelegene Punkt P der Fläche. Bezeichnet k das Perpendikel von S auf π^c, so wird $s_\pi = p_\sigma = +k$, $p_\pi = +2k$ und daher (vgl. die Formeln (33) u. (31))

$$(38) \qquad J_\sigma = \mu \cdot k^2, \quad J_{\pi^c} = 2J_\sigma.$$

„Ist also eine Schwerebene σ zu einer Tangentialebene π der *Culmann*'schen Zentralfläche parallel, so wird ihr Trägheitsradius k_σ gleich dem Abstande der letzteren Ebene vom Schwerpunkte[52])“ und ferner „ist der Betrag des planaren Trägheitsmoments für die Tangentialebene an die *Culmann*'sche Zentralfläche doppelt so gross, wie für die parallele Schwerebene“. Das Zeichen beider Trägheitsmomente stimmt mit dem Zeichen der Gesamtmasse μ überein.

Ist ferner M ein Endpunkt des zu σ konjugierten Halbmessers der *Culmann*'schen Zentralfläche, so ist das Trägheitsmoment des Massensystems für die Schwerebene σ gleich dem für dieselbe Schwerebene genommenen Trägheitsmoment der in M konzentrierten Gesamtmasse. Nimmt man eine zweite Schwerebene σ' hinzu, so wird das Deviationsmoment des Massensystems für σ und σ' ebenfalls gleich dem Deviationsmoment der in M konzentrierten Gesamtmasse μ.[53]) Dieser letzte Teil des Satzes folgt aus der Formel (31), wenn man zuerst (mit Hülfe von (35')) die Schwerebene σ durch die (parallele) Tangentialebene der Fläche Φ^c im Punkte M ersetzt hat.

Die zur *Culmann*'schen Zentralfläche *reziproke* Fläche, deren Gleichung

$$(39) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - \mu = 0$$

ist, bezeichnen wir nach *W. Schell* als die *Binet'sche Zentralfläche* des Massensystems. Legt man normal zu dem Durchmesser SM derselben die Schwerebene σ, so ist der reziproke Wert des zu σ gehörigen Trägheitsradius k_σ gleich SM.

Ist das Massensystem ein *Schwersystem*, so wird diese Fläche stets ein reelles Ellipsoid

$$(39') \qquad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 1 = 0.$$

In diesem Falle kann das *Binet*'sche Zentralellipsoid durch den eben

52) *Culmann*, Graphische Statik, 1. Aufl. (1866), in § 61 für räumliche, in § 66 für ebene Systeme.

53) *Culmann*, Graphische Statik, 2. Aufl. (1875), p. 401, 409.

ausgesprochenen Satz definiert und auch nach ihm in einfachster Weise konstruiert werden.

Abschliessend bemerken wir zu Nr. **11** und Nr. **12** noch folgendes:

Die Gesamtheit der Ebenen des Raumes und der zugehörigen Zentren zweiten Grades bezüglich eines Massensystems bildet, wie wir sahen, eine Polarverwandtschaft, die wir (auch im Falle eines allgemeinen und eines magnetischen Systems) wegen der im Anfange dieser Nummer bezeichneten Eigenschaften das Antipolarsystem Σ desselben genannt haben. Es sind danach *Zentrum zweiten Grades* und *Antipol* einer Ebene dasselbe. Die Polarität kann sowohl durch die Ordnungsfläche Φ von Σ, als durch die *Culmann*'sche Zentralfläche definiert und auch konstruiert werden; und zwar fällt das Zentrum zweiten Grades (Antipol) einer Ebene π mit deren Pole P in Bezug auf Φ zusammen oder auch mit dem Punkte P, der zu dem zu der Ebene π in Bezug auf Φ^c gehörigen Pole P^c hinsichtlich des Schwerpunkts symmetrisch liegt. Die Verbindung von Ebene und zugehörigem Zentrum zweiten Grades scheint im allgemeinen durch die Betrachtung des (immer reellen) Antipolarsystems Σ einfacher und direkter vermittelt zu werden, als durch das Heranziehen der *Culmann*'schen Zentralfläche. Trotzdem behält letztere, wie auch die Ordnungsfläche Φ selbst, ihre grosse Wichtigkeit insbesondere für die Darstellung der planaren Schwerträgheitsradien.

13. Die konfokalen Flächen konstanten planaren Momentes. Aus (27), (27') ergiebt sich, dass alle Ebenen, für welche das Trägheitsmoment J_e denselben Wert K hat, der Gleichung

$$\Phi = K(U^2 + V^2 + W^2) \tag{27''}$$

genügen. „Die Ebenen konstanten planaren Trägheitsmoments umhüllen sonach die einzelnen Flächen zweiten Grades einer konfokalen Flächenschar[54])“ (IV 2, **30**, *Timerding*), und zwar derselben Schar, die durch die Ordnungsfläche $\Phi = 0$ des Antipolarsystems Σ bestimmt ist. Diese konfokalen Flächen heissen die *Flächen konstanten Momentes* des Massensystems (vgl. Nr. **19**).

Ist nun $\mu \neq 0$, das Massensystem also ein *allgemeines*, so sind diese Flächen konzentrische und koaxiale Mittelpunktsflächen, deren gemeinsame Hauptaxen gerade die Schwerhauptträgheitsaxen sind. Legt man diese der neuen Koordinatenbestimmung zugrunde, so erhält man für die Flächen die Gleichung:

---

54) Diesen Satz fand (1811) für Schwersysteme *Binet*, J. éc. polyt. 16 (1813).

$$(40)\quad \begin{cases} AU^2 + BV^2 + CW^2 + \mu T^2 = K(U^2 + V^2 + W^2) \\ \text{oder in Punktkoordinaten} \\ \dfrac{x^2}{K-A} + \dfrac{y^2}{K-B} + \dfrac{z^2}{K-C} = \dfrac{1}{\mu} \end{cases}$$

wo die Bezeichnung die von Nr. **12** ist.

Ist k_e der zu J_e gehörige Trägheitsradius, so lässt sich für ein *Schwersystem* die vorstehende Gleichung auch schreiben:

$$(40')\qquad \frac{x^2}{k_e^2 - a^2} + \frac{y^2}{k_e^2 - b^2} + \frac{z^2}{k_e^2 - c^2} = 1.$$

Wenn $\mu = 0$ und $q \neq 0$, das System also ein *magnetisches* ist, so rückt der Schwerpunkt mit einer seiner Hauptebenen in das Unendliche, die Ordnungsfläche Φ hat nur zwei Symmetrieebenen und wird ein Paraboloid[51]), dessen Gleichung auf diese beiden Ebenen und die Zentralebene[40]) als Koordinatenebenen[55]) bezogen die Form erhält:

$$(41)\quad \begin{cases} \Phi = AU^2 + BV^2 + CW^2 - 2qWT = 0 \\ \text{oder in Punktkoordinaten} \\ \Phi \equiv \dfrac{x^2}{A} + \dfrac{y^2}{B} = \dfrac{C - 2qz}{q^2}, \end{cases}$$

wo q das lineare Hauptmoment des Systems, d. h. den skalaren Wert des Vektors q bezeichnet. Die Flächen konstanten Moments werden die zu Φ konfokalen Paraboloide.

Für ein *indifferentes Massensystem* ist $A_1 = A_2 = A_3 = 0$; Φ lässt sich dann auf die Form

$$(42)\qquad AU^2 + BV^2 + CW^2 = 0$$

bringen, wo A, B, C die planaren Hauptträgheitsmomente des (beliebigen) Koordinatenanfangspunktes sind. Die Ordnungsfläche reduziert sich sonach auf einen unendlich fernen Kegelschnitt, das Antipolarsystem auf ein ebenes (unendlich fern gelegenes) Antipolarsystem und jede zu Φ konfokale Fläche ebenfalls auf einen unendlich fernen Kegelschnitt. Das planare Trägheitsmoment ist danach für parallele Ebenen dasselbe[56]).

Indem wir wegen aller dieser Angaben auf IV 2, **30** (*Timerding*) verweisen, betrachten wir im Anschluss an die dort gegebenen Er-

55) Diese drei Ebenen bilden das von *Beltrami* (vgl. Fussn. 40) so genannte *Zentraltripel*; ihr Durchschnittspunkt ist das *Beltrami*'sche „magnetische Zentrum" des Systems. — Mit *Thomson* und *Beltrami* wird anstatt des freien Vektors q (s. Fussn. 10) besser die Axe des Paraboloids Φ als „magnetische Axe" bezeichnet.

56) *Th. Reye*, J. f. Math. 72 (1870), p. 302 und § 5.

örterungen die mechanische Bedeutung des konfokalen Flächensystems noch genauer, wobei wir uns indess auf allgemeine Massensysteme, speziell auf Schwersysteme, beschränken, also die Gleichung (40), bezw. (40′) zu Grunde legen.

Durch jeden Raumpunkt P gehen in diesem Falle drei reelle Flächen des Systems, ein Ellipsoid, ein einschaliges Hyperboloid und ein zweischaliges Hyperboloid, die sich im Punkte P rechtwinklig schneiden. Die Umhüllungskegel, welche man von P an die Flächen des konfokalen Systems legen kann, bilden selbst eine konfokale Schar; ihre gemeinsamen Fokallinien (sog. *Fokalaxen*) sind die beiden durch P gehenden Erzeugenden des genannten einschaligen Hyperboloids; die gemeinsamen Symmetrieebenen der Kegel fallen in die drei in P berührenden Tangentialebenen der drei durch P hindurchgehenden Flächen des konfokalen Systems und bilden dort das zu P gehörige rechtwinklige Poldreikant des Antipolarsystems. Umgekehrt ist jede Ebene im allgemeinen Tangentialebene einer und nur einer der Flächen des Systems und gehört also einem und nur einem solchen Poldreikant an.

Die mechanische Bedeutung dieser Beziehungen ist zunächst die, dass die genannten konfokalen Kegel umhüllt werden von den durch P gehenden Ebenen konstanten quadratischen Momentes (vgl. Ende Nr. **16**) und dass daraufhin die drei im Punkte konstruierten Tangentialebenen das *Hauptträgheitstripel* dieses Punktes bilden (vgl. Nr. **9**). (Von der mechanischen Bedeutung der Fokalaxen werden wir erst in Nr. **15** handeln.) Ist umgekehrt eine Ebene π gegeben und man konstruiert den Punkt P, in welchem sie die ihr zugehörige Fläche des konfokalen Systems berührt, so ist dieser der zur Ebene gehörige *Hauptpunkt* (vgl. Nr. **9**). Man findet denselben als Fusspunkt des Perpendikels, welches man vom *Antipol* der Ebene auf dieselbe fällen kann. In der That sind die Koordinaten des Antipols der Ebene U, V, W, T nach (36) die folgenden:

$$\frac{AU}{\mu T}, \quad \frac{BV}{\mu T}, \quad \frac{CW}{\mu T},$$

dagegen die Koordinaten des Berührungspunktes mit der Fläche (40), sofern man noch, für K, J_e schreibt:

$$\frac{(A-J_e)U}{\mu T}, \quad \frac{(B-J_e)V}{\mu T}, \quad \frac{(C-J_e)W}{\mu T}.$$

14. Axiale quadratische Momente und zugehörige Zentralflächen für allgemeine Systeme. Um das Trägheitsmoment für irgend eine *Axe* g zu finden, kann man den Satz benutzen, dass dieses axiale

Trägheitsmoment gleich der Summe der planaren Trägheitsmomente für irgend zwei durch g gelegte normale Ebenen wird. Legt man insbesondere die eine Ebene auch durch den Schwerpunkt S, so erhält man leicht aus vorstehender Regel und den Gleichungen (10) und (32) die zu (17) und (32) ähnliche Relation[57]):

$$J_g = J_{g^{(s)}} + \mu p^2, \tag{43}$$

wo p der Abstand des Schwerpunktes von g ist und J_g, $J_{g^{(s)}}$ die axialen Trägheitsmomente für g und die parallel zu ihr gezogene Schwerlinie bedeuten.

Für die Darstellung der axialen Schwerhauptträgheitsradien hat diejenige Fläche der konfokalen Flächenschar (40) eine besondere Wichtigkeit, für welche der Parameter K (d. h. J_e) gleich $A + B + C$, oder

$$K = J_{p^{(s)}}$$

ist. Die Gleichung (40) wird dann

$$\frac{x^2}{B+C} + \frac{y^2}{C+A} + \frac{z^2}{A+B} - \frac{1}{\mu} = 0,$$

d. h. wegen Nr. 9 und Formel (10)

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi = \frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \frac{z^2}{C'} - \frac{1}{\mu} = 0 \\ \text{oder in Ebenenkoordinaten:} \\ \Psi = A'U^2 + B'V^2 + C'W^2 - \mu T^2 = 0. \end{array} \right.$$

Sie stellt sonach eine zum Antipolarsystem konfokale Fläche Ψ vor, für deren Tangentialebenen jedesmal die zugehörigen planaren Trägheitsmomente J_e den Wert $A + B + C$ erhalten, d. h. gleich werden dem polaren quadratischen Moment für den Schwerpunkt ($J_{p^{(s)}}$). Diese Fläche Ψ bezeichnen wir als die *Mac Cullagh'sche Zentralfläche* des Massensystems. Sie ist mit der *Culmann*'schen Zentralfläche koaxial, aber die Hauptaxen der letzteren sind den *planaren*, die der *Mac Cullagh*'schen Zentralfläche dagegen den *axialen* Schwerhauptträgheitsradien gleich.

Für ein *Schwersystem* wird natürlich auch die *Mac Cullagh*'sche Zentralfläche ein zu dem *Culmann*'schen koaxiales Ellipsoid Ψ:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1; \tag{44'}$$

die Hauptaxen beider Ellipsoide sind sonach (Nr. 9) durch die Relationen verknüpft:

57) *L. Euler*, Theoria motus (1765), § 430, Cor. 2.

(45)
$$a'^2 = b^2 + c^2, \quad b'^2 = c^2 + a^2, \quad c'^2 = a^2 + b^2,$$
woraus umgekehrt folgt:
$$a^2 = \frac{1}{2}(b'^2 + c'^2 - a'^2), \quad b^2 = \frac{1}{2}(c'^2 + a'^2 - b'^2),$$
$$c^2 = \frac{1}{2}(a'^2 + b'^2 - c'^2).$$

In den Formeln (43) und (44) ist ausgesprochen, dass ganz allgemein der Schwerpunktsabstand von einer Tangentialebene der Fläche Ψ gleich dem Trägheitsradius für die zu ihr orthogonale Schwerlinie ist; und andererseits die Entfernung des Schwerpunkts von einem Punkte M der Fläche Ψ gleich ist einem der Hauptträgheitsradien für diesen Punkt: die Normale in M an die *Mac Cullagh*'sche Fläche ist die zugehörige Hauptträgheitsaxe.

Für ein *Schwersystem* verallgemeinern sich diese Sätze dahin, dass der zu irgend einer Axe g des Raumes gehörige Trägheitsradius k_g gleich dem Schwerpunktsabstande des Schnittpunktes dieser Axe mit einer zu ihr normalen Tangentialebene des *Mac Cullagh*'schen Ellipsoids ist; in diesem Falle kann man die vorigen Sätze umkehren und sonach zur Definition und Konstruktion des *Mac Cullagh*'schen Zentralellipsoids benutzen.

Auf die Fläche Ψ bezogen, wird für ein allgemeines Massensystem die konfokale Flächenschar (40) durch die Gleichung
$$\frac{x^2}{A' + \lambda\mu} + \frac{y^2}{B' + \lambda\mu} + \frac{z^2}{C' + \lambda\mu} - \frac{1}{\mu} = 0$$
gegeben, wo zwischen dem zu einer bestimmten Fläche gehörigen, früher benutzten Parameter $K\,(= J_e)$ und λ die Relation besteht:

(46)
$$K - A = A' + \lambda\mu$$
oder
$$\lambda = \frac{K - J_{p^{(s)}}}{\mu} = \frac{J_e - J_{p^{(s)}}}{\mu}$$ [58]).

Die zur *Mac Cullagh*'schen Fläche reziproke Fläche:

(47)
$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = \mu$$
bezeichnen wir als die *Poinsot'sche Zentralfläche.* Für ein *Schwersystem*, wo sie stets ein reelles Ellipsoid

(47')
$$a'^2x^2 + b'^2y^2 + c'^2z^2 = 1$$
ist, wurde sie von *Cauchy* und *Poinsot* eingeführt.

Jeder Halbmesser der *Poinsot*'schen Zentralfläche ist gleich dem

58) Vgl. *Somoff*, Mechanik 2, p. 85.

reziproken Werte des zu ihm, als Schweraxe $g^{(s)}$, gehörigen Trägheitsradius $k_{g^{(s)}}$. Für ein *Schwersystem* gilt auch der umgekehrte Satz, der dann auch zur Definition wie Konstruktion des *Poinsot'schen Zentralellipsoids* benutzt werden kann.

15. Deviationsmomente, insbesondere für rechtwinkelige Ebenenpaare, bei Schwersystemen. Wird in (14) Nr. 9

$$\mu d^2 = \pm D$$

gesetzt, so bezeichnet man d als den *Deviationsradius* für das betreffende Ebenenpaar oder Dieder. In vorliegender Nummer werden aber nur rechtwinkelige Dieder und die absoluten Werte der zugehörigen Deviationsmomente betrachtet, sowie vorausgesetzt, dass es sich um *Schwersysteme* handele und ausserdem μ positiv sei.

Legt man durch eine gegebene Axe g einerseits alle möglichen rechtwinkeligen Ebenenpaare, andererseits alle Ebenenpaare, deren Ebenen bezüglich des Massensystems (nach *Binet*) konjugiert sind, so erhält man zwei Involutionen, die im allgemeinen nur ein konjugiertes Elementenpaar gemein haben. Für dieses rechtwinkelige Ebenenpaar verschwindet das Deviationsmoment $D_{e,e'}$; seine Ebenen e und e' bilden das sogenannte *Nulldieder der Axe*[59]). Sind π und π' ein anderes der durch g gehenden Ebenenpaare und ist der Winkel $\widehat{\pi e} = \theta$, so wird, wenn man $\mu k^2_{\pi,\pi'} = D_{\pi,\pi'}$ setzt:

$$k^2_{\pi,\pi'} = l^2 \cdot \sin 2\theta, \tag{48}$$

wo

$$l^2 = \frac{1}{2}\,(k_e^2 - k_{e'}^2) \tag{49}$$

ist. Hieraus folgt, dass für das Dieder, dessen Ebenen die Winkel des Nulldieders halbieren, das Deviationsmoment ein Maximum $= \frac{1}{2}(J_e - J_{e'})$ wird; der zugehörige Deviationsradius l wird nach *Hâton de la Goupillière* der *Parameter der Axe g* genannt.

Jede Gerade g ist sonach als „Deviationsaxe g" durch die Lage ihres Nulldieders (e, e') und den Wert ihres Parameters l charakterisiert[59]). Kennt man nämlich diese Elemente, so lässt sich direkt aus (48), unabhängig von den allgemeinen Formeln (31), (35), (35'), das Deviationsmoment für jedes durch sie gehende rechtwinkelige Ebenenpaar finden. Das Nulldieder bestimmt sich im konfokalen Flächensysteme (Nr. 13) so, dass man zunächst die beiden Flächen

---

59) *Hâton de la Goupillière* (J. éc. polyt. 37 (1857), p. 3), dem man die nähere Untersuchung der Deviationsmomente verdankt, nennt die beiden Ebenen e, e' die Nullebenen von g. Vgl. auch *F. Moigno*, Statique, Nr. 201—207.

des Systems aufsucht, welche von der Axe g berührt werden, und dann in den Berührungspunkten die Tangentialebenen konstruiert. Sind K und K' die Parameter der beiden Berührungsflächen, so wird der zur Deviationsaxe g gehörige Parameter l gleich $\sqrt{\frac{K-K'}{2\mu}}$.

Ist der Parameter $l = 0$, so verschwindet das Deviationsmoment für jedes durch g gehende rechtwinkelige Ebenenpaar; die Ebenen sind daher alle konjugiert hinsichtlich des Massensystems. Die Axe g ist dann Erzeugende eines der konfokalen Schar angehörigen einschaligen Hyperboloids, d. h. eine *Fokalaxe* des Flächensystems (oder des Antipolarsystems); vgl. Nr. **13** [59a]). Umgekehrt ist auch jede Fokalaxe Deviationsaxe vom Parameter Null, d. h. eine *Nullaxe* [60]). Ist P ein Punkt von g und τ der Winkel, den die eine Nullebene von g mit den Ebenen $\overline{gf}, \overline{gf'}$ bildet, die g mit den von P auslaufenden Fokalaxen f, f' verbinden, so ist der Parameter l für alle von P auslaufenden Geraden[60]), welche dieselbe Fläche der konfokalen Schar berühren, wie die ausgewählte Nullebene, zu $\sin\tau$ proportional.

Ist insbesondere der Punkt P ein eigentlicher, und nimmt man auf einer beliebigen durch ihn gehenden Linie g den Punkt G so, dass PG gleich dem Werte L des „Parameters" für die mittlere, zu P gehörige Hauptträgheitsaxe ist, so bilden die Halbierungsebenen des Ebenenpaares $\overline{gf}, \overline{gf'}$ das Nulldieder der Axe g; der zugehörige Parameter wird $l = \sqrt{p \cdot p'}$, wenn p und p' die Abstände des Punktes G von den Fokalaxen f und f' bedeuten. Der Satz gilt auch für den uneigentlichen Punkt P_∞, sofern G ein ganz beliebiger Punkt der Deviationsaxe g ist[59]).

16. Die Trägheitsflächen eines beliebigen Punktes. Ist O der willkürlich gegebene Punkt, so wähle man O als Anfangspunkt eines beliebigen rechtwinkeligen Koordinatensystems und bestimme die zugehörigen *planaren* Trägheitsmomente $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und die entsprechenden Deviationsmomente $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$. Durch diese sechs Konstanten lassen sich dann für alle Ebenen und Strahlen des Bündels O die zugehörigen Trägheitsmomente ausdrücken. Ist nämlich in Bezug auf das gewählte

59a) Für das Studium der Deviationsaxen und zugehörigen normalen Deviationsmomente spielt die *Nullaxenkongruenz* eine analoge Rolle, wie der Trägheitskomplex (vgl. Nr. 18) des Massensystems für das Studium der Hauptträgheitsaxen und zugehörigen Trägheitsmomente.

60) *Hâton de la Goupillière* (J. éc. polyt. 37 (1857)) scheidet die durch einen Punkt gehenden Nullaxen in *Fokalaxen* und *singuläre Axen*, je nachdem der Punkt P im Endlichen oder Unendlichen liegt.

Koordinatensystem $Ux + Vy + Wz = 0$ die Gleichung einer Ebene durch O und J_π deren Trägheitsmoment, so wird

$$(50)\qquad \sum \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i)^2 = J_\pi (U^2 + V^2 + W^2)$$

oder in anderer Form geschrieben:

$$(51)\quad \mathfrak{A}U^2 + \mathfrak{B}V^2 + \mathfrak{C}W^2 + 2\mathfrak{D}VW + 2\mathfrak{E}WU + 2\mathfrak{F}UV = \mu T^2,$$

wo T aus der Gleichung

$$(52)\qquad \mu T^2 = J_\pi (U^2 + V^2 + W^2)$$

zu bestimmen ist[61]).

Bedeutet ferner g den zu π normalen Strahl des Bündels O, so erhält man aus $J_g = J_o - J_\pi$ und weil $J_o = \sum \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$, die Relation:

$$(50')\quad \begin{cases} (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})\, U^2 + (\mathfrak{C} + \mathfrak{A})\, V^2 + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\, W^2 \\ -\, 2\mathfrak{D}VW - 2\mathfrak{E}WU - 2\mathfrak{F}\, UV = J_g (U^2 + V^2 + W^2) \end{cases}$$

oder wegen (10) auch in der Form:

$$(51')\quad \mathfrak{A}'U^2 + \mathfrak{B}'V^2 + \mathfrak{C}'W^2 - 2\mathfrak{D}VW - 2\mathfrak{E}WU - 2\mathfrak{F}UV = \mu T^2,$$

wo $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ die den Koordinatenaxen zugehörigen *axialen* Trägheitsmomente sind und T aus der Gleichung

$$(52')\qquad \mu T^2 = J_g (U^2 + V^2 + W^2)$$

folgt[61]).

In Ebenenkoordinaten stellen die Gleichungen (51), (51') zwei bestimmte Flächen zweiter Klasse dar, deren erste wir als die *Culmann'sche Trägheitsfläche*, deren zweite wir als die *Mac Cullagh'sche Trägheitsfläche* des Punktes O bezeichnen. Die zu diesen Flächen reziproken Flächen nennen wir die *Binet'sche Trägheitsfläche* (nach *Schell*) resp. die *Poinsot'sche Trägheitsfläche* des genannten Punktes. Jedem Raumpunkte gehören also vier Trägheitsflächen an, deren gemeinsame Hauptaxen die Hauptträgheitsaxen des Punktes ($\mathfrak{D} = \mathfrak{E} = \mathfrak{F} = 0$) sind, und die mit den gleichnamigen „Zentralflächen" zusammenfallen, wenn der Punkt O der Schwerpunkt S des Massensystems ist. Sie besitzen für die quadratischen Momente in Bezug auf die Ebenen und Strahlen des Bündels O dieselben Eigenschaften, wie die Zentralflächen für die quadratischen Momente in Bezug auf die Schwerebenen und Schwerlinien (vgl. Nr. **12** und **14**). Wählt man die

61) Substituiert man in (51') den Wert (52') von μT^2 und dividiert dann durch $(U^2 + V^2 + W^2)$, so erhält man die klassische *Lagrange*'sche Formel, die den Wert von J_g durch die obigen sechs Konstanten ($\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$) und die Richtungscosinus der Axe g ausgedrückt ergiebt. Analog erhält man aus (51) und (52) die entsprechende *Binet*'sche Formel für J_π.

Hauptträgheitsaxen als Koordinatenaxen ($\mathcal{D}=\mathcal{E}=\mathcal{F}=0$), so mögen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ resp. $\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$ in $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ resp. in $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ übergehen, sodass $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die planaren, $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ die axialen Hauptträgheitsmomente des Punktes O sind.

Besonders wichtig wird die Darstellung durch die genannten Flächen, wenn das vorgelegte Massensystem ein *Schwersystem* ist, was wir für das Folgende annehmen. In diesem Falle sind alle Trägheitsflächen reelle Ellipsoide, sodass jedem Punkte O vier koaxiale Trägheitsellipsoide zugeordnet sind; und zwar erstlich ein *Culmann'sches* und ein *Mac Cullagh'sches Trägheitsellipsoid*, deren Gleichungen in Punktkoordinaten, auf die Hauptträgheitsaxen von O bezogen,

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y^2}{\mathfrak{b}^2}+\frac{z^2}{\mathfrak{c}^2}=1, \tag{53}$$

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}'^2}+\frac{y^2}{\mathfrak{b}'^2}+\frac{z^2}{\mathfrak{c}'^2}=1, \tag{54}$$

sind (wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ die *planaren*, $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ die *axialen* Hauptträgheitsradien des Punktes O bedeuten), und zweitens ein *Binet'sches* und ein *Poinsot-sches Trägheitsellipsoid*, die zu den vorigen reziprok sind und durch die Gleichungen

$$\mathfrak{a}^2x^2+\mathfrak{b}^2y^2+\mathfrak{c}^2z^2=1, \tag{55}$$

$$\mathfrak{a}'^2x^2+\mathfrak{b}'^2y^2+\mathfrak{c}'^2z^2=1 \tag{56}$$

gegeben sind. Im übrigen gelten für die Definition und Konstruktion der Trägheitsellipsoide für die Ebenen und Geraden des Bündels O dieselben Sätze, wie sie oben (Nr. **12** u. **14**) für die Definition und Konstruktion der Zentralflächen für Schwerebenen und Schwergeraden gegeben wurden.

Man kann noch auf einem anderen Wege zu dem *Culmann*'schen Trägheitsellipsoid Φ_O eines Punktes O gelangen. Diese Fläche lässt sich nämlich geometrisch auch dadurch definieren, dass erstlich ihre Hauptaxen in die Hauptträgheitsaxen des Punktes O fallen und dass zweitens für sie der Schwerpunkt S des Systems der Pol der Antipolarebene ω von O ist[62]). Diese Definition versagt nur dann, wenn O in den Schwerpunkt S rückt (d. h. für Φ_S); in diesem Falle definiert man Φ_S als das *Culmann*'sche Zentralellipsoid Φ^c. In der That ist π irgend eine Ebene des Bündels O und OM der zu ihr konjugierte Halb-

62) Diese geometrische Definition findet sich bei *Cremona* (Corso litogr. di statica grafica, Milano 1867, 68, Nr. 102). *Culmann* bestimmt in seiner Graphischen Statik die Trägheitsfläche analytisch 45). Für $\mu=1$ wird im Falle eines Schwersystems die Trägheitsfläche identisch mit dem zum ersten Male von *Binet* gegebenen Ellipsoid.

messer der Fläche Φ_O, so liegt ihr Antipol P auf dieser Geraden OM; ist weiter P' ihr Schnittpunkt mit der parallel zu π gelegten Schwerebene σ, so wird

$$\overline{OM}^2 = OP \cdot OP'.$$

Mit Hülfe dieser Relation (wo OM, OP und OP' mit k_π, p_π und s_π proportional sind) und den allgemeinen Formeln in Nr. **11** beweist man leicht, dass die für das *Culmann*'sche Zentralellipsoid geltenden Sätze in Nr. **12** ebenfalls für das Trägheitsellipsoid Φ_O des Punktes O gelten.

Bisher galt der Punkt O als ganz beliebig. Betrachten wir nun insbesondere die *Punkte auf den Fokalkurven* des Antipolarsystems. Indem wir annehmen, dass ein Schwersystem vorgelegt sei, bezeichnen wir die Symmetrieebene desselben mit α, β, γ; die zugehörigen planaren Trägheitsmomente sind A, B, C, wobei wir $A < B < C$ annehmen (vgl. Nr. 9); die Fokalellipse liegt dann in γ, die Fokalhyperbel in β. Da nun für jede Tangentialebene der einen oder anderen dieser ausgearteten konfokalen Flächen das Trägheitsmoment denselben konstanten Wert hat, und da die Ebene der Kurve als deren Tangentialebene in jedem ihrer Punkte zu betrachten ist, so sieht man sogleich, dass für jede Tangentialebene der Fokalellipse (γ) das Trägheitsmoment $= C$ und für jede Tangentialebene der Fokalhyperbel (β) das Trägheitsmoment $= B$ wird. Die vier Trägheitsellipsoide für einen Punkt O einer Fokalkurve werden also *Rotationsflächen*, deren gemeinsame Rotationsaxe die Fokalkurve in dem Punkte O berührt[63]).

Ist das *Culmann*'sche Zentralellipsoid Φ_S eine Rotationsfläche und seine kleinste Axe $2a$ die Rotationsaxe, so existieren auf dieser im Abstande $= \sqrt{c^2 - a^2}$ vom Schwerpunkte zwei *Brennpunkte*[64]), für welche die drei Hauptträgheitsmomente gleich und die Trägheitsellipsoide Kugeln werden (*Binet*, *Poisson*)[63]).

In dem Bündel O giebt es im allgemeinen ∞^1 Ebenen π und ∞^1 Geraden g konstanten gegebenen Trägheitsmomentes; jene umhüllen je eine der konfokalen Flächen der Schar (40), diese erfüllen

63) Demnach wird für die Punkte der Fokalellipse das *kleinste* planare Hauptträgheitsmoment veränderlich und gleich $A' = A + \mu r^2$, für die Punkte der Fokalhyperbel das *grösste* planare Trägheitsmoment veränderlich und gleich $B' = B + \mu r^2$, wenn r den Schwerpunktsabstand bedeutet (*Binet*, J. éc. polyt. 16 (1813), p. 61, 62, und *Poisson*, Mécanique 2, p. 496). — *Hâton de la Goupillière* (J. éc. polyt. 37 (1857), § 28) nennt die Fokalkurven „lignes de symétrie“ und die Punkte auf ihnen „points de symétrie“.

64) Nach *Hâton de la Goupillière* heissen diese Punkte „points de complète symétrie“.

den zu dem vorigen Kegel supplementären Kegel zweiten Grades, indem die Strahlen des einen Kegels auf den Tangentialebenen des anderen Kegels senkrecht stehen. Ist nämlich g normal zu π, so folgt aus $J_g - J_\pi = J_o$, dass $J_g = \text{const.}$, wenn $J_\pi = \text{const.}$ ist[65]).

17. Das Hauptträgheitstripel eines beliebigen Punktes. Was das Hauptträgheitstripel eines beliebigen Punktes O angeht, so wurde dessen Lage im konfokalen System der Flächen konstanten planaren Momentes bereits in Nr. **13** angegeben. Seine Bestimmung sowie die der zugehörigen Hauptträgheitsmomente fällt danach mit der Aufgabe zusammen, für eine Fläche zweiten Grades (vgl. Nr. **16**) die Hauptaxen der Grösse und Lage nach zu bestimmen. Wir geben hier die vollständigen Formeln für ein *Schwersystem*, indem wir an die vorige Nummer anknüpfen.

Die planaren Hauptträgheitsmomente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ von O werden die Wurzeln K_1, K_2, K_3 der kubischen Gleichung

$$K^3 - q_1 K^2 + q_2 K - q_3 = 0, \tag{57}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} q_1 &= \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}, \\ q_2 &= \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{C} + \mathcal{C}\mathcal{A} - \mathcal{D}^2 - \mathcal{E}^2 - \mathcal{F}^2, \\ q_3 &= \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C} + 2\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{F} - \mathcal{A}\mathcal{D}^2 - \mathcal{B}\mathcal{E}^2 - \mathcal{C}\mathcal{F}^2; \end{aligned}\right. \tag{58}$$

die Richtungskosinus α_i, β_i, γ_i der zugehörigen Hauptträgheitsebenen folgen aus den linearen Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A}\alpha_i + \mathcal{F}\beta_i + \mathcal{E}\gamma_i &= K_i\alpha_i, \\ \mathcal{F}\alpha_i + \mathcal{B}\beta_i + \mathcal{D}\gamma_i &= K_i\beta_i, \\ \mathcal{E}\alpha_i + \mathcal{D}\beta_i + \mathcal{C}\gamma_i &= K_i\gamma_i. \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{59}$$

Analog erhält man die axialen Hauptträgheitsmomente $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ von O als Wurzeln H_1, H_2, H_3 der kubischen Gleichung[66])

65) Besonders bemerkenswert sind die „Fokalkegel" $O(\beta)$ und $O(\gamma)$, welche die Fokalkurven (β) und (γ) aus dem Punkte O projizieren, und die an diese anknüpfende Konstruktion von *Mac Cullagh*, die *Townsend* (Cambr. and Dubl. Math. J. 2 (1847), p. 41) folgendermassen wiedergiebt: Die gemeinsamen Erzeugenden der beiden Fokalkegel bilden das Vierkant der durch O gehenden „bifokalen Sehnen" und dessen diagonales Dreikant liefert die Hauptträgheitsaxen und -Ebenen von O. Vgl. auch *E. J. Routh*, Dynamik 1, p. 46.

66) *Cauchy* (Exercices de math. 1827 = Oeuvres (2) 7, p. 130) bemerkt, dass die kubische Gleichung (57′) in der Form

$$(H - \mathcal{A}')(H - \mathcal{B}')(H - \mathcal{C}') - \mathcal{D}^2(H - \mathcal{A}') - \mathcal{E}^2(H - \mathcal{B}')$$
$$- \mathcal{F}^2(H - \mathcal{C}') + 2\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{F} = 0, \text{ wo } \mathcal{A}' = \mathcal{B} + \mathcal{C},\ \mathcal{B}' = \mathcal{C} + \mathcal{A},\ \mathcal{C}' = \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

von *Lagrange* bei seinen Untersuchungen über die Rotation eines starren Körpers gefunden wurde. *Lagrange* hatte auch gezeigt, dass die drei Wurzeln

$$(57') \qquad H^3 - q_1' H^2 + q_2' H - q_3' = 0,$$

wo

$$(58') \quad \begin{cases} q_1' = \mathcal{A}' + \mathcal{B}' + \mathcal{C}', \\ q_2' = \mathcal{A}'\mathcal{B}' + \mathcal{B}'\mathcal{C}' + \mathcal{C}'\mathcal{A}' - \mathcal{D}^2 - \mathcal{E}^2 - \mathcal{F}^2, \\ q_3' = \mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}' - 2\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{F} - \mathcal{A}'\mathcal{D}^2 - \mathcal{B}'\mathcal{E}^2 - \mathcal{C}'\mathcal{F}^2 \end{cases}$$

die Richtungskosinus α_i, β_i, γ_i der zugehörigen Hauptträgheitsaxen folgen aus den linearen Gleichungen

$$(59') \quad \begin{cases} \mathcal{A}'\alpha_i - \mathcal{F}'\beta_i - \mathcal{E}'\gamma_i = H_i\alpha_i \\ -\mathcal{F}'\alpha_i + \mathcal{B}'\beta_i - \mathcal{D}'\gamma_i = H_i\beta_i \\ -\mathcal{E}'\alpha_i - \mathcal{D}'\beta_i + \mathcal{C}'\gamma_i = H_i\gamma_i. \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Man hat übrigens zwischen den Wurzeln H und K die Relationen

$$H_1 = K_2 + K_3, \quad H_2 = K_3 + K_1, \quad H_3 = K_1 + K_2,$$

sodass

$$(60) \qquad H_i + K_i = J_o = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \quad (i = 1, 2, 3)$$

ist. Mit Hülfe dieser Relationen findet man nicht nur aus einer der Gleichungen (57), (57') die andere, sondern man hat auch wegen (46) die Beziehung[67])

$$(61) \qquad H_i = \mu(r^2 - \lambda_i), \qquad i = 1, 2, 3$$

wo $r = \overline{SO}$ und λ_1, λ_2, λ_3 die zu dem Punkte O gehörigen, auf das *Mac Cullagh*'sche Zentralellipsoid Ψ bezogenen Parameterwerte sind (vgl. Nr. **14**).

---

immer reell sind, „mais *M. Binet* a prouvé le premier que ces racines étaient précisément les moments d'inertie principaux". *Binet* (1811) (J. éc. polyt. 16 (1813), p. 51) fand mit Hülfe der Gleichung (57) zuerst die Hauptträgheitsaxen und die planaren Hauptträgheitsmomente. Indem er dann die Gleichung bildete, deren Wurzeln die Summen von je zwei Wurzeln der Gleichung (57) sind, bestimmte er die axialen Hauptträgheitsmomente und bewies endlich, wie man der Gleichung die obige Form geben kann, in der sie *Lagrange* (Méc. an. 1788, p. 397) mitgeteilt hatte. *Sir W. Thomson* (Lord Kelvin) gab den Gleichungen (57') und (57) eine andere Gestalt, indem er die Grössen $\frac{\mathcal{E}\mathcal{F}}{\mathcal{D}}$, $\frac{\mathcal{F}\mathcal{D}}{\mathcal{E}}$, $\frac{\mathcal{D}\mathcal{E}}{\mathcal{F}}$ einführte (Cambr. and Dubl. Math. J. 1 (1846), p. 199—200).

Sind α, β, γ die Richtungskosinus einer Axe g oder der Normalen einer Ebene π durch O gegen die Hauptträgheitsaxen dieses Punktes, so werden die Trägheitsmomente für dieselben

$$J_g = \mathfrak{A}'\alpha^2 + \mathfrak{B}'\beta^2 + \mathfrak{C}'\gamma^2, \qquad J_\pi = \mathfrak{A}\alpha^2 + \mathfrak{B}\beta^2 + \mathfrak{C}\gamma^2.$$

Die erste dieser Formeln stammt von *Euler* (Theoria motus 1765, Nr. 452), die zweite von *Binet* (1811); man erhält sie sogleich (vgl. Fussn. 61) aus (51') und (51), in denen jetzt $\mathcal{D} = \mathcal{E} = \mathcal{F} = 0$ ist.

67) Vgl. *Routh*, Dynamik 1, p. 43; *Schell*, Theorie der Bewegung 1, p. 122.

Man bemerke noch, dass die Koeffizienten q_1, q_2, q_3; q_1', q_2', q_3' (die *Invarianten des Punktes* O) durch folgende Beziehungen mit einander verknüpft sind:

$$(62)\qquad q_1' = 2q, \quad q_2' = q_1^2 + q_2, \quad q_3' = q_1 q_2 - q_3.$$

Sind nicht die sechs Konstanten $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ und $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ (oder $\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$) gegeben, sondern das *Schwerhauptträgheitstripel* und die diesem *zugehörigen Trägheitsmomente*, so findet man das Hauptträgheitstripel und die zugehörigen Hauptträgheitsmomente eines Punktes O folgenderweise:

Sind x, y, z die auf die Schwerhauptträgheitsaxen bezogenen Koordinaten von O, so sind die planaren Hauptträgheitsmomente $\mathfrak{A} = \mu\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{C} = \mu\mathfrak{c}^2$ des Punktes O in Übereinstimmung mit der in Nr. **13** gemachten Angabe die Wurzeln K_1, K_2, K_3 der kubischen Gleichung:

$$(63)\qquad \frac{\mu x^2}{K-A} + \frac{\mu y^2}{K-B} + \frac{\mu z^2}{K-C} = 1$$

(vgl. (40)), sodass

$$(64)\qquad \mathfrak{A} = K_1, \ \mathfrak{B} = K_2, \ \mathfrak{C} = K_3$$

ist[68]. Die Richtungskosinus a_i, b_i, c_i der zugehörigen Hauptträgheitsebenen, welche mit den zu O gehörigen Berührungsebenen der drei durch diesen Punkt gehenden konfokalen Flächen (40) übereinstimmen, ergeben sich aus der Proportion

$$(65)\qquad a_i : b_i : c_i = \frac{x}{K_i - A} : \frac{y}{K_i - B} : \frac{z}{K_i - C} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Das polare Trägheitsmoment J_O des Punktes O ist gleich dem Koeffizienten von $-K^2$ in Gleichung (63); durch Anwendung von (10) findet man dann sofort die axialen Hauptträgheitsmomente $\mathfrak{A}' = \mu\mathfrak{a}'^2$, $\mathfrak{B}' = \mu\mathfrak{b}'^2$, $\mathfrak{C}' = \mu\mathfrak{c}'^2$ von O.[69]

---

68) Man findet hiernach die Koordinaten x, y, z eines Punktes, dessen planare Hauptträgheitsmomente gegebene Werte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ haben, wenn man die Formeln berücksichtigt, welche die Cartesischen Koordinaten eines Punktes in Funktion seiner elliptischen Koordinaten geben. Man erhält 8 Punkte, die symmetrisch gegen die Koordinatenaxen liegen und deren Koordinaten den Gleichungen genügen:

$$x = \sqrt{\frac{(\mathfrak{A}-A)(\mathfrak{B}-A)(\mathfrak{C}-A)}{(B-A)(C-A)\mu}}, \qquad y = \sqrt{\frac{(\mathfrak{A}-B)(\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{C}-B)}{(C-B)(A-B)\mu}},$$

$$z = \sqrt{\frac{(\mathfrak{A}-C)(\mathfrak{B}-C)(\mathfrak{C}-C)}{(A-C)(B-C)\mu}}.$$

Vgl. *Somoff*, Mechanik 2, p. 89.

69) Die Betrachtungen dieser und der vorigen Nummer gelten auch dann,

Man bemerke noch, dass $A < B < C$ vorausgesetzt wurde und daher $A' > B' > C'$ ist (Nr. 9). Daher liegen für einen beliebigen Punkt die zugehörigen *planaren* Hauptträgheitsmomente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zwischen den Grenzen A, B, C, ∞ und die *axialen* Hauptträgheitsmomente $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ zwischen den Grenzen ∞, A', B', C' (*J. Binet*).

18. Der Trägheitskomplex eines Massensystems. Zu jeder Ebene $\varkappa$ gehört im allgemeinen *ein* Hauptpunkt (Nr. 9), (für den also $\varkappa$ eine Hauptträgheitsebene ist). Zu jedem Punkte P gehören im allgemeinen *drei* Hauptträgheitsaxen, welche paarweise die *drei* entsprechenden Hauptträgheitsebenen bestimmen und ein rechtwinkeliges Poldreikant des Antipolarsystems bilden; für jedes der sechs Elemente ist P der zugehörige Hauptpunkt (vgl. Nr. 9). Eine Gerade g dagegen ist dann und nur dann Hauptträgheitsaxe für einen ihrer Punkte, wenn sie den Antipol einer zu ihr normalen Ebene enthält[87]); sie gehört nämlich dann einem rechtwinkeligen Poldreikant oder, was dasselbe ist, einem *Binet*'schen konjugierten Haupttripel an (vgl. Nr. 11 u. 9). Der zugehörige Hauptpunkt wird dann der Durchschnitt der genannten Ebene mit g, und g steht in diesem Punkte auf einer der drei durch ihn gehenden konfokalen Flächen senkrecht. Damit ist jede Normale der konfokalen Flächenschar eine Hauptträgheitsaxe und zwar für den zugehörigen *Fusspunkt* als Hauptpunkt.

Man kann auch sagen[87]): Nur dann ist g eine Hauptträgheitsaxe, wenn sie ihre antipolare Gerade g' rechtwinkelig kreuzt oder schneidet. Dies ist aber genau die Definition, welche *Th. Reye* für eine (geometrische) „Axe" des Antipolarsystems aufgestellt hat. *Die Reye'schen Axen sind also einerseits geometrisch*[70]) *mit den Normalen des konfokalen Flächensystems, andererseits mechanisch mit den Hauptträgheitsaxen des Massensystems identisch.* Speziell liefert der (mit dem Antipolarsystem verknüpfte) *Reye'sche Axenkomplex* (vgl. IV 2, **31**, *Timerding*) die Gesamtheit der zu dem Massensystem gehörigen Hauptträgheitsaxen.

Die zahlreichen und bekannten[86]) Eigenschaften der Strahlen eines solchen Komplexes geben also ohne weiteres ebensoviele Eigenschaften der Hauptträgheitsaxen. Dieser Komplex nimmt daher (wie das Antipolarsystem selbst) beim Studium der Trägheitsmomente eine

---

wenn der Punkt O mit dem Schwerpunkte S zusammenfällt, sodass man damit eine andere, von der Fläche $\Phi = 0$ unabhängige, analytische Herleitung des *Culmann*'schen und der drei anderen Zentralflächen des Massensystems hat.

70) *Th. Reye*, Geometrie der Lage, 3. Aufl., Bd. 2, Leipzig 1892, p. 141, 152, 156.

zentrale Stelle ein und werde kurz als *Trägheitskomplex des Massensystems* bezeichnet (vgl. Nr. 21)[70a]).

19. Planare und axiale Hauptmomentenflächen. Die Schar der Strahlenkomplexe konstanten axialen Momentes. Jede Fläche $F(K)$ der konfokalen Schar (40) lässt sich als Ort der Punkte definieren, für welche eins der zugehörigen *planaren* Hauptträgheitsmomente J_e den konstanten Wert K hat (denn die Punkte sind Hauptpunkte der zugehörigen Tangentialebenen).

Betrachtet man also die Krümmungslinien, in denen sich zwei durch einen Punkt O gehende konfokale Flächen der Schar $F(K)$ und $F(K')$ schneiden, so ist die Tangente im Punkte O an diese Krümmungslinie Hauptträgheitsaxe für den Berührungspunkt und gleichzeitig ist das zugehörige Trägheitsmoment $J_g = K + K'$ für alle Tangenten der genannten Krümmungslinie dasselbe (*Binet*). Als Deviationsaxen aufgefasst sind (vgl. Nr. 15) die Tangenten ebenso Axen konstanten Parameters l.

Weiter sind auch die Normalen der konfokalen Fläche $F(K)$ längs eines sphärischen Kegelschnitts, in dem eine konzentrische Kugel die Fläche schneidet, als Hauptaxen ihres Fusspunktes P Axen konstanten Trägheitsmomentes J_g (weil in $J_g = J_o - J_e$, J_o und J_e konstant sind); und zwar ist $J_g = A' + \mu \overline{SP}^2 - K$.[71])

Der allgemeine Ort der Punkte P, für welche eins der zugehörigen *axialen* Hauptträgheitsmomente J_g einen konstanten Wert H hat, ist eine „biaxiale" Fläche vierter Ordnung $\Delta(H)$,[72]) deren Gleichung man leicht durch die Überlegung erhält, dass die zu P gehörige Hauptträgheitsaxe Normale in P an eine der drei durch diesen Punkt gehenden konfokalen Flächen ist. Für die zugehörige Tangentialebene ist $J_e = J_p - H$; andererseits ist nach (17) $J_p = J_p^{(s)} + \mu(x^2 + y^2 + z^2)$

70a) Der Trägheitskomplex ist auch mit dem *Reye*'schen Axenkomplex der *Culmann*'schen Zentralfläche identisch; daher sind seine Strahlen auch die Normalen der zu dieser Fläche konfokalen Flächenschar. Der Fusspunkt f einer dieser Normalen ist jetzt aber nicht mehr der zugehörige Hauptpunkt h, sondern diese Punkte zusammengenommen bestimmen auf der Normalen eine Strecke $\overline{fh}$, die von der zu ihr rechtwinkeligen Schwerebene halbiert wird.

71) Dieser Satz rührt von *W. Thomson* her. Vgl. *R. Townsend* (Cambr. and Dubl. Math. J. 2 (1847)), welcher bemerkt, dass diese Eigenschaft für die Theorie der *isochronen* Axen wichtig ist, d. h. derjenigen Axen, um die das Massensystem, der Schwerkraft unterworfen, Pendelschwingungen von derselben Zeitdauer ausführen würde, (Axen gleichen Momentes, die vom Schwerpunkte gleichweit entfernt sind, sind offenbar isochrone Axen).

72) *W. Thomson* (Cambr. and Dubl. Math. J. 1 (1846), p. 203) nennt die Fläche „equimomental surface".

und $J_p^{(s)} = A + B + C$. Für diesen Wert J_s des Parameters K folgt aus (40) und (63) die Gleichung

$$(66)\qquad \Delta(H) = \frac{\mu x^2}{\mu(x^2+y^2+z^2)+A'-H} + \frac{\mu y^2}{\mu(x^2+y^2+z^2)+B'-H} + \frac{\mu z^2}{\mu(x^2+y^2+z^2)+C'-H} - 1 = 0,$$[73])

die die verlangte Fläche darstellt. „Ist $P(x, y, z)$ irgend ein Punkt dieser Fläche und P_1 die orthogonale Projektion des Schwerpunkts S auf die Tangentialebene der Fläche $\Delta(H)$ in P, so wird $\overline{PP_1}$ die zu P gehörige Hauptträgheitsaxe mit dem Trägheitsmomente H".[74])

Variiert man H als einen Parameter, von C' anfangend bis ∞, so stellt die Gleichung (66) eine Schar von Flächen[75]) dar, die sich in drei Klassen gewissermassen konfokaler Flächen gruppieren, je nachdem der Wert von H zwischen C' und B' oder B' und A' oder A' und ∞ liegt. Jede Fläche der $\Delta(H)$-Schar hat (wie jede der $F(K)$-Schar) die drei Symmetrieebenen des Antipolarsystems ihrerseits zu Symmetrieebenen. Die Doppelpunkte aller Flächen $\Delta(H)$ erfüllen zwei Kegelschnitte[76]); es sind dies die Fokalkegelschnitte (β) und (γ) des Antipolarsystems (vgl. Nr. **16**).

Man betrachtet in der Optik Flächen desselben Charakters wie $\Delta(H)$, doch nur solche, bei denen die Fokalhyperbel den Ort der Doppelpunkte bildet. Die *Fresnel'sche Wellenfläche* für doppeltbrechende Medien[77]) ist hiernach eine solche $\Delta(H)$, die zu der letzten Klasse $(H > A')$ gehört.

---

73) Auch mit Hülfe dieser Gleichung lassen sich die axialen Hauptträgheitsmomente eines beliebigen Punktes (x, y, z) finden. Die Gleichung ist vom dritten Grade in H und ihre Wurzeln H_1, H_2, H_3 geben die gesuchten Werte (vgl. Nr. **17**).

74) *W. Thomson* (Cambr. and Dubl. Math. J. 1 (1846), p. 203). S. auch *Routh*, Dynamik 1, p. 50.

75) *W. Thomson* (vgl. Fussn. 73 u. 74) bezeichnet dieselben als „conjugate equimomental surfaces."

76) *A. Clebsch*, J. f. Math. 57 (1860), p. 73.

77) Diese Fläche 4. Ordnung konstruiert man bekanntlich in der Optik, indem man auf jedem Halbmesser g eines bestimmten Ellipsoids die Halbaxen des Kegelschnittes abträgt, in welchem die zu g senkrechte Diametralebene das Ellipsoid schneidet. Die Wichtigkeit dieser Wellenfläche auch für andere als optische Probleme ist bekannt. *MacCullagh* (Dublin Trans. 17 (1837), p. 243) nennt sie allgemein „biaxial surface", einerseits wegen der Erzeugungsart der Fläche, andererseits „the name perhaps may appear the more appropriate, at is reminds us of the place which the surface holds in the optical theory of *biaxial* crystals". Man vgl. auch *Townsend* (Cambr. and Dubl. Math. J. 2 (1847), p. 24), der ebenfalls diese Fläche betrachtet und u. a. auf Grund des *Thomson*'schen Theorems den Satz auf-

Die Gesamtheit der Geraden g (seien sie Hauptträgheitsaxen oder nicht), für welche das Trägheitsmoment J_g einen konstanten Wert λ hat, bildet einen *Painvin'schen* (quadratischen) *Strahlenkomplex*[78]), den wir kurz mit $(J_g)_\lambda$ bezeichnen. Da λ ∞^1 Werte annehmen kann, so wird jedem Schwersysteme — ausser dem *einen* Trägheitskomplex — noch eine ganze Schar solcher $(J_g)_\lambda$-Komplexe zugeordnet. Nimmt der Parameter λ den besonderen Wert H an, so wird der Trägheitskomplex des Massensystems von dem Komplexe $(J_g)_H$ in einer Kongruenz durchsetzt, deren Strahlen alle Hauptträgheitsaxen sind und alle dasselbe Trägheitsmoment H haben. Die zugehörigen Hauptpunkte erfüllen einerseits die Brennfläche dieser Kongruenz, andererseits die obige Fläche $\Delta(H)$. Beide Flächen sind also identisch, womit man eine neue Herleitung der Fläche $\Delta(H)$ hat. „Die $\Delta(H)$-Flächenschar lässt sich danach definieren als die Schar der Brennflächen aller Kongruenzen, die dem Trägheitskomplex und der Schar $(J_g)_\lambda$-Komplexe gemeinsam sind.“

20. Quadratische Momente bei ebenen und geradlinigen (allgemeinen) Massensystemen. Liegen alle Massenpunkte auf einer Ebene ϖ, wie dies für eine ebene begrenzte Fläche (oder ebene Kurve) stets der Fall ist, so liegt sowohl der Schwerpunkt S des Systems auf ϖ (vgl. Nr. 4 und 5), als auch der Antipol (das Zentrum zweiten Grades) jeder andern Ebene des Raumes. Das zu ϖ gehörige Trägheitsmoment J_ϖ wird natürlich Null. Damit reduziert sich die Ordnungsfläche Φ des Antipolarsystems, wenn man in Gleichung (36) den Wert $C = J_\varpi = 0$ einsetzt, auf

$$(36\text{a})\quad \begin{cases} \Phi = AU^2 + BV^2 + \mu T^2 = 0 \\ \text{oder} \\ \Phi = \dfrac{x^2}{A} + \dfrac{y^2}{B} + \dfrac{1}{\mu} = 0; \end{cases}$$

das Antipolarsystem selbst reduziert sich auf ein *ebenes in* ϖ $(z = 0)$

---

stellt: Alle diejenigen Hauptträgheitsaxen, welche für die Punkte, zu denen sie gehören, gleichzeitig Axen kleinster Oszillationsdauer sind, umhüllen eine Fläche und zwar gerade die biaxiale Fläche des *Mac Cullagh*'schen Ellipsoids.

78) *A. Demoulin* (Bull. Soc. math. de France 20 (1872), p. 130). Derselbe schreibt jedoch (p. 131 Note) das Theorem *G. Fouret* zu, der es schon einige Jahre vorher der math. Gesellschaft mündlich mitgeteilt habe. Der nach *Painvin* Nouv. ann. (2) 11 (1872), p. 49, 97, 202, 481, 529 benannte Komplex ist ein Spezialfall des Komplexes von *G. Battaglini* (Napoli Rendic. (1866)), p. 305. Jener besteht aus den Linien, in denen sich zwei normale Tangentialebenen einer Fläche zweiter Ordnung schneiden, dieser aus den Linien, von denen aus die Tangentialebenen an zwei gegebene Flächen zweiter Ordnung vier harmonische Ebenen bilden. Vgl. auch *A. Aschieri*, Giorn. di mat. 8 (1870), p. 35—37.

gelegenes Antipolarsystem. Alle Ebenen, die durch dieselbe Gerade p von ϖ gehen, haben sonach dasselbe Zentrum zweiten Grades P und darum kann der Punkt P in diesem Falle als Zentrum zweiten Grades oder *Antipol der Geraden* p selbst bezeichnet werden. Danach wird jeder Geraden p der Ebene des Massensystems ein Zentrum zweiten Grades (Antipol) zugeordnet, welches der Antipol aller durch sie hindurch gehenden Ebenen ist und mit ihrem Pol bezüglich des Kegelschnitts Φ zusammenfällt.

Die *Culmann*'sche Zentralfläche reduziert sich jetzt auf die *Culmann'sche Zentralkurve:*

$$\Phi^c = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - \frac{1}{\mu} = 0 \tag{37a}$$

und die *Binet*'sche Zentralfläche auf die reziproke Kurve

$$Ax^2 + By^2 - \mu = 0.$$

Ist Φ eine Hyperbel, so wird Φ^c die konjugierte Hyperbel; ist Φ eine reelle Ellipse, so wird die *Culmann*'sche Zentralkurve imaginär und umgekehrt. So bestimmt z. B. jede ebene begrenzte Fläche (oder Kurve) in ihrer Ebene ϖ ein Antipolarsystem ohne reelle Ordnungskurve und hat sonach eine *Culmann'sche Zentralellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{37'a}$$

wo a, b die Schwerhauptträgheitsradien der Figur sind (sodass $A = \mu a^2$, $B = \mu b^2$ die Schwerhauptträgheitsmomente) und μ den Inhalt der gegebenen Fläche (oder die rektifizierte Länge der Kurve) bezeichnet.

Da die linearen und quadratischen Momente für die Linien (und Punkte) der Ebene ϖ bezw. gleich den linearen und quadratischen Momenten für die durch sie gehenden und zu ϖ normalen Ebenen (und Axen) sind, so giebt die *Culmann*'sche Zentralkurve auch eine Darstellung der zu ihren Durchmessern gehörigen quadratischen Momente. Z. B. der Abstand des Schwerpunktes von einer Tangente dieses Kegelschnitts ist gleich dem Trägheitsradius für den zu ihr parallelen Durchmesser [52]); das Trägheitsmoment für einen Durchmesser σ des *Culmann*'schen Zentralkegelschnittes ist gleich dem Trägheitsmoment der in dem Endpunkte M des zu ihm konjugierten Halbmessers konzentrierten Gesamtmasse μ in Bezug auf den Durchmesser σ; ferner ist das Deviationsmoment für die beiden Durchmesser σ und σ' ebenfalls gleich dem Deviationsmoment der in M konzentrierten Gesamtmasse [53]).

Es gelten überhaupt im allgemeinen alle Formeln der Nr. **11** und **12** auch für das ebene Massensystem, und zwar gelten sie ebenso

für die Ebenen des Raumes wie für die Geraden der Ebene ϖ. Z. B. kann in der Formel

$$(31) \qquad J_\pi = \mu s_\pi p_\pi$$

π sowohl irgend eine Ebene des Raumes, als auch irgendeine in ϖ liegende Linie bedeuten; s_π, p_π sind dann die zugehörigen Abstände von den dort (Nr. **11**) genannten Punkten u. s. w.

Die Axen konstanten Trägheitsmomentes, die in der Ebene ϖ liegen, sowie die zu ϖ normalen Ebenen konstanten Momentes umhüllen die einzelnen Kurven der zum Antipolarsystem konfokalen Kegelschnittschar, deren Gleichung

$$\Phi = K(U^2 + V^2)$$

oder

$$(40\text{a}) \qquad \frac{x^2}{K-A} + \frac{y^2}{K-B} = \frac{1}{\mu}$$

ist. Die gemeinsamen Brennpunkte desselben sind die Brennpunkte φ und φ' des Antipolarsystems und bilden zusammen mit den Brennpunkten f und f' der *Culmann*'schen Zentralkurve die Ecken eines Quadrates.

In der Ebene ϖ des Massensystems ist jeder Punkt O der Mittelpunkt eines ihm zugeordneten *Culmann*'schen Trägheitskegelschnittes, dessen Gleichung auf die Hauptaxen von O bezogen die Gleichung (37a) ist, wo aber für A und B die zum Punkte O gehörigen Hauptträgheitsmomente $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einzusetzen sind. Diese Axen sind die Tangenten in O an die beiden durch diesen Punkt gehenden konfokalen Kegelschnitte (40a), sie sind also die Halbierungslinien des Winkels $\varphi O \varphi'$ und des zu ihm supplementären Winkels. Für die quadratischen Momente hat dieser Kegelschnitt bez. seiner Durchmesser dieselben Eigenschaften wie die *Culmann*'sche Zentralkurve bez. der in ϖ liegenden Schwerlinien.

Liegt eine ebene begrenzte Fläche (oder Kurve) oder allgemeiner ein ebenes *Schwersystem* vor, so wird für jeden Punkt O der Ebene ϖ die zugehörige Trägheitskurve eine *Ellipse*. Die Trägheitsellipsen für die Brennpunkte φ und φ' des Systems sind insbesondere zwei Kreise mit dem Halbmesser a, wenn in (37'a) $a > b$ ist.

Die *Mac Cullagh'sche Zentralfläche* (zur Darstellung der zum Schwerpunkt gehörigen *axialen* Trägheitsradien) nach Nr. **14** wird:

$$(44\text{a}) \qquad \Psi = \frac{x^2}{B} + \frac{y^2}{A} + \frac{z^2}{A+B} = \frac{1}{\mu}$$

und die konfokale Flächenschar der Flächen konstanten Momentes nach Nr. **13** wird:

(40b) $$\frac{x^2}{K-A} + \frac{y^2}{K-B} + \frac{z^2}{K} = \frac{1}{\mu};$$

aus welcher Gleichung mit Hülfe von (46) und für $\lambda = 0$ auch direkt (44a) folgt. Man sieht ferner, dass der Kegelschnitt Φ, dessen Gleichung für $K = C = 0$ aus (40b) folgt, eine der Fokalkurven der Schar ist: für alle Ebenen nämlich, die durch seine Tangenten gehen, ist das zugehörige J_e stets gleich Null. Die *Poinsot'sche Zentralfläche* wird dann (Nr. **14**)

$$Bx^2 + Ay^2 + (A + B)z^2 = \mu.$$

Für jeden Punkt O der Ebene ϖ erhält man die Gleichungen der vier ihm zugeordneten *Trägheitsflächen*, auf seine Hauptträgheitsaxen bezogen, indem man zu (37a) und (44a) noch die zu ihnen reziproken Gleichungen aufstellt und dann für A und B die zugehörigen Hauptträgheitsmomente $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einsetzt. Ist O dagegen *nicht* ein Punkt der Ebene ϖ, so geben die Gleichungen (37), (39), (44) und (47), in denen A, B und C durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ (Nr. **16** und **17**) ersetzt werden müssen, die dem Punkte O zugeordneten Trägheitsflächen.

Ist das Massensystem ein geradliniges, liegen also alle Massenpunkte auf einer Geraden l, so reduziert sich das Antipolarsystem auf eine einfache Punktinvolution $XX' \cdot S\infty$ auf l, deren Doppelpunkte (oder eventuell konjugierte und hinsichtlich des Schwerpunktes S symmetrische Punkte) die in zwei Bündel ausgeartete Fläche Φ (oder Φ^c) bilden; jedenfalls ist jeder Punkt X auf l der Antipol aller durch den konjugierten Punkt X' gehenden Ebenen und umgekehrt. Z. B. ist der Mittelpunkt einer homogenen Strecke $\overline{AB}$ zugleich deren Schwerpunkt S; und nimmt man auf ihr den Punkt A' so, dass $AA' = 2A'B$, so ist S das Zentrum und A, A' sind zwei konjugierte Elemente der zu $\overline{AB}$ gehörigen Involution, die damit bestimmt ist. Mit Hülfe derselben und der auch hier geltenden allgemeinen Formeln der Nr. **11** und **12** kann man dann sehr leicht alle quadratischen Momente der gegebenen Strecke berechnen.

21. Die historische Entwickelung der Lehre von den Trägheitsmomenten und Trägheitsflächen. Die Existenz der Hauptträgheitsaxen für Schwersysteme wurde von *L. Euler* (1749) zuerst bemerkt und von *J. A. Segner* (1755)[79] bewiesen. Dieser bewies, dass durch jeden Punkt P wenigstens drei Axen gehen, für die der Punkt P Hauptpunkt ist. *Euler*[80]) gab hierauf die Formeln, mit deren Hülfe

79) Specimen theoriae turbinum, Halae 1755.

80) Theoria motus 1765, p. 177, Nr. 452

man aus den *axialen* Hauptträgheitsmomenten eines Punktes P das Trägheitsmoment für irgend eine andere Axe durch den Punkt P ableiten kann. Beide Forscher betrachteten jedoch nicht die anderen Hauptträgheitsaxen, die durch den Punkt P gehen und die ihn nicht zum Hauptpunkt haben, überhaupt beschäftigten sie sich nicht allgemeiner mit der Verteilung dieser Axen im Raume.

Eine wesentliche Erweiterung erfuhr die Theorie durch *J. Binet* (1811)[81], der den allgemeineren Begriff des „Tripels konjugierter Axen“ einführte und die *planaren* Trägheitsmomente zuerst untersuchte. Er fand die konfokale Flächenschar und die Eigenschaften ihrer Krümmungslinien. Er zeigte, dass diese Flächen von den Ebenen konstanten Trägheitsmomentes umhüllt und von den Punkten erfüllt werden, für die eines der zugehörigen *planaren* Hauptträgheitsmomente einen gegebenen Wert hat. Er bemerkte weiter, dass die Fokalkegelschnitte die Örter der Punkte sind, für die zwei der Hauptträgheitsmomente gleich werden, und untersuchte gleichzeitig mit *S. D. Poisson*[63]) den besonderen Fall, in dem die konfokalen Flächen Rotationsflächen werden.

A. M. Ampère (1821)[82]) behielt den Namen Hauptträgheitsaxen nur für diejenigen Axen bei, welche sich auf den Schwerpunkt beziehen, und bezeichnete die anderen als *permanente Axen*. Er fand dann, dass die durch einen gegebenen Punkt P gehenden permanenten Axen auf einem gleichseitigen Kegel zweiten Grades liegen, während die Punkte, zu denen sie gehören, eine Raumkurve fünfter Ordnung mit einem dreifachen Punkt in P erfüllen, und dass, wenn der gegebene Hauptpunkt P einer Symmetrieebene angehört, der Kegel in die Symmetrieebene selbst und eine Normalebene derselben, die Raumkurve dagegen in einen Kreis[82']) und eine in der Symmetrieebene gelegene Kurve dritter Ordnung, die aus dem isolierten Doppelpunkt und einer Geraden besteht, zerfällt. Jede dieser Normalebenen ist zugleich Normalebene in P eines Kegelschnittes aus einer gewissen Schar in der Symmetrieebene gelegener homothetischer Kegelschnitte. In einer der Symmetrieebenen liegen zwei derartige homothetische Scharen, deren erste die Fokalhyperbel des Antipolarsystems und deren zweite die Fokalhyperbel der *Culmann*'schen Zentralfläche ent-

---

81) J. éc. polyt. 16 (1813).

82) Paris, Mém. de l'Institut 5 (1826), p. 86.

82') Für die Punkte P der Fokalhyperbel und der Fokalellipse des Antipolarsystems reduziert sich der Kreis auf einen Punkt (den Punkt P selbst); *Ampère* nennt diese beiden Kegelschnitte bezw. „hyperbole principale“ und „ellipse principale“, l. c. p. 139.

hält; in jeder der beiden anderen Symmetrieebenen liegt dagegen nur eine solche Schar, und zwar gehören die Fokalellipse des Antipolarsystems und die Fokalellipse der *Culmann*'schen Zentralfläche diesen beiden Scharen beziehungsweise an[82]).

Die Theorie der konfokalen Flächen und ihrer Fokalkurven erweiterte *M. Chasles* (1837)[83]), welcher insbesondere die Verteilung der Normalen dieser Flächen im Raume studierte. Er gab unter andern den Satz, dass die in einer Ebene gelegenen Normalen im allgemeinen einen (zu dem *Ampère*'schen Kegel antipolaren) Kegelschnitt, und zwar, wie *R. Townsend* (1847) fand, eine Parabel umhüllen, und brachte systematische Ordnung in die Theorie. Seine zunächst nur von geometrischen Gesichtspunkten geleiteten Untersuchungen, welche aber eine leicht ersichtliche Anwendung auf die Theorie der Hauptträgheitsaxen findet, erhielten ihre Ergänzung in den Untersuchungen von *Mac Cullagh* (1844), *W. Thomson* (1846), *A. Cayley* (1846) und *Townsend* (1846, 47)[84]) und *Hâton de la Goupillière* (1857)[89]).

Ein weiterer Schritt von entscheidender Wichtigkeit ergab sich aus anderen Untersuchungen rein geometrischer Natur. Indem *Th. Reye*[85]) sich die neuen Ideen der *J. Plücker*'chen Liniengeometrie zu eigen machte und das bereits zusammengetragene Material benutzte — ein reiches, aber systemlos angehäuftes und von verschiedenen Gesichtspunkten aus gewonnenes Material teils mechanischen teils geometrischen Charakters — studierte er (1868) zum erstenmale den *Axenkomplex* einer Fläche zweiten Grades und des zugehörigen Polarsystems und gab dessen vollständige Theorie. Später definierte er dann den Axenkomplex unabhängig von der anfänglich zu Grunde gelegten Fläche zweiten Grades und zeigte, dass konfokale Flächen und ausserdem alle zu diesen konzentrischen und homothetischen Flächen denselben Axenkomplex liefern u. s. w. Indem der *Reye*'sche Axenkomplex des zu einem Massensystem gehörigen Antipolarsystems aber zugleich der Trägheitskomplex des Massensystems ist, ergeben sich mit seiner Hülfe alle früher gewonnenen Resultate über die Hauptträgheitsaxen als einfache Korollare, dazu aber eine Reihe wichtiger Ergänzungen und neuer Sätze, und zwar nicht nur für Schwersysteme, die allein von allen bisher citierten Autoren berücksichtigt waren, sondern auch für allgemeine Massensysteme. Berücksichtigt man schliesslich, dass *auf Grund der in Nr.* 11 *vorangestellten Schwerpunktsidee* die Definition

83) Aperçu historique, Note XXXI.

84) Cambr. and Dubl. Math. J. 1, 2 (1846, 1847).

85) Geometrie der Lage, 3. Aufl, Bd. 2, p. 138—177.

des einem Massensysteme zugehörigen Antipolarsystems, — durch das in einfacher Weise die Schar der konfokalen Flächen zweiten Grades sowie der Trägheitskomplex bestimmt wird, — überaus leicht ist, so darf man nunmehr den Wunsch von *Chasles*[86]) und *Cayley*[87]), auf Grund *eines* fundamentalen Begriffs eine logische und systematische Herleitung aller Theoreme über die quadratischen Momente zu gewinnen, als erfüllt ansehen.

Zur Orientierung über die verschiedenen in der Litteratur vorkommenden Benennungen der von uns sog. Zentral- und Trägheitsflächen mögen noch folgende Angaben dienen:

Binet[88]) (1811) hatte zum erstenmale die einem Punkte zugehörigen planaren Trägheitsmomente mit Hülfe eines Ellipsoids repräsentiert, aber das von *Binet* benutzte Ellipsoid ist nicht das oben (nach *W. Schell*) als *Binet*'sches Ellipsoid bezeichnete, sondern ein zu dem *Culmann*'schen Ellipsoid (auf das auch *Hâton de la Goupillière* (1857)[89]) gekommen war) ähnliches Ellipsoid (Verhältnis $\sqrt{\mu : 1}$). Zu dem von *Binet* betrachteten Ellipsoid reziprok ist die Fläche, die *Thomson*[90]) „the ordinary ellipsoid of construction", *Cayley*[91]) „the comomental ellipsoid" und *J. Somoff*[92]) „das Grundellipsoid" nennt[93]). Im Anschluss an *Binet* repräsentierte *Cauchy* (1827)[94]) die axialen Trägheitsmomente eines Punktes ebenfalls durch ein Ellipsoid. Dieses *Cauchy*'sche Ellipsoid, das *Mac Cullagh*, *Thomson*, *Townsend* und anderen als „the momental ellipsoid" bekannt war, ist homothetisch zu dem von uns (47') als *Poinsot*'sches Ellipsoid bezeichneten. Es wurde von *Poinsot*[95]) „ellipsoïde central" genannt und von ihm (1834) in seinen schönen Untersuchungen über die Drehung der Körper verwertet. Das *Mac Cullagh*'sche Centralellipsoid Ψ (44') hat *Mac Cullagh* (1844)[96]) als „the ellipsoid of gyration" eingeführt und zur Untersuchung der Rotation eines Körpers benutzt; *Thomson* (1846)[90]) hat es seinerseits als „the central ellipsoid"

86) Aperçu historique, p. 397 und Noten zu p. 220, 221.

87) Brit. Assoc. Report 1862, p. 227.

88) J. éc. polyt. 16 (1813), p. 64.

89) J. éc. polyt. 37 (1857), § 20.

90) Cambr. and Dubl. Math. J. 1 (1846), p. 201, 202.

91) Brit. Assoc. Report 1862, p. 143.

92) Theoret. Mechanik 2, p. 79.

93) S. auch *D. Chelini*, Bol. Mem. (2) 5 (1865), p. 144 ff. und *F. P. Ruffini*, Bol. Mem. (4) 3 (1881), p. 25.

94) Oeuvres (2) 7, p. 127.

95) J. de math. 16 (1851), p. 74.

96) *S. Haughton*'s Account of Prof. *Mac Cullagh*'s Lectures on rotation in Dubl. Trans. 22 (1849), p. 149.

und *A. Clebsch* als „das 2te Zentralellipsoid" wiedergefunden. Die analoge Fläche für einen beliebigen Punkt, die wir als *Mac Cullagh*sches Trägheitsellipsoid bezeichnet haben, wurde von *Townsend* (1846; 1847)[97]) und später von *A. Clebsch* (1859)[98]) eingehend studiert.

22. Quadratisch äquivalente Massensysteme. Zwei Massensysteme heissen äquivalent hinsichtlich ihrer Trägheitsmomente[99]), wenn ihre Trägheitsmomente für jede Ebene des Raumes gleichen Wert haben[118]). Dann werden auch ihre Trägheitsmomente für jeden Punkt und jede Axe gleich und ebenso auch ihre Deviationsmomente für jedes Ebenenpaar. Für allgemeine Massensysteme sind die Bedingungen hierfür die Gleichheit ihrer Gesamtmassen und die Übereinstimmung ihrer Antipolarsysteme. Die Massensysteme sind dann von selbst auch hinsichtlich der statischen Momente äquivalent und ebenso gehört zu ihnen derselbe Schwerpunkt, dieselbe konfokale Flächenschar und derselbe Trägheitskomplex.

Jedes *nicht indifferente* Massensystem ist sechsfach unendlich vielen Quadrupeln von Massenpunkten äquivalent. Die Punkte eines solchen äquivalenten Quadrupels bilden einfach die Ecken eines beliebigen Antipoltetraeders des vorgelegten Massensystems[100]). Sind h_1, h_2, h_3, h_4 die Höhen des Tetraeders, s_1, s_2, s_3, s_4 die Abstände des Schwerpunktes von seinen Seitenflächen, so bestimmen sich für ein *allgemeines* System die Massen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ der vier Eckpunkte aus den Gleichungen:

$$(67) \qquad \mu_1 h_1 = \mu s_1, \quad \mu_2 h_2 = \mu s_2, \quad \mu_3 h_3 = \mu s_3, \quad \mu_4 h_4 = \mu s_4.$$

Für ein *magnetisches* Massensystem ($\mu = 0$, $q \neq 0$) treten an die Stelle dieser Gleichungen die folgenden:

$$(67') \qquad \mu_1 h_1 = q, \quad \mu_2 h_2 = q, \quad \mu_3 h_3 = q, \quad \mu_4 h_4 = q,$$

97) Cambr. and Dubl. Math. J. 1, 2 (1846, 1847).

98) J. f. Math. 57 (1860), p. 73. *Clebsch* scheint wie auch *Thomson* die Arbeit von *Mac Cullagh* nicht gekannt zu haben.

99) *Reye*, J. f. Math. 72 (1870), Art. 13.; *Routh*, Dynamik 1, § 33. Abgesehen von der Bezeichnung findet sich der Begriff der Äquivalenz von Körpern zuerst (1811) bei *Binet* (J. éc. polyt. 16 (1813) § 13) und später bei *Legendre* (1817) (vgl. Fussn. 103). Die ersten Reduktionen eines Körpers auf äquivalente Gruppen von Massenpunkten haben aber erst *Sylvester* (1864) (vgl. Fussn. 105). *Routh* (1864) und *Reye* (1865) (vgl. Fussn. 100) gegeben.

100) *Reye*, J. f. Math. 72 (1870), § 5; für Schwersysteme bereits in der Zeitschr. f. Math. Phys. 10 (1865). Die Zurückführung des Dreiecks auf drei äquivalente Massenpunkte mit gleicher Masse gab zum erstenmale *Routh*, Quart. J. of math. 6 (1864), p. 267—269.

wo die Höhen in der Richtung der magnetischen Axe gemessen sind und wo q deren skalaren Wert wie in (31') bezeichnet.

Das *indifferente* Massensystem ist dagegen unendlich vielen Quintupeln von Massenpunkten mit der Gesamtmasse Null äquivalent.

Für ein *Schwersystem* giebt es immer unendlich viele äquivalente Quadrupel von Massenpunkten mit gleicher Masse $\frac{1}{4}\mu$. Die Tetraeder, die diese Quadrupel bilden, sind einem Ellipsoide Φ_1 umschrieben und einem anderen Φ_2 einbeschrieben. Diese Ellipsoide sind mit dem *Culmann*'schen Centralellipsoid Φ^c konzentrisch und homothetisch. Ihre Axen gehen aus denen des letzteren durch Division und Multiplikation mit $\sqrt{3}$ hervor. Alle diese Tetraeder sind von gleichem Volumen und die Tetraeder vom grössten Volumen, die sich dem Ellipsoide Φ_1 umschreiben lassen[101]).

Jedes Schwersystem lässt sich ferner auf ein äquivalentes Sextupel von Punkten gleicher Masse $\frac{1}{6}\mu$ zurückführen. Diese Punkte bilden die Endpunkte eines beliebigen Tripels von konjugierten Durchmessern des Ellipsoides Φ_2.

Diese Sätze lassen sich mit Hülfe einer affinen Transformation des Raumes (durch welche die Äquivalenz zweier Massensysteme nicht gestört wird[102])) sofort aus den analogen Sätzen für ein Massensystem, dessen Centralfläche eine Kugel vom Radius a ist, herleiten. Berücksichtigt man, dass ein solches Massensystem immer einer homogen mit Masse erfüllten Kugel äquivalent ist, deren Radius $= \sqrt{5}\cdot a$, so folgt weiter, dass jedes beliebige Massensystem mit lauter positiven Massen einem homogenen Ellipsoid äquivalent ist. Dieses Ellipsoid ist konzentrisch und homothetisch mit dem *Culmann*'schen Zentralellipsoid und geht aus demselben hervor, indem man dessen lineare Dimensionen im Verhältnisse $\sqrt{5}:1$ vergrössert. Dieses ist das *Legendre*'sche Ellipsoid[103]). Für ein beliebiges homogenes Tetraeder fällt dasselbe mit dem *Culmann*'schen Ellipsoid von vier gleichen Massen $\frac{\mu}{4}$, die in den Ecken des Tetraeders konzentriert sind, zusammen.

Es ist aber auch jedes Schwersystem einem homogenen Tetraeder äquivalent. Hat man nämlich ein Quadrupel von vier diskreten Massenpunkten gleicher Masse gefunden, denen das Massensystem äquivalent

---

101) Über diese Tetraeder von grösstem Volumen s. *J. Liouville,* J. de math. 7 (1842), p. 190; *J. Steiner,* J. f. Math. 30 (1846), p. 275 = Ges. Werke 2, p. 343 ff.; *C. F. Geiser,* Ist. Lomb. Rend. (2) 1 (1868), Art. 1.

102) *Routh,* Dynamik 1, p. 30, § 41.

103) *A. M. Legendre,* Traité des fonctions elliptiques 1 (Paris 1825), Nr. 368. Vgl. auch *Routh,* Dynamik 1, § 29.

ist, so verbinde man den Schwerpunkt S mit diesen vier Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 und vergrössere die Strecken SA_1, SA_2, SA_3, SA_4 im Verhältnis $\sqrt{5}:1$, so bilden die Endpunkte A_1', A_2', A_3', A_4' der neuen Strecken $SA_1', SA_2', SA_3', SA_4'$ die Ecken eines homogenen Tetraeders, das dem vorgelegten Massensystem äquivalent ist. Hiermit ist gleichzeitig gesagt, wie man ein gegebenes homogenes Tetraeder durch vier Massenpunkte von gleicher Masse $\frac{\mu}{4}$ ersetzen kann[104]. Das Tetraeder ist ferner äquivalent[105] fünf Massenpunkten, von denen vier seine Ecken mit den Massen $\frac{\mu}{20}$ sind und der fünfte sein Schwerpunkt mit der Masse $\frac{4}{5}\mu$.[106]

III. Anhang zur Theorie der linearen und quadratischen Momente.

23. Lineare und quadratische Momente kontinuierlicher Systeme. Der Kern einer kontinuierlichen Figur. Für die praktische Anwendung besonders wichtig sind der Schwerpunkt, die linearen und die Trägheitsmomente *kontinuierlicher* Körper (oder Flächen); dieselben bedürfen deswegen einer besonderen Erwähnung.

Die früher eingeführten Koeffizienten sind (vgl. Nr. **11**) durch die über den ganzen Körper erstreckten Integralausdrücke definiert:

$$(68)\qquad A_{11}=\int x^2 d\tau,\quad A_{22}=\int y^2 d\tau,\quad A_{33}=\int z^2 d\tau,$$

$$A_{23}=A_{32}=\int yz\,d\tau,\quad A_{31}=A_{13}=\int zx\,d\tau,\quad A_{12}=A_{21}=\int xy\,d\tau,$$

$$A_1=\int x\,d\tau,\quad A_2=\int y\,d\tau,\quad A_3=\int z\,d\tau,\quad \mu=\int d\tau,$$

wo $d\tau$ die Masse des Körperelementes und μ die Gesamtmasse ist. Im übrigen bleiben die weiteren Entwickelungen unverändert bestehen. Es tritt nur ein neuer Begriff hinzu, der bei einem diskreten Massen-

104) Hieraus geht gleichzeitig hervor, wie sich ein homogenes Polyeder (oder Polygon und auch eine homogene Polygonallinie), indem man es in Tetraeder (oder Dreiecke und Strecken) zerlegt, durch ein äquivalentes System diskreter Massenpunkte ersetzen lässt. Hieraus (vgl. auch Fussn. 105) leitet sich eine Methode ab, um die Trägheitsmomente für gewisse Körper, Flächen und gebrochene Linien zu berechnen (vgl. Nr. **24**, a).

105) Diese Zurückführung des Tetraeders auf eine äquivalente Gruppe von fünf Massenpunkten gab zuerst *J. Sylvester,* Quart. J. of math. 6 (1864), p. 131.

106) Andere Beispiele für derartige Reduktionen finden sich bei *Routh* (1868); vgl. Dynamik 1; *Reye,* Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ingenieure 19 (1875); *R. Mehmke,* Zeitschr. Math. Phys. 29 (1884), p. 61.

system nicht in Betracht kommt, nämlich der Begriff des *Kerns*[107]). Hierunter versteht man die geschlossene Fläche, die der Ort der Antipole aller jener Ebenen ist, welche den Körper berühren, ohne ihn aber zu durchdringen. Der Kern umschliesst den Schwerpunkt S des Körpers, sowie jeden anderen Punkt, von dessen Antipolarebene der Körper nicht getroffen wird. Ist P irgend ein Punkt auf ihm, r sein Abstand vom Schwerpunkte, und v der Schwerpunktsabstand des Punktes, in dem die Linie SP die zu P (als Antipolarebene) gehörende Berührungsebene π des Körpers schneidet, so wird das Trägheitsmoment für die parallel zu π gelegte Schwerebene:

$$(69) \qquad J = rvV \quad \text{oder} \quad \frac{J}{v} = rV,$$

wenn V das Volumen des Körpers bezeichnet.

Genau analog ist der Kern für eine ebene Fläche definiert, nur dass hier der Flächeninhalt F an Stelle des Volumens tritt. Man denke sich die vorgelegte ebene Fläche als einen beliebigen normalen Querschnitt eines geraden Balkens; ist dann die Schwerlinie f die Neutralaxe dieses Querschnittes und J_f das zugehörige Trägheitsmoment, so ist

$$(69\text{a}) \qquad v = \frac{J_f}{v} = F \cdot r.$$ [108])

Bezieht sich nun der Schwerpunktsabstand v auf die *entferntere* der beiden zu f parallelen Berührungslinien des Querschnitts, und ist also r (d. h. SP) der *kürzere* auf der zu f konjugierten Schwerlinie liegende Kernradius, so wird diese Grösse v (wegen der Anwendung dieser Theorie in der Festigkeitslehre) nach *F. Reuleaux* als der *Widerstandsmodul* des Querschnittes für die Neutralaxe f bezeichnet.

Der Kern ist ein wichtiges Hülfsmittel, um auf graphischem

---

107) *Culmann*, Graphische Statik 1866, § 65 und für ebene Figuren *M. Bresse*, Mécanique 1866, p. 53. Letzterer geht abweichend von *Culmann* direkt darauf aus, den Kern verschiedener einfacher Figuren zu bestimmen, indem er sich auf den von ihm gefundenen Satz stützt: Ist a die Schnittlinie der nicht parallelen Grundflächen eines zylindrischen Körpers, so fällt die parallel zu den Seitenlinien (des Zylinders) genommene Projektion A des Schwerpunktes dieses Körpers, auf eine Grundfläche, mit dem Antipol der Linie a in Bezug auf dieselbe Grundfläche, wenn man dieselbe als ein homogenes, kontinuierliches ebenes Massensystem ansieht, zusammen. Die Methode von *Bresse* wurde von *G. Jung* in seinen Vorlesungen über graphische Statik systematisch verwertet, indem er hiernach direkt den Kern und das Antipolarsystem für eine Reihe ebener Figuren ermittelte.

108) *W. Ritter* (Civiling. (2) 22 (1876), p. 309); *G. Jung* (Ist. Lomb. Rendic. (2) 9 (1876), p. 647) und *A. Sayno* (ibid., p. 733).

Wege die Probleme, welche die Trägheits- und Deviationsmomente betreffen, zu lösen[109]).

In affinen Figuren sind die Antipolarsysteme und damit auch die Kerne affin. So folgt aus dem Kerne eines Quadrates, eines Kreises und einer Kugel der Kern eines Parallelogramms, einer Ellipse und eines Ellipsoids u. s. w. Für ähnliche Figuren ergiebt sich

$$J' = \lambda^n \cdot J, \quad v' = \lambda \cdot v, \quad \text{also} \quad v' = \lambda^{n-1} \cdot v,$$

indem sich die accentlosen Buchstaben auf die erste, die mit Accenten versehenen auf die zweite Figur beziehen, ferner λ das lineare Vergrösserungsverhältnis bedeutet und $n = 5$ für einen Körper, $n = 4$ für einen Querschnitt und $n = 3$ für einen Bogen zu nehmen ist.

Besteht ein Massensystem aus mehreren Körpern $1, 2, \ldots, n$, die einzeln die konstanten Dichtigkeiten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ und die Volumina $V_1, V_2, \ldots, V_n$ besitzen, so findet man zunächst den Schwerpunkt S des Massensystems, indem man in dem Schwerpunkte S_i eines jeden der n Körper dessen gesamte Masse konzentriert und von diesen Massenpunkten den Schwerpunkt sucht. Ist ferner π eine Ebene, die durch keinen der Schwerpunkte S_i und auch nicht durch den Schwerpunkt S geht, und seien P_i die Antipole dieser Ebene bezw. der einzelnen Körper, so verbinde man diese Antipole mit den Schwerpunkten S_i und bezeichne mit $s_\pi^{(i)}$ und $p_\pi^{(i)}$ die auf einer Normalen zu π gemessenen Stücke, welche die Ebene π auf diesen Linien einmal von S_i und das andere Mal von P_i aus abschneidet. Giebt man dann den Punkten P_i die Massen $\varrho_i V_i s_\pi^{(i)}$, so ist der Schwerpunkt dieser Massenpunkte der Antipol P der Ebene π für das Gesamtsystem (vgl. Nr. **11** u. **5**). Gleichzeitig wird (Nr. **11**) das Trägheitsmoment für die Ebene π

$$J_\pi = \sum \varrho_i V_i s_\pi^{(i)} p_\pi^{(i)} = \mu s_\pi p_\pi, \tag{70}$$

wenn $\mu = \sum \varrho_i V_i$ die Gesamtmasse des Systems ist und s_π und p_π die Abstände der Punkte S und P von der Ebene π, gemessen auf einer Normalen zu π, bedeuten. Für die parallel zu π durch den Schwerpunkt S gelegte Ebene σ wird das Trägheitsmoment

$$J_\sigma = \mu \cdot s_\pi (p_\pi - s_\pi) = \mu s_\pi p_\sigma. \tag{70'}$$

Schliesslich wird für eine Ebene π, die den Schwerpunkt nicht enthält, und eine zweite ganz beliebige Ebene π' das Deviationsmoment $D_{\pi, \pi'}$ durch den Ausdruck dargestellt (Nr. **11**):

$$D_{\pi', \pi} = \sum \varrho_i V_i s_\pi^{(i)} p_{\pi'}^{(i)} = \mu s_\pi p_{\pi'}. \tag{71}$$

109) *G. Jung* (Ist. Lomb. Rendic. (2) 9 (1876), p. 600, 647; Brit. Assoc. Report 1876, p. 23—26, London 1877; Amtl. Bericht d. Ver. deutsch. Naturf. u. Ärzte München 1877, p. 98). Näheres hierüber in IV 5, 23 (*Henneberg*).

Die einzelnen hier betrachteten Körper $1, \ldots, n$ können natürlich auch Teile eines und desselben Körpers sein; und hieraus leitet sich eine Methode (*Zerlegungsprozess*) ab, die Berechnung der Trägheitsmomente für einen Körper auf die Betrachtung einfacherer Körper zurückzuführen, in die sich der vorgelegte Körper zerlegen lässt. Die Methode gilt auch für Flächen und Bögen (vgl. Nr. 24, a).

24. Die Auswertung linearer und quadratischer Momente für Schwersysteme. Es seien im folgenden einige Methoden zur Bestimmung des Schwerpunkts, der quadratischen Momente und des Antipolarsystems eines vorgelegten Schwersystems aufgeführt.

a) *Substitutionsmethoden*: Das Schwersystem wird durch einfachere Systeme entweder durch den *Zerlegungsprozess* (vgl. Nr. 23 Ende und Nr. 5) oder durch *Reduktion auf ein quadratisch äquivalentes System* (vgl. Nr. 22) ersetzt oder endlich durch beide Prozesse zusammen[104]. In dem einen wie anderen Falle kann die Rechnung analytisch oder graphisch erfolgen.

b) *Analytische Methoden:* Und zwar:

α. Kennt man das Schwerhauptträgheitstripel, so erfordert die Festlegung des *Culmann*'schen Zentralellipsoid (Formel (37) und (37')) die Bestimmung der drei Konstanten A, B, C. Sind Ω_x, Ω_y, Ω_z die Flächeninhalte der Schnitte des Systems mit den drei durch einen Punkt x, y, z gehenden und mit den Hauptträgheitsebenen parallelen Ebenen, so ergeben sich die drei Konstanten einfach — wenn ϱ die Dichte in dem Punkte x, y, z ist — aus den Formeln:

$$A = \int \varrho x^2 \Omega_x dx, \quad B = \int \varrho y^2 \Omega_y dy, \quad C = \int \varrho z^2 \Omega_z dz,$$

womit man die zugehörigen planaren Trägheitsradien aus den Beziehungen:

$$a^2 \cdot \mu = A, \quad b^2 \cdot \mu = B, \quad c^2 \cdot \mu = C\text{[110]}$$

erhält.

Das *Culmann*'sche Zentralellipsoid bestimmt dann in einfacher Weise das Antipolarsystem, das seinerseits wieder die quadratischen Momente J_p, J_ε, J_g in Bezug auf alle Punkte, Ebenen und Geraden des Raumes giebt.

β. In derselben Weise verfährt man, wenn an Stelle des Schwerhauptträgheitstripels ein anderes *Binet*'sches konjugiertes Tripel des Schwerpunktes bekannt ist, denn die Formeln des *Culmann*'schen Zentralellipsoids bleiben dieselbe. Die Hauptträgheitsaxen des Schwerpunktes werden dann durch die Axen des Ellipsoids bestimmt.

110) Vgl. *W. Schell*, Theorie der Bewegung 1, p. 129—130.

γ. In vielen Fällen gelingt es nun, ein solches *Binet*'sches Tripel und damit den Schwerpunkt des Systems auf Grund folgenden Theorems zu finden: Enthält eine Gerade g einer homogenen körperlichen oder ebenen Figur die Schwerpunkte aller Querschnitte, die parallel zu derselben Schwerebene σ gelegt sind, so enthält sie den Schwerpunkt S der Figur (Nr. 5) und zwar ist g der konjugierte Durchmesser zu σ in dem durch das System bestimmten Antipolarsystem (*Binet*); und umgekehrt: Halbiert eine Ebene σ alle Geraden eines homogenen Systems, die derselben Schwergeraden g parallel sind, so enthält sie den Schwerpunkt S des Systems (Nr. 5) und σ ist gerade die zu g in demselben Antipolarsystem konjugierte Diametralebene. Damit ist in einem homogenen System jede Symmetrieebene oder -axe eine Schwerhauptträgheitsebene oder -axe. Dieses gilt auch noch für ein nichthomogenes System, wenn in den symmetrisch gelegenen Punkten die Dichte dieselbe ist.

δ. In dem allgemeinen Falle wird für die Anwendung der Formeln (51') oder (51) (in denen man, wenn das Antipolarsystem verlangt wird, den Punkt O mit dem Schwerpunkt zusammenfallen lasse und ausserdem noch die in der Fussn. 61 angegebene Substitution ausgeführt denke) die Bestimmung von sechs Konstanten ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$) erfordert, die sich aber sehr selten analytisch ausführen lässt.

ε. Die Trägheitsmomente für dünne Schichten und Flächen kann man durch Differentiation aus bekannten Trägheitsmomenten für körperliche Figuren ableiten; analogerweise die für dünne Flächenringe und Linien aus Trägheitsmomenten für Flächen[111]).

Die analytische Bestimmung des Schwerpunkts erfolgt durch die direkte Anwendung der Formel (3a).

c) *Geometrische Methoden:* Ausser den *Ähnlichkeits-* und *Affinitätstransformationen*[112]) (Nr. 8 u. 23) ist zur Erleichterung der Bestimmung der Trägheitsmomente oft die *Transformation durch reziproke Radien* (oder *Inversion* in Bezug auf ein Zentrum O) von Vorteil. Es gelten folgende Sätze:

Sind ϱ und ϱ' die Dichten, r und r' die Radiivektoren zweier

---

111) Vgl. *W. Schell*, Theorie der Bewegung 1, p. 142 und *J. Somoff*, Mechanik 2, p. 92.

112) Für das *direkte* Problem (Bestimmung des Trägheitsmomentes einer gegebenen Figur) vgl. Beispiele bei *W. Schell*, Theorie der Bewegung 1, p. 134 ff., für das *indirekte* Problem (gegeben das Trägheitsmoment, oder der Widerstandsmodul (Nr. 28), Konstruktion der Figur unter gegebenen anderen Bedingungen) vgl. *G. Jung*, Ist. Lomb. Rend. (2) 9 (1876), p. 388; 513—597; „Il Politecnico" 24 (1876); Brit. Assoc. Rep. 1876, p. 21—23, London 1877.

sich entsprechenden Punkte der inversen Figuren in Bezug auf ein willkürliches Zentrum (sodass $rr' = \varkappa^2 = \text{const.}$) und ist

$$\varrho' = \varrho\left(\frac{\varkappa}{r'}\right)^n,$$

so haben die beiden Figuren gleiche Trägheitsmomente in Bezug auf alle Geraden durch O. Dabei ist $n = 10$, 8 oder 6, je nachdem die Figur ein Volumen, eine Fläche oder ein Bogen ist. Die beiden Figuren haben auch dieselben Haupttträgheitsaxen durch O.

Sind ferner J_p und $J_{p'}$ die polaren Trägheitsmomente der beiden Systeme in Bezug auf zwei inverse Punkte P und P', so gilt

$$J_{p'} = \left(\frac{\varkappa}{OP}\right)^2 \cdot J_p = \frac{OP'}{OP} \cdot J_p;$$

die Berechnung des polaren Momentes für ein System folgt also in einfachster Weise aus der des inversen Systems. Dabei ist wieder $\varrho' = \varrho\left(\frac{\varkappa}{r'}\right)^n$ angenommen, wo $n = 8$, 6 oder 4 ist, je nachdem das System ein Volumen, eine Fläche oder ein Bogen ist (*Thomson*)[112a]).

d) *Graphische Methoden:* Es sind dies Approximationsmethoden, die besonders wegen ihrer sehr grossen Allgemeinheit vorteilhaft sind. Sie sind, in erster Linie für *ebene Systeme*, bei allen Problemen anwendbar, bei denen das Vorkommen empirischer Koeffizienten die Approximation rechtfertigt. Die Technik bietet sehr häufig derartige Probleme. Im übrigen vgl. hierfür das Referat IV 5 (*Henneberg*).

e) *Experimentelle Methoden:* Ist der gegebene Körper sowohl seiner Form wie auch Dichtigkeitsverteilung nach irregulär, so versagen die bisher genannten Methoden. Man greift dann auf das Experiment zurück:

Wenn möglich lässt man den Körper um eine beliebige horizontale Axe g' pendeln und berechnet mit den bekannten Grössen (Masse μ, Gewicht p, experimentell bestimmte Entfernung d des Schwerpunktes S von der Axe g', beobachtete halbe Schwingungsdauer t) aus der Formel

$$J_g = \frac{p \cdot d \cdot t^2}{\pi^2} - \mu d^2$$

das Trägheitsmoment in Bezug auf die zu g' parallele Schwergrade g.[113])

Man kann aber auch den Körper auf einem Pendel von bekannter Masse befestigen, dessen Trägheitsmoment in Bezug auf eine horizontale Axe man vorher durch Beobachtung bestimmt hat. Bestimmt

---

112a) Vgl. *E. J. Routh*, Dynamik 1, p. 34.

113) Vgl. *R. Townsend*, Cambr. and Dubl. Math. J. 2 (1847), p. 26; siehe auch *E. J. Routh*, Dynamik 1, p. 81.

man dann von neuem experimentell die Schwingungsdauer, so kann man das Trägheitsmoment des ganzen Systems finden und daraus dann das des gegebenen, vorausgesetzt ist dabei, dass man deren Masse kennt[114]).

Wiederholt man das Experiment genügend oft, so bestimmt sich das *Mac Cullagh*'sche Zentralellipsoid aus den gefundenen Werten $\frac{J_g}{\mu}$; aus diesem ergeben sich dann leicht die übrigen drei Zentralellipsoide.

f) *Mechanische Methoden:* Man kann sich auch verschiedener Apparate und Instrumente bedienen, von denen nur die folgenden beiden Beispiele genannt seien:

J. Amsler[115]) konstruierte ein *Planimeter* und *Br. Abdank-Abakanovich*[116]) einen *Integraphen,* die nicht nur das Trägheitsmoment *homogener ebener Figuren* in Bezug auf eine beliebige Gerade der Ebene, sondern auch die linearen Momente, die Flächen und die Schwerpunkte auf mechanischem Wege bestimmen[117]).

IV. Höhere Momente.

25. Allgemeine Definition der höheren Momente. Unter dem Momente m^{ten} Grades eines Massensystems[118]) für eine Gruppe von m Ebenen, unter denen beliebig viele zusammenfallen dürfen, versteht man den Summenausdruck:

$$\mathfrak{M} = \sum \alpha_i p_{i1} p_{i2} \cdots p_{im}, \tag{72}$$

in dem p_{ik} den Abstand des i^{ten} Massenpunktes von der k^{ten} Ebene bezeichnet und $m \geqq 1$ ist[119]). Dieses Moment ist nur ein besonderer Fall von dem Momente des Massensystems für eine allgemeine Fläche m^{ter} Ordnung[120]). Hierunter versteht man den Ausdruck

$$\mathfrak{M} = \sum \alpha_i F(x_i, y_i, z_i), \tag{73}$$

in dem $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche sein soll.

---

114) Vgl. *Routh,* Dynamik 1, § 97.

115) Vierteljahrsschr. d. Naturf. Ges. in Zürich 1 (1856); *Culmann,* Graphische Statik 1875, § 114 giebt eine eingehende Beschreibung.

116) Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications, Paris 1886.

117) Einen Apparat zur Bestimmung der Trägheitsmomente eines beliebigen Körpers konstruierte *N. Joukowsky,* Bull. de la Soc. des Naturalistes de Moscou (1891), p. 415.

118) Im Texte sind die Modifikationen übergangen, welche die Theorie der höheren Momente und der Äquivalenz für ebene Massensysteme erfährt.

119) *Reye,* J. f. Math. 72 (1870), p. 306, § 4.

120) *Reye,* J. f. Math. 78 (1874), p. 98, § 2.

Zieht man in einer bestimmten Richtung von jedem Punkte A_i des Massensystems eine Transversale und sind $\varrho_{i1}, \varrho_{i2}, \ldots, \varrho_{im}$ die Entfernungen des Punktes A_i von den m Schnittpunkten dieser Transversalen mit der Fläche m^{ter} Ordnung, so wird das vorige Moment $\mathfrak{M}$ dem folgenden Ausdrucke proportional

$$(74) \qquad \sum_i \alpha_i \varrho_{i1} \varrho_{i2} \cdots \varrho_{im}.$$

Ebenso wird, wenn φ_k die Winkel sind, welche eine beliebig angenommene Richtung mit den Normalen von m Ebenen η_k bildet und auf einer in dieser Richtung durch A_i gezogenen Transversale von η_k das Stück ϱ_{ik} abgeschnitten wird, da $p_{ik} = \varrho_{ik} \cos \varphi_k$, das Moment des Massensystems für diese Gruppe von Ebenen:

$$(75) \qquad \mathfrak{M} = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \ldots \cos \varphi_m \sum_i \alpha_i \varrho_{i1} \varrho_{i2} \ldots \varrho_{im}.$$

Die Abstände p_{ik} stellen sich analytisch dar wie folgt: Es ist

$$p_{ik} = \frac{U_k x_i + V_k y_i + W_k z_i - T_k}{\sqrt{U_k^2 + V_k^2 + W_k^2}},$$

wo U_k, V_k, W_k, T_k die homogenen Koordinaten der Ebene η_k sind. Lässt man die m Ebenen η_k in eine zusammenfallen, so erhält man hiernach das *Moment* m^{ten} *Grades des Massensystems* für eine Ebene η in der Form:

$$(76) \qquad \mathfrak{M} = \sum \alpha_i \left(\frac{U x_i + V y_i + W z_i - T}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} \right)^m.$$

Dasselbe kann für jede Ebene des Raumes berechnet werden, sobald es für

$$\frac{(m+1)\cdot(m+2)\cdot(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = N(m) + 1$$

von einander unabhängige Ebenen bekannt ist.

26. Die Nullflächen eines Massensystems. Diejenigen Ebenen, deren Momente m^{ten} Grades einen konstanten Wert $\mathfrak{M}$ haben, umhüllen eine algebraische Fläche, deren Gleichung bei geradem m in Ebenenkoordinaten U, V, W, T lautet:

$$(77) \qquad \sum_i \alpha_i (U x_i + V y_i + W z_i - T)^m = \mathfrak{M} (U^2 + V^2 + W^2)^{\frac{m}{2}},$$

beziehungsweise wenn m ungerade ist:

$$(77') \qquad \left\{ \sum \alpha_i (U x_i + V y_i + W z_i - T)^m \right\}^2 = \mathfrak{M}^2 (U^2 + V^2 + W^2)^m,$$

Die Fläche ist also für ein gerades m von der m^{ten}, für ein ungerades m von der $2m^{\text{ten}}$ Klasse. Für $\mathfrak{M} = 0$ ergiebt sich immer eine Fläche m^{ter} Klasse

3) $$\Phi^m = \sum \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)^m = 0.$$ [121])

ese Fläche ist die m^{te} *Nullfläche des Massensystems.*

Die sämtlichen Momentenflächen sind unabhängig von der Wahl s zugrunde gelegten Koordinatensystems. Differentiiert man ihre enstehenden Gleichungen nach T, so zeigt sich, dass die erste lare der unendlich fernen Ebene für sämtliche m^{ten} Momentenchen die $(m-1)^{te}$ Nullfläche des Massensystems ist.

Die Gesamtmasse des Massensystems kann dessen verschiedenen illflächen als deren „Gewicht" beigelegt werden, und mit diesem ewicht" versehen bestimmt die m^{te} Nullfläche das Massensystem nsichtlich aller Momente bis zum m^{ten} Grade inclusive. Für die tischen Momente wird die Nullfläche ein Punkt, der Schwerpunkt s Systems, und dieser Punkt mit der in ihm konzentrierten Gemtmasse ersetzt in der That das vorgelegte Massensystem hinsichth seiner statischen Momente. Für die quadratischen Momente les Massensystems wird die Nullfläche die Ordnungsfläche des zuhörigen Antipolarsystems, und die zu ihr konjugierte[49]) Fläche wird zugehörige *Culmann*'sche Zentralfläche, u. s. w. So erscheint mit einem bestimmten Gewichte versehene Fläche m^{ter} Klasse als le einfache Verallgemeinerung des Massenpunktes. Um eine einhe Bezeichnung zu haben, können wir sie eine *Massenfläche* nennen. ne Massenfläche m^{ter} Klasse ist dann das vollständige Äquivalent ler quaternären algebraischen Form m^{ten} Grades. Von hier aus nn man die ganze Theorie der quaternären algebraischen Formen t der Geometrie der Massen in Verbindung bringen, wie dies inssondere *Th. Reye*[122]) ausgeführt hat.

27. Äquivalenz höheren Grades. Indifferenz höheren Grades. vei Massensysteme heissen *im m^{ten} Grade äquivalent*[123]), wenn für le Ebene des Raumes ihre Momente bis zum m^{ten} inclusive denselben ert haben. Dann sind auch für jede Gruppe von höchstens m enen und jede Fläche von höchstens m^{ter} Ordnung die Momente ider Systeme gleich.

Bei solchen Systemen stimmen alle Nullflächen bis zur m^{ten} inclu-

121) *Reye,* J. f. Math. 72 (1870), p. 296.

122) J. f. Math. 72 (1870), p. 313, 319 u. 321, § 8 und 78 (1874), p. 99—100 p. 114ff.

123) *Reye,* J. f. Math. 72 (1870), p. 293, 78 (1874), p. 97. Einige besondere lle behandelte *Routh* (Quart. J. of math. 21 (1886)). Die Theorie hat *S. Kantor* f einen Raum von beliebig vielen Dimensionen ausgedehnt (Münch. Ber. 26 96), p. 531).

sive und auch die Umhüllungsflächen der Ebenen konstanten Momentes bis zum m^{ten} Momente überein. Umgekehrt sind zwei Systeme, die dieselbe m^{te} Nullfläche und gleiche Gesamtmasse besitzen, im m^{ten} Grade äquivalent.

Ein Massensystem heisst *im m^{ten} Grade indifferent*, wenn für jede Ebene des Raumes alle seine Momente bis zum m^{ten} inclusive verschwinden. Es ist dann jede Nullfläche bis zur m^{ten} unbestimmt, die Gleichung (78) wird eine Identität für $m = 1, 2, \ldots, m$. Es wird ferner für jede Gruppe von nicht mehr als m Ebenen und für jede Fläche der m^{ten} oder niedrigerer Ordnung das Moment des Systems gleich Null.

Sind zwei Massensysteme im m^{ten} Grade äquivalent, so geht das eine aus dem anderen durch Hinzufügung eines in demselben Grade indifferenten Systems hervor, und man kann also ein solches indifferentes System als die *Differenz* zweier im m^{ten} Grade äquivalenter Systeme ansehen.

Ist ein Massensystem im $(m-1)^{ten}$ Grade indifferent, und entwickelt man die Gleichung der zugehörigen m^{ten} Nullfläche $\Phi^m = 0$ nach Potenzen von T, so verschwinden in dieser Gleichung alle Glieder bis auf das von T unabhängige. Die m^{te} Nullfläche reduziert sich damit auf eine unendlich ferne Kurve, und die Momente m^{ten} Grades des Systems sind für zwei parallele Ebenen jeweils gleich.

Zwei Massensysteme, welche für jede Ebene eines *Bündels* gleiche Momente m^{ten} und niedrigeren Grades haben, sind im m^{ten} Grade äquivalent, wenn sie auch gleiche Gesamtmasse besitzen. Denn in der Entwickelung der Gleichung $\Phi^m = 0$ für beide Systeme nach Potenzen von T stimmen dann alle Glieder überein, und die beiden Systeme haben demnach dieselbe m^{te} Nullfläche.

Ist $\mathfrak{M} = \sum \alpha_i p_i^m$ der Ausdruck für das Moment m^{ten} Grades eines Massensystems bezüglich einer Ebene π, so wird das Moment für eine parallele Ebene π', welche von π den Abstand a hat:

$$\mathfrak{M}' = \sum \alpha_i (p_i - a)^m. \tag{79}$$

Die Wurzeln der Gleichung m^{ten} Grades:

$$\sum \alpha_i (p_i - a)^m = 0 \tag{80}$$

sind daher die Abstände $a_1, a_2, \ldots, a_m$ der Ebene π von den zu ihr parallelen Tangentialebenen der m^{ten} Nullfläche Φ_m.[124]) Der Koeffizient von a^{m-k} in dieser Gleichung ist das k^{te} Moment des Massensystems für die Ebene π. Der Koeffizient von a^m ist die Gesamtmasse

124) *Reye*, J. f. Math. 72 (1870), p. 302, § 3.

$=\sum \alpha_i$. Es sind daher die Momente bis zum m^{ten} Grade inclusive
Funktionen von $a_1, a_2, \ldots, a_m$ durch die bekannten Relationen
ischen den Koeffizienten und Wurzeln einer Gleichung m^{ten} Grades
stimmt. Z. B. findet man das m^{te} Moment des Massensystems für
ie beliebige Ebene, indem man die Gesamtmasse multipliziert mit
n Abständen der Ebene von den m zu ihr parallelen Berührungs-
enen der m^{ten} Nullfläche[125]) u. s. w.

In einem beliebigen Büschel sei η eine veränderliche und π eine
ste Ebene, welche die m^{te} Nullfläche nicht berührt, $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$
ien die Winkel, welche π mit η und den m in dem Büschel ent-
ltenen Tangentialebenen der Nullfläche bildet. Sind dann $\mathfrak{M}_\eta$ und
$_\pi$ die m^{ten} Momente des Massensystems für η und π, so wird:

$$1)\qquad \mathfrak{M}_\eta = \frac{\sin(\theta_1-\theta)\sin(\theta_2-\theta)\ldots\sin(\theta_m-\theta)}{\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_m}\cdot\mathfrak{M}_\pi.\text{[126])}$$

iernach lässt sich, wenn $\mathfrak{M}_\pi$ und die m Tangentialebenen der Null-
che bekannt sind, das Moment für jede Ebene des Büschels be-
chnen. Ist die ganze Nullfläche bekannt, so lässt sich weiter, indem
an die Axe des Büschels in der festen Ebene π verschiebt, das
oment für jede Ebene des Raumes finden.

28. Polarität und Apolarität. Es wurde oben bereits eine
ethode erörtert, nach der man mit Hülfe einer beliebigen Ebene π
n gegebenes Massensystem in ein neues verwandelt. Es wurde nämlich
le Masse α_i mit einer linearen Funktion $(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)$
ultipliziert, welche den Abstand des betreffenden Massenpunktes von
r Ebene π angiebt (Nr. **11**). Analog kann man allgemein aus einem ge-
benen Massensysteme ein anderes herleiten, in dem man die Masse α_i
s i^{ten} Massenpunktes (x_i, y_i, z_i) durch die Masse

$$\alpha_i F_k(x_i, y_i, z_i)$$

setzt, wo F_k eine bestimmte Funktion k^{ten} Grades der Punkt-
ordinaten x, y, z bedeutet. Die s^{te} Nullfläche des neuen Massen-
stems wird durch die Gleichung:

$$2)\qquad \sum \alpha_i F_k(x_i, y_i, z_i)(Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)^s = 0$$

rgestellt. Denkt man sich diese Gleichung entwickelt, so wird der
oeffizient von $U^\lambda V^\mu W^\nu T^\varrho$

125) Ist $\sum \alpha_i = 0$, so wird eine Wurzel a_j unendlich gross. Φ^m wird von
r unendlich fernen Ebene berührt, und die Gleichung (80) reduziert sich auf
ne Gleichung $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades. Hierdurch wird gegebenenfalls eine leicht er-
chtliche Modifikation des ausgesprochenen Theorems bedingt.

126) *Reye*, J. f. Math. 72 (1870), p. 304, Nr. 19.

$$\sum \alpha_i F_k(x_i, y_i, z_i) x_i^{\lambda} y_i^{\mu} z_i^{\nu}$$

und dieser Koeffizient setzt sich linear zusammen aus Ausdrücken von der Form

$$\sum \alpha_i x_i^{l+\lambda} y_i^{m+\mu} z_i^{n+\nu}, \quad (l+m+n=k, \quad \lambda+\mu+\nu<s).$$

Diese Ausdrücke sind aber alle selbst Koeffizienten in der Gleichung der $(k+s)^{\text{ten}}$ Nullfläche des vorgelegten Massensystems, und erscheinen hier multipliziert mit Koeffizienten der Gleichung $F_k(x, y, z) = 0$. Die s^{te} Nullfläche des neuen Massensystems ist deshalb eindeutig bestimmt durch die Gleichung $F_k = 0$ und die $(k+s)^{\text{te}}$ Nullfläche des ursprünglichen Massensystems, und heisst nach *Reye* die s^{te} *Polare* der Fläche k^{ter} Ordnung F_k[127]) bezüglich der Nullfläche $(k+s)^{\text{ter}}$ Klasse. Sie ist selbst eine Fläche s^{ter} Klasse. Für $s = 1$ reduziert sie sich auf einen Punkt, für dessen Koordinaten sich aus (82) die Beziehungen ergeben:

$$(83) \quad \begin{cases} M x_k = \sum \alpha_i x_i F_k(x_i, y_i, z_i), \\ M y_k = \sum \alpha_i y_i F_k(x_i, y_i, z_i), \\ M z_k = \sum \alpha_i z_i F_k(x_i, y_i, z_i), \\ M = \sum \alpha_i F_k(x_i, y_i, z_i). \end{cases}$$

Er kann der *Pol* der Fläche $F_k = 0$ für das gegebene Massensystem heissen.

Es kann nun insbesondere eintreten, dass die Gleichung (82) identisch erfüllt ist, indem das abgeleitete Massensystem im s^{ten} Grade indifferent wird[128]). Dann heisst nach *Reye* die Fläche k^{ter} Ordnung $F_k = 0$ *apolar* zu der Fläche $(k+s)^{\text{ter}}$ Klasse $\Phi_{k+s} = 0$.[129])

29. Ersetzung eines Massensystems hinsichtlich seiner Momente m^{ten} Grades durch einzelne Punkte. Jedes Massensystem kann hinsichtlich seiner Momente m^{ten} Grades durch eine Gruppe von

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = N(m) + 1$$

---

127) Die Fläche F_k kann dabei in eine Gruppe von k Ebenen ausarten, die ihrerseits teilweise oder alle zusammenfallen können.

128) Damit das abgeleitete Massensystem nicht im Grade s indifferent sei, ist ausreichend, dass das Moment des vorgelegten Massensystems für die Fläche F_k nicht verschwinde. Umgekehrt genügt diese letztere Eigenschaft aber nicht für die Indifferenz des abgeleiteten Massensystems. Dasselbe ist jedoch sicher indifferent im Grade s, wenn F_k durch alle Punkte des urprünglichen Systems oder eines ihm im Grade $k+s$ äquivalenten Systems hindurchgeht.

129) Über apolare Flächen vgl. *Reye*, J. f. Math. 78 (1874), p. 104 ff. und 79 (1875), p. 159 ff.

Massenpunkten a_j ersetzt werden, die nicht auf einer und derselben Fläche der m^{ten} Ordnung liegen dürfen, sonst aber beliebig wählbar sind. Dem Punkte a_j ist hierbei eine solche Masse μ_j beizulegen, dass sein Moment in Bezug auf die Fläche m^{ter} Ordnung $F_m^{(j)}$, die durch die übrigen $N(m)$ Punkte hindurchgeht, gleich wird dem Momente des vorgelegten Massensystems für dieselbe Fläche. Diese Masse μ_j bestimmt sich also, nach (73), aus der Gleichung:

$$\mu_j \cdot F_m^{(j)}(x_j, y_j, z_j) = \sum_i \alpha_i F_m^{(j)}(x_i, y_i, z_i). \tag{84}$$ [130]

Ein Massensystem lässt sich im allgemeinen auch durch weniger als $N(m) + 1$ Punkte ersetzen, wenn die Lage dieser Punkte geeignet gewählt wird[131]. Die kleinstmöglichste Zahl von Punkten zu bestimmen, ist für ein allgemeines m noch nicht gelungen. Für $m = 1$, also hinsichtlich der statischen Momente, ist ein Massensystem im allgemeinen einem einzigen, bestimmten Massenpunkte äquivalent, für $m = 2$ müssen es, wie wir gesehen haben, im allgemeinen mindestens vier Massenpunkte sein[118]. Hinsichtlich der Momente *dritten* Grades[132] lässt sich ein allgemeines Massensystem auf ∞^4 Arten durch 6 Massenpunkte ersetzen, für die von zweien die Verbindungslinie willkürlich angenommen werden darf, und auf *eine einzige Art durch 5 Massenpunkte*[133]. Hinsichtlich der Momente *vierten* Grades[134] lässt sich ein allgemeines Massensytem auf ∞^5 Arten ersetzen durch *10 Massenpunkte*, von denen einer ganz willkürlich ist und ein anderer auf einer bestimmten, von dem ersten Punkte abhängigen Fläche zweiter Ordnung beliebig angenommen werden darf, während die übrigen acht Punkte auf dieser Fläche eine bestimmte Lage haben. Nur in einem besonderen Falle ist das Massensystem bezüglich seiner Momente vierten Grades durch weniger als 10 Punkte, nämlich durch 9 Punkte, von denen einer die übrigen bestimmt, ersetzbar. Dies tritt dann ein,

130) *Reye*, J. f. Math. 78 (1874), p. 110, Nr. 19. Es ist offenbar, in welcher Weise man eine solche Reduktion für die Berechnung der Integrale von der Form $\int z^n dS$, $\int F_m(x, y, z)\, dS$, wo dS das Element eines gegebenen Ausdehnungsgebietes bezeichnet, nutzbar machen kann. *Routh* wendet (Quart. J. of math. 21 (1866)) das Integrationsverfahren auf einige besondere Fälle an, welche sich auf den Druckmittelpunkt einer ebenen Fläche und den Schwerpunkt eines Tetraeders beziehen, wenn der Druck oder die Dichtigkeit im Elemente dS durch die ganze Funktion F_m des Ortes dargestellt wird. (Vgl. auch *Routh*, Dynamik 1, § 45.)

131) *Reye*, J. f. Math. 72 (1870), p. 321 (§ 8).

132) *Reye*, J. f. Math. 72 (1870), p. 316 (§ 7) und 78 (1874), p. 114 ff.

133) In allen diesen Fällen sind mit den Punkten auch die Massen bestimmt.

134) *Reye*, J. f. Math. 78 (1874), p. 123 ff.

wenn die vierte Nullfläche des Massensystems eine apolare Fläche zweiten Grades besitzt.

Algebraisch zu reden handelt es sich bei diesen Sätzen um die Darstellung quaternärer Formen als Summe von Potenzen linearer Formen. Man vergl. in dieser Hinsicht das Referat über *Invariantentheorie* in Bd. I (*W. Franz Meyer*), insbesondere Nr. **10**.

30. Das Problem der Grenzwerte von P. L. Tschebyscheff. Eine besondere Wendung hat *P. L. Tschebyscheff*[135]) der Betrachtung der höheren Momente, zunächst nur für eine Variable, gegeben. Für eine unbekannte, positive Dichte $f(x)$, nimmt er die Integrale $\int_A^B f(x)\,dx$, $\int_A^B x f(x)\,dx$, $\int_A^B x^2 f(x)\,dx, \cdots \int_A^B x^m f(x)\,dx$ als gegeben an, wo $A > a$ und $B < b$ ist, und fragt, zwischen welchen Grenzen dann das $\int_a^b f(x)\,dx$ gelegen sein kann. Diese Grenzen werden immer durch Massenverteilungen geliefert, bei denen nur einzelne Punkte der x-Axe mit Masse belegt sind. Vgl. die erste Mitteilung von *Tschebyscheff*[136]), in der folgendes Problem gestellt ist: Gegeben die Länge, das Gewicht, der Schwerpunkt und das Schwerhauptträgheitsmoment einer materiellen geraden Linie, deren Dichtigkeit unbekannt ist und sich von Punkt zu Punkt ändern darf; man soll die Grenzen finden, zwischen denen sich das Gewicht eines Teiles dieser geraden Linie bewegen kann. Die Lösung dieses Problems gab *P. L. Tschebyscheff* ohne Beweis, den dann *A. Markoff*[137]) lieferte. Eine ausführliche Zusammenstellung dieser Dinge gab *C. Possé*[138]). Bei ihm wird die Frage in der Weise analytisch verallgemeinert, dass statt der Potenzen von x Funktionen $\Omega(x)$, $\Omega_1(x) \cdots \Omega_m(x)$ eingeführt werden, die geeigneten Einschränkungen unterworfen sind[139]).

135) *P. Tschebyscheff*, J. de math. (2) 3 (1858), 12 (1867) und 19 (1874). Vgl. auch Petersb. Mém. de l'Acad. (7) 1 (1859) und Acta math. 9 (1886), sowie die Arbeiten seiner Schüler (*E. J. Zolotareff*, J. de math. 19 (1874); *A. Markoff*, Math. Ann. 24 (1884) und Acta math. 9 (1886)).

136) J. de math. 19 (1874), p. 159.

137) Math. Ann. 24 (1884), p. 179.

138) *C. Possé*, Math. Ann. 26 (1886) und *C. Possé*, Sur quelques applications des fractions continues algébriques, Petersburg 1886, ch. 5.

139) Diese Fragestellungen von *Tschebyscheff* finden ihre besondere Anwendung bei den Untersuchungen über die Massenverteilung im Innern der Erde. Vgl. hierüber das Nähere in Bd. VI (Geophysik).

(Abgeschlossen im März 1903.)

IV 5. DIE GRAPHISCHE STATIK DER STARREN KÖRPER.

VON

L. HENNEBERG

IN DARMSTADT.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

(Ausser den in IV 2 und 4 aufgeführten Büchern.)

Lehrbücher.

J. Bauschinger, Elemente der graphischen Statik, München 1871; 2. Aufl. 1880.
A. J. du Bois, The elements of graphical statics, New York 1875.

C. Culmann, Die graphische Statik, Zürich 1866 („Gr. St.") (1. Teil 1864), 2. Aufl. Zürich 1875. Nur 1 Teil erschienen.
W. J. Dobbs, Elementary geometrical statics, London 1897.
A. Favaro, Lezioni di statica grafica, Padova 1877.
A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik; 2. Band: Graphische Statik, Leipzig 1900.
R. H. Graham, Graphic and analytic statics in theory and comparison, London 1883.
J. Y. Gray and *G. Lowson*, The elements of graphical arithmetic and graphic statics, London 1888.
A. Hasselblatt, Graphische Statik, russ., Petersburg 1897.
L. Henneberg, *Statik* der starren Systeme, Darmstadt 1886.
L. M. Hoskins, The elements of graphic statics, London 1892.
G. Jung, La statica grafica, Milano 1889—90 (autographiert).
W. Keck, Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen, 1. Teil: Mechanik starrer Körper, Hannover 1896; 2. Aufl. 1900.
M. Koechlin, Applications de la statique grafique, Paris 1889.
R. Lauenstein, Die graphische Statik, 1. Aufl. Stuttgart 1890, 7. Aufl. Stuttgart 1902.
G. Leman, Leçons de statique graphique, Gand 1887.
M. Levy, *La statique graphique* et ses applications aux constructions, Paris 1874, 2. Aufl., 4 Bde., Paris 1886—1888.
A. F. Möbius, Lehrbuch der Statik, 2 Bde., Leipzig 1837 = Werke, Bd. 3, Leipzig 1885.
H. Müller-Breslau et *Th. Seyring*, Éléments de statique graphique, Paris 1886.
H. Müller-Breslau, Die graphische Statik der *Baukonstruktionen*, 2. Aufl., Bd. 1, Berlin 1887, Bd. 2, Berlin 1892, 3. Aufl., Bd. 1, Berlin 1901.
K. von Ott, Das graphische Rechnen und die graphische Statik, Prag 1870, 4. Aufl. u. d. T. Grundzüge der graphischen Statik, 2 Tle., Prag 1884/85.
J. Petersen, Statik, Kjöbenhavn 1881, deutsche Übersetzung von *R. von Fischer-Benzon*, Kopenhagen 1882.
W. J. M. Rankine, A manual of applied mechanics, London 1857; 16. Aufl. 1891.
W. Ritter, Anwendungen der graphischen Statik, Zürich, 1. Teil 1888, 2. u. 3. Teil 1900. (Als Fortsetzung der graphischen Statik von *Culmann* gedacht.)
E. J. Routh, A treatise on analytical statics, 2 vol., 2. ed., Cambridge 1896 und 1902, insbes. vol. I, ch. VIII.
C. Saviotti, La statica grafica, 3 Bde., Milano 1888.
P. Varignon, *Nouvelle mécanique* ou statique, t. 1 et 2, Paris 1725.

Monographieen und Abhandlungen.

R. H. Bow, Economies of constructions in relation to framed structures, London 1873.
L. Cremona, *Le figure reciproche* nella statica grafica, Milano 1872, 3. Aufl. mit einer Einführung von *G. Jung*, Milano 1879.
— *Les figures réciproques* en statique graphique, ouvrage précédé d'une introduction de *G. Jung* et suivi d'un appendice extrait des mémoires des cours de statique graphique de *Ch. Saviotti*. Traduit par *L. Bossut*, Paris 1885.
H. T. Eddy, A new general method in graphical statics, Van Nostrand's Engineering Magazine, New-York 10 (1878), p. 12.

H. T. Eddy, On the two general reciprocal methods in graphical statics, Amer. J. of math. 1 (1878), p. 322.
— Auflagerdrucklinien und deren Eigenschaften, Zeitschr. f. Bauwesen 40 (1890), p. 397.
A. Favaro, La statica grafica, Ist. Veneto, Atti (4) 2 (1873), p. 1661—1817.
G. B. Favero, Intorno alle figure reciproche nella statica grafica, Roma, Acc. dei Linc. Atti (2) 2 (1875), p. 455.
— La determinazione grafica delle forze interne nelle travi reticolari, Roma, Acc. dei Linc. Atti (Memorie) (3) 2 (1878), p. 112.
A. Föppl, Theorie des Fachwerks, Leipzig 1880.
— Das Fachwerk im Raume, Leipzig 1892.
M. Gebbia, Una quistione di priorità, Il Politecnico Giorn. 39 (1891), p. 778.
C. Guidi, Sulla determinazione grafica delle forze interne nelle travi omogenee e reticolari, appogiate agli estremi e soggette ad un sopracarico mobile, Roma, Acc. dei Linc. Atti (3) 5 (1880), p. 1.
M. Grübler, Beitrag zur Theorie des ebenen einfachen Fachwerkes, Riga, Ind.-Zeitg. 13 (1887), p. 37 u. 49.
G. Hauck, Über die reciproken Figuren der graphischen Statik, J. f. Math. 100 (1887), p. 365; 120 (1899), p. 109.
L. Henneberg, Bericht über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke, Deutsche Math.-Ver. 3 (1894), p. 567.
H. J. Hollender, Über eine neue graphische Methode der Zusammensetzung der Kräfte, Leipzig 1896.
Fl. Jenkin, On the practical application of reciprocal figures to the calculation of strains on framework, Edinb. Roy. Soc. Trans. 25 (1869), p. 441.
G. Jung, On a new construction for the central nucleus, Brit. Assoc. Report 1876, p. 23—26.
G. Lang, Über Berechnung und Konstruktion der Bauten in Eisen, Riga, Ind.-Zeitg. 12 (1886), p. 265 und 13 (1887), p. 145, 157, 169, 193.
J. Clerk Maxwell, On reciprocal figures and diagrams of forces, Phil. Mag. (4) 27 (1864), p. 250 = Papers 1, p. 514.
— On the calculation of the equilibrium of stiffness of frames, Phil. Mag. (4) 27 (1864), p. 294 = Papers 1, p. 598.
— On reciprocal figures, frames and diagrams of forces (1870), Edinb. Roy. Soc. Trans. 26 (1872), p. 1 = Papers 2, p. 161.
— On *Bow*'s method of drawing diagrams in graphical statics with illustrations from *Peaucellier*'s linkage, Cambr. Phil. Soc. Proc. 2 (1876), p. 407 = Papers 2, p. 492.
O. Mohr, Über die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten, Civiling. (2) 33 (1887), p. 43.
— Beitrag zur Theorie des Fachwerks, Zeitschr. d. Arch. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 20 u. 21 (1874 u. 1875), p. 123 u. 17, sowie Civiling. (2) 31 (1885), p. 289.
H. Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1886, 2. Aufl., 1893.
— Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks, Sonderabdr. Zentralblatt d. Bauverwaltung 12 (1892), p. 201. 225. 244. 246.
D. Padeletti, Studi sui diagrammi reciproci, Giorn. di mat. 17 (1879), p. 339.

M. Rankine, Principle of the equilibrium of polyedral frames, Phil. Mag. (4) 27 (1864), p. 92.
A. Ritter, Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen, Hannover 1863, 5. Aufl. 1894.
F. Steiner, Über die graphische Zusammensetzung der Kräfte, Wien 1876.
F. Schur, Über ebene einfache Fachwerke, Math. Ann. 48 (1897), p. 142.
J. Weyrauch, Über die graphische Statik, zur Orientierung, Leipzig 1874.
— Allgemeine Theorie und Berechnung der kontinuierlichen und einfachen Träger, Leipzig 1873.
E. Winkler, Vorträge über Brückenbau, 3 Bde., Wien 1872/86.
H. G. Zeuthen, Ovelser i grafisk Statik, Tidsskrift for Math. (4) 1 (1877) p. 27.
— Anvendelse af en saetning af Maxwell tal at finde de billigste Bygningskonstruktioner, Tekn. For. Tidskr. 1877, p. 104.

---

1. Vorbemerkung. Da die Statik der starren Systeme in theoretischer und insbesondere analytischer Richtung schon in den Artikeln IV 2 (*Timerding*) und IV 4 (*Jung*) behandelt wird, so sollen hier nur die graphischen Methoden gegeben werden. Dabei wird die Beschränkung auf die starren Systeme festgehalten, indem die sich auf elastische Körper beziehenden graphischen Methoden später in den Referaten über *Elastizität* und *Festigkeitslehre* behandelt werden.

2. Historisches. Die Methoden der graphischen Statik starrer Körper beruhen im wesentlichen auf der Verwendung des *Kräfte-* und *Seilpolygones*. *P. Varignon*[1]) gab zuerst den Satz, dass sich beliebige im Gleichgewicht befindliche Kräfte, wenn man sie durch gerichtete Strecken darstellt, stets zu einem geschlossenen Polygone zusammenfügen lassen (vgl. IV 2, **20**, *Timerding*). Ebenso war er der erste, der die Aufgabe behandelte, das Gleichgewicht eines Seilzuges, auf welchen in den verschiedenen Eckpunkten beliebige Kräfte wirken, zu ermitteln, sowie die Spannungen in den einzelnen Teilen des Seiles zu finden. Von da aus kam er dazu, den Zusammenhang des Kräfte- und Seilpolygones zu untersuchen und zwar sowohl für parallele wie für nichtparallele Kräfte[2]). Auch wird von *Varignon* mit Hülfe des Seilpolygones schon die Resultante von Kräften bestimmt, ohne dass er jedoch, da er nur an ein Seil denkt, der Konstruktion eine weitere Bedeutung beilegt[3]). Später sind es *G. Lamé* und *B. P. E. Clapeyron*[4]),

---

1) Nouvelle mécanique, 1 u. 2.
2) Nouvelle mécanique 1, p. 193 u. f.; planche 11, fig. 92 u. 93.
3) So findet sich bei *Varignon* die folgende Figur (t. 1, planche 11, fig. 6): sowie die Bemerkung (p. 199): Les Corol. 19 et 20 du Lem. 3 font voir que

J. V. Poncelet[5]), *A. F. W. Brix*[6]) und andere, welche das Kräfte- und Seilpolygon bei der Untersuchung der Gleichgewichtsfigur des Seiles verwenden, dieselben gehen jedoch nicht wesentlich in der Erkenntnis des Seilpolygones über *Varignon* hinaus. Das nämliche lässt sich von *B. E. Cousinery*[7]) sagen, der sich mehr damit beschäftigte, graphische Methoden für die gewöhnlichen Rechnungsoperationen zu finden, ebenso wie *Poncelet* bemüht war, für eine Reihe von Rechnungsausdrücken Konstruktionen herzuleiten. Für die Schwerpunktsbestimmung soll *Poncelet* das Seilpolygon in seinen Vorträgen an der Artillerie- und Genieschule in Metz verwandt haben[8]). Der erste,

---

l'effort résultant du concours des puissances K, L est dirigé suivant ER ou FR; que le résultant du concours de celui-ci et de la puissance M, est dirigé

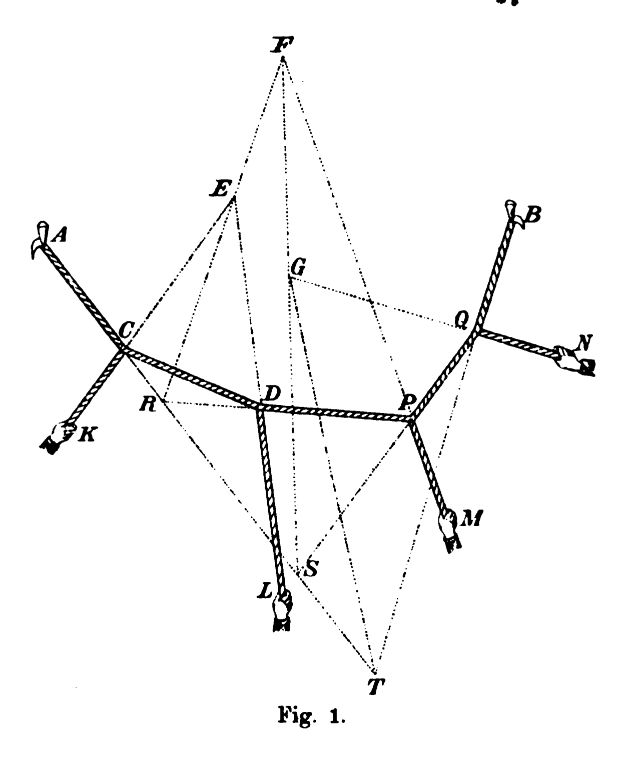


Fig. 1.

suivant FS ou GS; que le résultant de celui-ci et de la puissance N est dirigé suivant GT; et toujours de même.

4) Journ. des voies de communication, St. Pétersbourg, Jan. 1827, p. 44 u. f.

5) Cours de mécanique industrielle, Metz 1829, p. 77, 79, 85 etc.

6) Lehrbuch der Statik fester Körper, 2. Aufl., Berlin 1849, p. 422 u. f.

7) Le calcul par le trait, Paris 1838.

8) *C. Culmann,* Gr. St. 2. Aufl., Vorrede, p. VIII.

welcher die Verwendbarkeit des Seilpolygones für die allgemeinen Aufgaben der Statik erkannte, und dasselbe lediglich als Konstruktionsmittel und unabhängig von seiner Bedeutung als Gleichgewichtsfigur des Seiles betrachtete, war *C. Culmann*[9]), der daher als Begründer der graphischen Statik anzusehen ist[10]). Bezüglich der Anwendungen der graphischen Statik ist *J. Clerk Maxwell* hervorzuheben, der insbesondere die reziproken Kräftepläne der Fachwerke begründete.

I. Grundzüge der graphischen Statik.

A. Das ebene Kräftesystem.

3. Die analytische Zusammensetzung der Kräfte. Aus den in IV 2, III (*Timerding*) behandelten Regeln für die Zusammensetzung beliebiger an einem starren Körper angreifenden Kräfte folgt für den besonderen Fall, in dem alle diese Kräfte in einer *Ebene* liegen, dass dieselben im allgemeinen einer einzigen resultierenden Kraft[11]) statisch äquivalent sind, welche auch in ein *Poinsot*'sches Kräftepaar übergehen kann.

Sind X_i, Y_i die Komponenten der Kraft P_i, x_i, y_i die Koordinaten des Angriffspunktes und $M_i = X_i y_i - Y_i x_i$ das Drehmoment um den Koordinatenanfangspunkt, so berechnet sich die Resultante aus den Gleichungen

$$\sum X_i = X, \quad \sum Y_i = Y, \quad \sum M_i = M.$$

Gleichgewicht ist vorhanden, wenn alle drei Ausdrücke verschwinden.

4. Graphische Bestimmung des resultierenden statischen Momentes. Das *statische Moment* einer Kraft für einen gegebenen Punkt O als *Drehpunkt* oder *Pol* wird schon bei *Varignon*[12]) durch den doppelten Inhalt des Dreieckes dargestellt, welches die Kraft zur Basis und den Drehpunkt zur Spitze hat[13]). Das resultierende Moment eines ebenen Kräftesystemes wird demnach gefunden

---

9) *Carl Culmann*, geb. 1821 in Bergzabern (Rheinpfalz), gest. am 9. Dez. 1881 in Zürich, war von 1854 bis zu seinem Tode Professor der Ingenieurwissenschaften und der erste Direktor am Polytechnikum in Zürich. Sein Hauptwerk ist „Die graphische Statik".

10) Vgl. auch die ausführliche Darstellung in *M. Rühlmann*, Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik, Leipzig 1885, § 39.

11) *C. Culmann* bezeichnet die Resultante auch als *Mittelkraft*.

12) Nouvelle mécanique 1, p. 304, sowie Lemme XVI, p. 84 ff.

13) Infolge dieser graphischen Darstellung des Momentes bezeichnet *Culmann* die Grösse der Kraft als die *Basis des Momentes*.

durch algebraische Addition aller der Dreiecke, welche die einzelnen Kräfte des Systemes zur Grundlinie und den angenommenen Drehpunkt zur Spitze haben. Hierfür werden von *Culmann* zwei graphische Verfahren gegeben, indem sämtliche Dreiecksflächen auf dieselbe Grundlinie bezw. Höhe gebracht und dann addiert werden[14]). Die Methode ist im besonderen anwendbar, wenn alle Kräfte paarweise an Grösse gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, also zur Ermittelung des Momentes eines aus beliebig vielen Kräftepaaren resultierenden Paares[15]).

5. Graphische Zusammensetzung der Kräfte durch das Seilpolygon. Die Grösse und Richtung der Resultante eines ebenen Kräftesystemes ergiebt sich durch die *Schlusslinie des Kräftepolygones*[16]), nämlich die Linie, welche die nach Grösse und Richtung aneinandergelegten Kräfte des Systemes zu einem geschlossenen Polygon ergänzt. Die graphische Addition der Momente (für einen angenommenen Drehpunkt) ergiebt die Lage der Resultanten.

Es genügt aber zur Festlegung der Resultante schon die Kenntnis eines einzigen Punktes auf ihrer Aktionslinie. Zur Bestimmung eines solchen wird von *Culmann*[17]) ein *Seilpolygon*[18]) (*polygone funicolaire, funicolar polygon, poligono funicolare*) gezeichnet, dessen *Knotenpunkte* (Eckpunkte) auf den Aktionslinien $l_1, l_2, l_3, \ldots$ der aufeinanderfolgenden Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ liegen, während dessen Seiten parallel sind zu den Strahlen (*Diagonalen*), welche von einem beliebig angenommenen Punkte C, dem *Pole des Kräftepolygones* (Pol des Seilpolygones), nach den Eckpunkten $0, 1, 2, 3, \ldots$ des Kräftepolygones gehen (vgl. Fig. 2). Durch dieses Seilpolygon werden die einzelnen Kräfte in je zwei Komponenten zerlegt, die in den beiden, in der betreffenden Kraft zusammenkommenden Seiten des Seilpolygones liegen und die Grösse der betreffenden parallelen Diagonale des Kräftepolygones besitzen. Hierbei bekommen die beiden gleichgrossen Kräfte, welche mit Ausnahme der beiden *äussersten Seiten*[19]) in den einzelnen Seiten des

---

14) Gr. St., p. 103 u. f. *Culmann* spricht von einer Reduktion der Momente auf eine vorgeschriebene Basis bezw. vorgeschriebenen Hebelarm.

15) Gr. St., p. 106 u. f.

16) Bezeichnung von *Culmann*. *Culmann* nennt ferner das Kräftepolygon ein *offenes* bezw. ein *geschlossenes*, je nachdem der Endpunkt des Kräftezuges nicht in den Anfangspunkt oder wieder in denselben fällt. Gr. St., p. 77.

17) Gr. St., p. 78 u. f.

18) *Seileck* nach *G. Lang*, ebenso *Kräfteeck* statt Kräftepolygon.

19) *Culmann*'sche Bezeichnung.

Seilpolygones liegen, entgegengesetzte Richtung und heben sich auf[20]). Somit *setzt sich die Resultante des ganzen Kräftesystemes aus den beiden Kräften zusammen, welche sich in den äussersten Seiten des Seilpolygones ergeben, und geht durch deren Schnittpunkt hindurch.*

Beispielsweise geht die Resultante R der drei in l_1, l_2, l_3 liegenden Kräfte P_1, P_2, P_3 durch den Schnittpunkt A der äussersten Seiten

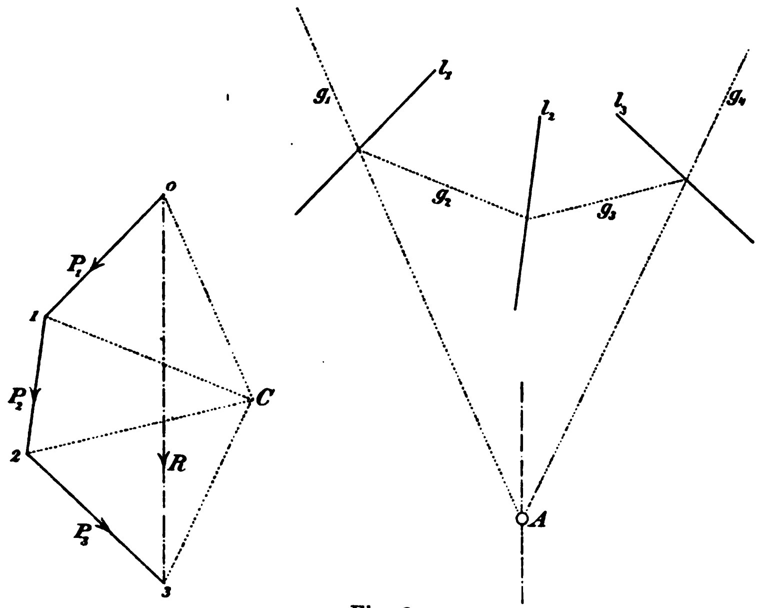


Fig. 2.

g_1 und g_4 des Seilpolygones und hat die Grösse und Richtung der Schlusslinie $\overline{03}$ des Kräftepolygones (s. Fig. 2).

Die Figur links wird als *Kräfteplan* für die Figur rechts bezeichnet. Die Längen der Polstrahlen $C0$, $C1$, $C2$, $C3$ stellen die Komponenten dar, welche sich bei Zerlegung der in l_1, l_2, l_3 liegenden Kräfte P_1, P_2, P_3 in den Seiten g_1, g_2, g_3, g_4 des Seilpolygones ergeben; umgekehrt repräsentieren sie auch die Spannungen, die in den Seiten des Seilpolygones angebracht werden müssen, um den Kräften P_1, P_2, P_3, bezw. ihrer negativ genommenen Resultanten, das Gleichgewicht zu halten.

Übrigens ergeben sich sofort die charakteristischen Sätze:

20) Werden die einzelnen Seiten des Seilpolygones materiell gedacht, so stellen die Längen der parallelen Diagonalen des Kräftepolygones die *Spannungen* in den einzelnen Seiten des Seilpolygones dar. Man hat Zug- und Druckspannungen zu unterscheiden. Treten nur Druckspannungen auf, so bezeichnet *Culmann* das Seilpolygon auch als *Drucklinie*. Gr. St., p. 79.

Ist das Kräftepolygon geschlossen, das Seilpolygon dagegen offen[21]*, so lässt sich das Kräftesystem auf ein Kräftepaar zurückführen.*

Ist Kräftepolygon und Seilpolygon geschlossen, so ist Gleichgewicht vorhanden.

6. Die verschiedenen Seilpolygone des nämlichen Kräftesystemes. Schon von *Culmann* wird die Frage aufgeworfen nach den verschiedenen Seilpolygonen, die zu dem nämlichen Kräftesystem gehören[22]. Ihre Anzahl ist ∞^3. Am wichtigsten sind hierbei diejenigen Seilpolygone, welche sich durch Änderung des Poles im Kräftepolygon, aber unter Beibehaltung der Reihenfolge der Kräfte ergeben.

Das spezielle Seilpolygon, welches für den Anfangspunkt des Kräftepolygones als Pol gezeichnet ist, wird von *Culmann* die *Mittelkraftslinie* (*poligono delle successive resultanti*) genannt, da in dessen aufeinanderfolgenden Seiten die Resultanten (*Mittelkräfte*) der beiden ersten Kräfte, der drei ersten Kräfte u. s. w. liegen. Mit Hülfe dieser Mittelkraftslinie beweist *Culmann* den Satz:

Bei zwei Seilpolygonen, die zu dem nämlichen Kräftesystem gehören und für dieselbe Reihenfolge der Kräfte, aber verschiedene Pole konstruiert sind, schneiden sich die gleichvielten (*entsprechenden*) *Seiten in den Punkten einer geraden Linie* (*Parallaxe*), *die parallel ist zur Verbindungslinie der beiden Pole* (*Polaxe*)[23].

Von diesem Satze macht *H. G. Zeuthen*[24] Gebrauch, um Polygone zu zeichnen, welche vorgeschriebenen Bedingungen genügen. Insbesondere lösen *O. Mohr, M. Levy* und später *C. Saviotti* die Aufgabe, ein Seilpolygon zu zeichnen, von dem drei Seiten durch vorgeschriebene Punkte gehen[25]. Auch *O. Hüppner*[26], *L. Geusen*[27] und *A. Ludin*[28] behandeln diese Aufgabe.

7. Das Seilpolygon als Projektion des Schnittes eines räumlichen Gebildes. Ein tieferer Einblick in die geometrischen Be-

---

21) *Culmann* nennt das Seilpolygon *offen*, wenn die äussersten Seiten nicht zusammenfallen; im anderen Falle *geschlossen*.

22) Gr. St., p. 82 u. f.

23) *Culmann* bemerkt hierzu: „Dieser Satz ist ausserordentlich nützlich; er setzt uns in den Stand ohne auf das Kräftepolygon zurückzugreifen, ein neues Seilpolygon zu konstruieren." Gr. St., p. 84.

24) *Zeuthen*, Tidsskr. for Math. (4) 1 (1877), p. 27; siehe auch *E. Rouché*, Nouv. ann. (3) 6 (1887), p. 439.

25) *O. Mohr*, Civiling. (2) 32 (1886), p. 535; *M. Levy*, La statique graphique, Paris 1886, t 1, p. 67; *C. Saviotti*, La statica grafica 2, Milano 1888, p. 26—29.

26) Civiling. (2) 33 (1887), p. 89.

27) Civiling. (2) 42 (1896), p. 471.

28) Zeitschr. f. Math. Phys. 48 (1903), p. 469.

ziehungen zwischen den Seilpolygonen, die zu dem nämlichen Kräftesysteme gehören, ergiebt sich, wenn man nach *J. Clerk Maxwell* (siehe Nr. **12**) die gezeichneten Figuren als Projektionen von räumlichen Gebilden betrachtet. Ausgehend von den Untersuchungen von *Maxwell* hat *L. Cremona* den Satz hergeleitet[29]), *dass jedes Seilpolygon sich als Projektion eines ebenen Schnittes eines n-Flaches ansehen lässt, dessen Kanten sich in die aufeinanderfolgenden Aktionslinien der Kräfte projizieren.* Die betreffende analytische Untersuchung ist von *F. Klein* durchgeführt[30]):

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die gegebenen Kräfte für sich ein Gleichgewichtssystem bilden (anderenfalls müsste man ihnen die Resultante, negativ genommen, hinzufügen). Ferner seien X_i, Y_i die Komponenten der gegebenen Kräfte und M_i deren Drehmomente ($i = 1, 2, \ldots, n$). In Übereinstimmung hiermit mögen die aufeinanderfolgenden Ecken des in Fig. 2 (p. 353) dargestellten Kräftepolygons die Koordinaten

$$0,\ 0;\quad X_1,\ Y_1;\quad \sum_1^2 X_i,\ \sum_1^2 Y_i;\quad \text{etc.}$$

erhalten; der Pol C habe die Koordinaten

$$X,\ Y.$$

Es sind dann erstlich die Aktionslinien der gegebenen Kräfte durch folgende Gleichungen gegeben:

$$(1)\qquad 0 = x \cdot Y_i - y \cdot X_i + M_i.$$

Nimmt man ferner als Gleichung der ersten Seite des Seilpolygons (die zu der Verbindungslinie der Punkte 0, 0 und X, Y parallel sein soll)

$$(2)\qquad 0 = x \cdot Y - y \cdot X + M$$

(wo M beliebig), so ergeben sich für die ferneren Seiten die Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} 0 = x(Y - Y_1) - y(X - X_1) + (M - M_1), \\ 0 = x\left(Y - \sum_1^2 Y_i\right) - y\left(X - \sum_1^2 X_i\right) + \left(M - \sum_1^2 M_i\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

die letzte Seite:

$$0 = x\left(Y - \sum_1^n Y_i\right) - y\left(X - \sum_1^n X_i\right) + \left(M - \sum_1^n M_i\right)$$

fällt, wie es sein muß (weil Gleichgewicht vorausgesetzt wurde), mit der ersten zusammen.

29) *Cremona-Saviotti*, Les figures réciproques, p. 10 u. folg.

30) Collegienheft von *F. Klein* 1896: Technische Mechanik (nicht publiziert).

Man betrachte nun folgende Reihe von Ebenen im Raume:

$$(4)\quad \begin{cases} z = 0, \\ z = x \cdot Y_1 - y \cdot X_1 + M_1, \\ z = x\sum_1^2 Y_i - y\sum_1^2 X_i + \sum_1^2 M_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z = x\sum_1^n Y_i - y\sum_1^n X_i + \sum_1^n M_i, \end{cases}$$

deren letzte mit der ersten ($z = 0$) zusammenfällt.

Die Elimination von z zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gleichungen (4) ergiebt die Gleichungen (1). *Die aufeinanderfolgenden Ebenen* (4) *schneiden sich also im Raume in geraden Linien, welche orthogonal projiziert die Aktionslinien der wirkenden Kräfte ergeben.*

Man eliminiere andererseits z zwischen den einzelnen Gleichungen (4) und der folgenden Gleichung:

$$(5)\qquad z = x \cdot Y - y \cdot X + M.$$

Man erhält dann gerade die Gleichungen (2), (3) der aufeinanderfolgenden Seiten unseres Seilpolygons. *Die Ebene* (5) *schneidet also die aufeinanderfolgenden Ebenen* (4) *in solchen Raumgeraden, die orthogonal projiziert die successiven Seiten des Seilpolygons ergeben. Die dreifach unendlich vielen Seilpolygone ergeben sich, wenn man der Ebene* (5) *alle möglichen Lagen erteilt.*

Aus dieser Darstellung lassen sich leicht die geometrischen Beziehungen erkennen, welche zwischen zwei Seilpolygonen, die zu dem nämlichen Kräftesysteme gehören, bestehen.

Weitere Sätze über die Konfigurationen zwischen den verschiedenen Seilpolygonen, die sich für das nämliche Kräftesystem zeichnen lassen, bezw. zwischen den Aktionslinien der Kräftesysteme, die sich dem nämlichen Seilpolygone zuordnen lassen, haben *L. Cremona*[31]), *W. Schell*[32]), *Th. Reye*[33]) sowie *G. Jung*[34]) gefunden.

8. Das Gelenkpolygon als Seilpolygon. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte, die an mit einander verbundenen

---

31) Le figure reciproche nella statica grafica, 3. ed., Milano 1879.

32) Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl., Leipzig 1880, Bd. 2, p. 74.

33) Acta math. 1 (1882), p. 93.

34) Ann. di mat. (2) 12 (1884), p. 169; Ist. Lomb. Rend. (2) 18 (1885), p. 337.

Körpern angreifen, hat *A. F. Moebius* gegeben[35]). Insbesondere hat *Moebius* die allgemeinen Sätze über das Gleichgewicht eines Gelenkpolygones gefunden und die Untersuchung für das Viereck und Fünfeck analytisch durchgeführt. Ein klarerer Einblick in die Gleichgewichtsbedingungen bei einem Gelenkpolygone wird gewonnen, wenn das Gelenkpolygon als ein Seilpolygon betrachtet, bezw. mit einem Seilpolygon in Verbindung gebracht wird, auf welches dann die gewöhnlichen Sätze der graphischen Statik angewandt werden können.

Greifen die Kräfte lediglich in den Gelenken an, so muss im Falle des Gleichgewichtes das Gelenkpolygon als ein zu den Kräften gehörendes Seilpolygon betrachtet werden können. In dem einfachen Falle eines Viereckes $ABCD$, den *W. Schell* behandelt[36]), ergiebt sich, dass die Aktionslinien l_1, l_2, l_3, l_4 der auf die Gelenke wirkenden Kräfte mit geschlossenem Kräftepolygon sich in vier Punkten E_1, E_2, F_1, F_2 schneiden, deren Verbindungslinien E_1E_2 und F_1F_2 durch die Schnittpunkte E und F der gegenüberliegenden Seiten des Gelenkviereckes gehen. Für das n-Eck hat *G. Jung* die Untersuchung durchgeführt[34]).

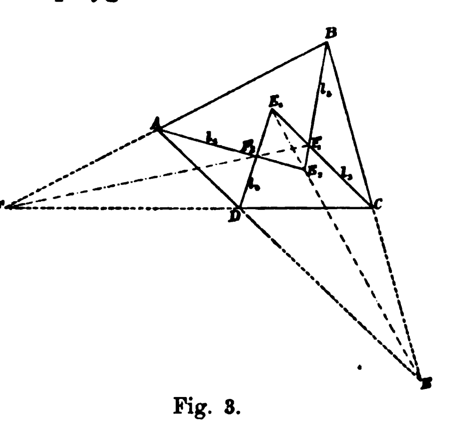


Fig. 3.

Den Fall, bei dem die Kräfte nicht in den Gelenken, sondern in beliebigen Punkten der Seiten des Gelenkpolygones angreifen, hat *F. P. Ruffini* analytisch mit Hülfe des Prinzipes der virtuellen Verrückungen behandelt[37]). Bei der graphischen Behandlung ist zu berücksichtigen, dass im Falle des Gleichgewichtes die Resultanten der auf die einzelnen Stäbe wirkenden Kräfte sich in durch die Gelenke des betreffenden Stabes hindurchlaufende Komponenten zerlegen lassen müssen, und zwar so, dass sich hierbei in jedem Gelenke zwei gleich grosse, aber entgegengesetzt gerichtete, Gelenkdrücke[38]) ergeben. Es muss sich somit für die Resultanten der auf die einzelnen Stäbe wirkenden Kräfte ein Seilpolygon konstruieren lassen, dessen Seiten durch die

35) Lehrbuch der Statik, Leipzig 1837, 2, Kap. 1—3.

36) *W. Schell*, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1. Aufl. Leipzig 1870, p. 632.

37) Bologna, Mem. (3) 10 (1879), p. 3.

38) *Gegenkräfte* nach *Moebius*.

aufeinanderfolgenden Gelenke hindurchgehen, d. h. mit anderen Worten: es muss sich ein Polygon zeichnen lassen, welches dem durch die Aktionslinien der Kräfte gebildeten Polygone einbeschrieben und dem Gelenkpolygon umschrieben ist.

In dem speziellen Fall, bei welchem auf einen Stab des Gelenksystemes eine Kraft wirkt und das Gelenksystem im Gleichgewicht gehalten werden soll durch eine an einem anderen Stab wirkende Kraft von gegebener Richtung, hat *A. B. W. Kennedy* eine graphische Lösung gegeben[39]). Die allgemeinere Aufgabe, bei einem Gelenkpolygone die Aktionslinie der auf die letzte Seite wirkenden Kraft für den Fall des Gleichgewichtes zu finden, wenn die Aktionslinien der auf die übrigen Seiten wirkenden Kräfte gegeben sind, hat *L. Henneberg* graphisch behandelt[40]).

9. Weitere Methoden für die graphische Zusammensetzung der Kräfte. Solche wurden ausser von *F. P. Ruffini*[41]) und *M. d'Ocagne*[42]) von *H. T. Eddy*[43]) und *H. Hollender*[44]) gegeben.

Eddy's Methode, welche von *C. Saviotti*[45]) weiter ausgebildet wurde, ist eine Verallgemeinerung des Seilpolygones. Bei dieser Methode des „*frame pencil*" oder „metodo del fascio funicolare" wird irgend ein Polygonzug gezeichnet, dessen Eckpunkte A_i in den aufeinanderfolgenden Kräften P_i liegen. Jede der Kräfte P_i lässt sich dann in eine Kraft durch einen beliebig wählbaren Punkt E und in Komponenten zerlegen, die in den in A_i zusammenkommenden Seiten des Polygonzuges liegen, und zwar so, dass zwei in derselben Seite des Polygonzuges wirkende Komponenten sich aufheben. Die Kräfte P_i werden hierdurch zurückgeführt auf die durch E gehende Resultante der in $EA_1, EA_2 \dots$ liegenden Komponenten und auf eine Kraft, welche die letzte Seite des Polygonzuges zur Aktionslinie hat.

---

39) Lond. Math. Soc. Proc. 9 (1878), p. 221.

40) Festschrift z. d. Jubelfeier d. 50jähr. Bestehens d. techn. Hochsch. z. Darmstadt (1886), p. 71.

41) Bologna, Mem. (4) 6 (1886), p. 83.

42) Nouv. ann. (2) 19 (1880), p. 115.

43) Van Nostrand's Engineering Magazine 10 (1878); Amer. J. of math. 1 (1878), p. 322.

44) *H. J. Hollender,* Über eine graphische Methode zur Zusammensetzung von Kräften, Leipzig 1896.

45) Roma, Acc. dei Linc. Atti (Mem.) (3) 3 (1879), p. 240 und La statica grafica 2, Milano 1888, p. 29—33. *Saviotti* untersucht auch die Beziehung dieser Methode zu den reziproken Figuren der graphischen Statik vgl. unten Nr. 11 resp. Nr. **12.**

So lassen sich die drei Kräfte P_1, P_2, P_3 in l_1, l_2, l_3, zu welchen das Kräftepolygon c_0, c_1, c_2, c_3 und eine Resultante R von der Grösse und Richtung der Linie $\overline{c_0 c_3}$ gehört, zurückführen auf eine Kraft in EA von der Grösse und Richtung der Linie $\overline{c_0 b_3}$ und in eine solche von der Grösse und Richtung der Linie $\overline{b_3 c_3}$ in der letzten Seite $A_3 A$ des Polygonzuges. Die Resultante R der Kräfte P_1, P_2, P_3 liegt in l, wo $l \parallel c_0 c_3$.

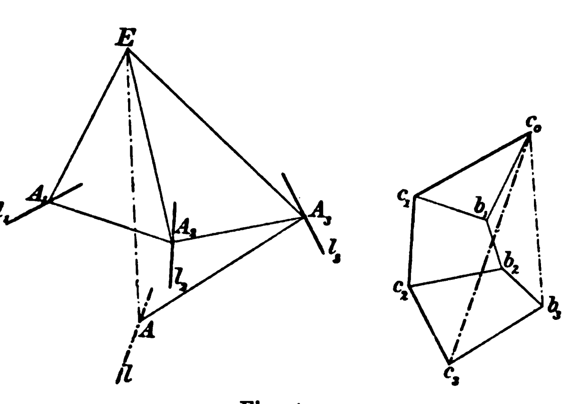


Fig. 4.

Gehen die zu den Seiten des Polygonzuges parallelen Linien $c_1 b_1$, $c_2 b_2$, $c_3 b_3$ durch denselben Punkt, so geht die Methode in diejenige des Seilpolygones über.

Eine Vereinfachung tritt ein, wenn an die Stelle des Polygonzuges eine gerade Linie L gesetzt wird[46]). Es sind dann die Kräfte P_i in je zwei Komponenten zu zerlegen, von denen die eine durch einen angenommenen Punkt E geht, während die

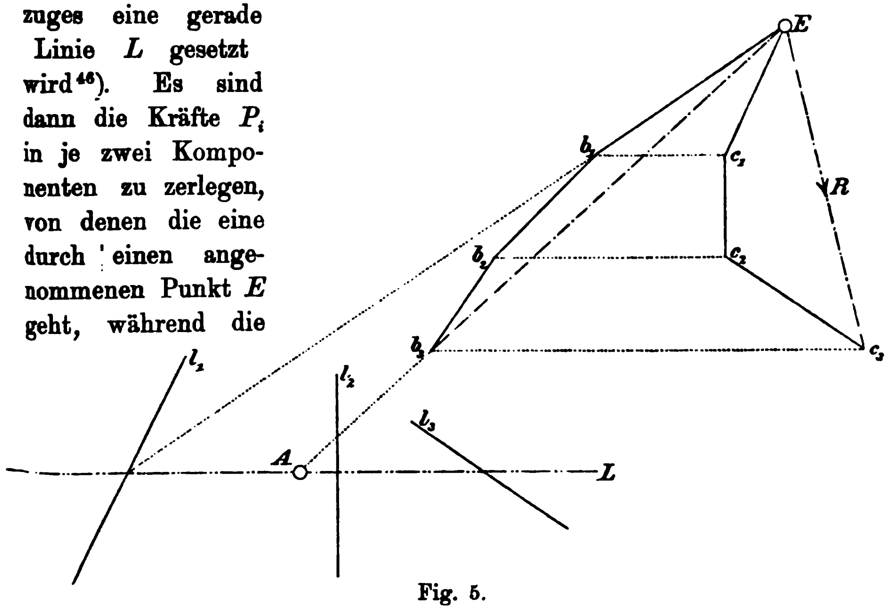


Fig. 5.

46) Mit diesem speziellen Fall beschäftigt sich *H. J. Hollender* und benutzt denselben auch zur Bestimmung des statischen Momentes und des Trägheitsmomentes.

andere in einer vorgeschriebenen Geraden L liegt. An die Stelle des Seilpolygones tritt das Polygon aus den durch E gehenden Komponenten der Kräfte P_i (*Komponentenpolygon*). In der umstehenden Zeichnung ist die Resultante der in l_1, l_2, l_3 liegenden Kräfte P_1, P_2, P_3 bestimmt. E, c_1, c_2, c_3 ist das Kräftepolygon. Die Resultante R der Kräfte P_1, P_2, P_3, welche der Grösse und Richtung nach durch die Schlusslinie $\overline{Ec_3}$ des Kräftepolygones bestimmt ist, geht durch den Schnittpunkt A der Schlusslinie Eb_3 des Komponentenpolygones mit der Geraden L (s. Fig. 5).

Diese Methode der Zusammensetzung der Kräfte leistet im wesentlichen dieselben Dienste, wie diejenige des Kräfte- und Seilpolygones.

10. Kräftekurve und Seilkurve. Bei einer kontinuierlichen Folge von Kräften geht das Kräftepolygon in eine Kräftekurve und das Seilpolygon in eine Seilkurve über[47]. Die Seilkurve kann angesehen werden als die orthogonale Projektion des Schnittes einer abwickelbaren Fläche, deren Erzeugende sich in die Aktionslinien der Kräfte projizieren (vgl. Nr. 7). Die Tangenten der Seilkurve sind hierbei parallel zu den entsprechenden vom Pole ausgehenden Diagonalen der Kräftekurve. Die Kraft, welche auf ein Längenelement ds der Seilkurve wirkt, wird in der Kräftekurve durch die beiden Diagonalen ausgeschnitten, die parallel sind zu den Tangenten der Seilkurve in den Endpunkten des Längenelementes ds. Um die Seilkurve zu konstruieren, welche sich aus einer gegebenen Kräftekurve ergiebt, ist es erforderlich die Kräftekurve zunächst durch ein Kräftepolygon zu ersetzen, das sich derselben möglichst anschmiegt. Wird hierzu ein Kräftepolygon gewählt, das der Kräftekurve eingeschrieben ist, so ist das sich ergebende Seilpolygon der gesuchten Seilkurve umschrieben und würde daher nachträglich durch eine einbeschriebene Kurve zu ersetzen sein.

Ergeben sich die Spannungen in der Seilkurve als Zugspannungen, so stellt die Seilkurve die Gleichgewichtsfigur eines Seiles dar, auf welches die durch die Kräftekurve bestimmten Kräfte wirken. Sind die Kräfte Schwerkräfte, so wird die Seilkurve als *Kettenlinie* bezeichnet.

Sind die Spannungen in der Seilkurve Druckspannungen, so wird die Seilkurve als *Drucklinie* bezeichnet. Diese *Drucklinien* oder *Stützlinien* haben in der Gewölbetheorie eine grosse Bedeutung, da sie herkömmlicher Weise benutzt werden, um zu untersuchen, wie

47) *Varignon,* Nouvelle mécanique, t 1, p. 201 u. folg. Siehe auch *C. Saviotti,* La statica grafica 2, p. 187 u. folg.

sich der Druck im Inneren eines Gewölbes fortpflanzt und auf die Lager wirkt. Mit Hülfe der Beziehungen, welche zwischen den Seilpolygonen bestehen, die sich für ein vorgeschriebenes Kräftesystem konstruieren lassen (Nr. 6), ist man imstande Seilkurven zu finden, welche vorgeschriebenen Bedingungen genügen, z. B. eine Stützlinie bei vorgeschriebener Belastung zu finden, welche durch zwei gegebene Punkte geht und eine bekannte Höhe hat. Welche der Seilkurven, die sich bei vorgeschriebener Belastung zeichnen lassen, als Stützlinie eines Gewölbes einzuführen ist, erfordert eine besondere Untersuchung, die in der Gewölbetheorie durchgeführt wird.

11. Kräfte mit demselben Angriffspunkt. Reziproke Figuren. Wird zu einem System von Kräften mit demselben Angriffspunkt O ein Kräftepolygon mit dem Pol O' und ein Seilpolygon konstruiert, so ergeben sich zwei vertauschungsfähige Figuren, insofern als das

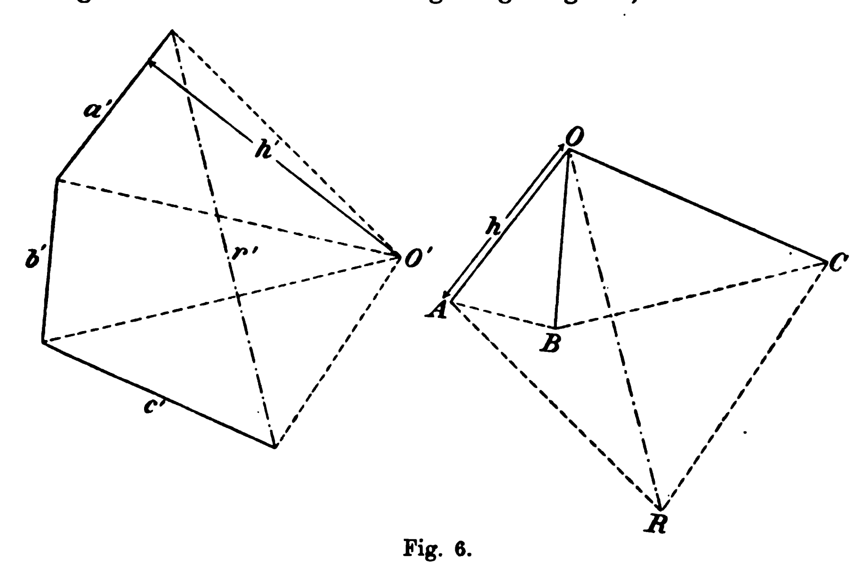


Fig. 6.

anfängliche Kräftepolygon auch aufgefasst werden kann als ein Seilpolygon für Kräfte mit dem Angriffspunkte O', für welches das anfängliche Seilpolygon in das Kräftepolygon übergeht. *Culmann* bezeichnet demgemäss Kräfte- und Seilpolygon für Kräfte mit demselben Angriffspunkt als *reziproke Figuren* und die Punkte O und O' als Pole *der Reziprozität* (s. Fig. 6). *Jede der beiden reziproken Figuren kann als Kräfteplan* (Nr. 5) *für die andere angesehen werden.*

Wird jedem Knotenpunkte A des Seilpolygones die entsprechende zum Polstrahle OA parallele Seite a' des Kräftepolygones zugeordnet,

so ergiebt sich der Satz: *Das Produkt aus den Entfernungen entsprechender Elemente von den beiden Polen ist konstant*:

$$h \cdot h' = \text{const.}$$

Die Reziprozität ist demgemäss durch die beiden Pole O, O' und ein Elementenpaar A, a', wo $OA \parallel a'$, bestimmt, oder auch statt dessen durch zwei beliebig gewählte Elementenpaare[48]).

Die Beziehung, welche zwischen zwei Seilpolygonen des nämlichen Kräftesystemes besteht (Nr. **6**), geht bei Kräften mit demselben Angriffspunkt in eine *Kollineation* über und zwar für den Angriffspunkt der Kräfte als Centrum und für die Parallaxe als Kollineationsaxe. Diese Kollineation geht in dem speziellen Falle, in welchem der Schnittpunkt O der Aktionslinien der Kräfte in das Unendliche fällt, die Kräfte also parallel werden und das Kräftepolygon in eine einzige zu den Kräften parallele Gerade fällt, in eine *Affinität* über.

Allgemein werden von *J. C. Maxwell*[49]) zwei ebene geradlinige Figuren, von denen die eine aus den Aktionslinien der Spannungen eines Gleichgewichtssystemes, die andere aus dem zugehörenden Kräfteplan gebildet ist, als *reziproke Figuren* bezeichnet, sobald die beiden Figuren in der Weise vertauschungsfähig sind, dass umgekehrt die erste Figur auch aufgefasst werden kann als Kräfteplan für Spannungen, welche die Linien der zweiten Figur als Aktionslinien haben und an ihr im Gleichgewichte stehen. Wird in der ersten Figur dem Angriffspunkte A einer Kraft diejenige Strecke der zweiten Figur zugeordnet, welche die Grösse und Richtung derselben angiebt, so wird, wenn einige der Kräfte denselben Angriffspunkt haben, bezw. deren Aktionslinien sich in demselben Punkt A schneiden, diesem Punkt A in der zweiten Figur ein Polygonzug entsprechen müssen, welcher geschlossen ist.

12. Allgemeine Theorie der reziproken Figuren. Wir berichten nunmehr über *Maxwell*'s weitere Untersuchungen der reziproken Figuren, die insbesondere für die Theorie der Fachwerke so wichtig geworden sind (s. u. Nr. **33**).

Maxwell untersucht zunächst[49]), wann überhaupt sich zu einem Spannungssystem eine reziproke Figur konstruieren lässt, und findet:

Dann und nur dann ergeben sich zwei reziproke Figuren, wenn die eine Figur als Projektion eines Polyeders betrachtet werden kann.

Die andere Figur erscheint dann ebenfalls als Projektion eines

---

48) *Culmann*, Gr. St., p. 86 u. 87, sowie 2. Aufl. p. 284.

49) Phil. Mag. (4) 27 (1864), p. 250.

ɔlyeders. (Man vgl. Fig. 6, deren beide Teile als Projektionen erseitiger Pyramiden mit den Spitzen in O bez. O' angesehen erden können.) Die Beziehung der beiden Polyeder ist dabei die, ıss jeder Ecke des einen Polyeders eine Seitenfläche des anderen ıgeordnet ist und umgekehrt, also eine Beziehung derselben Art, ie sie bei der *Polarreziprozität hinsichtlich einer Fläche 2. Grades* ıftritt. Und in der That gelang es *Maxwell*, die Beziehung der ıiden Polyeder durch eine solche Polarreziprozität zu ermitteln[50]). r drehte zu diesem Zwecke die eine ebene Figur gegen die andere n 90°. Die beiden zugehörigen Raumpolyeder erscheinen dann rekt als Polarpolyeder in Bezug auf ein Rotationsparaboloid, dessen otationsaxe senkrecht zur Ebene der Zeichnung steht.

Die Drehung um 90° ist immerhin unbequem. Um sie zu vereiden wurde von *L. Cremona* an Stelle des Rotationsparaboloides ɪr Begründung der reziproken Figuren der graphischen Statik das *'oebius'sche Nullsystem* gesetzt. *Die reziproken Figuren ergeben sich rekt als orthogonale Projektion von Polyedern, die in Bezug auf ein ullsystem polarreziprok sind, dessen Axe zur Ebene der Zeichnung ɴkrecht steht*[51]). In der That ergeben zwei in Bezug auf das Nullstem konjugierte Raumgerade vermöge dieser Projektion auf die ɪichnungsebene zwei parallele Gerade.

Für die Herstellung reziproker Figuren leistet die frühere ethode von *Maxwell* an sich das nämliche, wie diejenige von *Creɔma.* Wenn es daher auch nicht so wichtig ist, ob bei der Herɪllung des reziproken Kräfteplanes das Rotationsparaboloid oder das ullsystem zu Grunde gelegt wird, so ist doch immerhin durch die nführung des Nullsystems und die Vermeidung der Drehung des :äfteplanes in theoretischer Richtung eine Abrundung erzielt.

Während *Cremona* bei der Herstellung der reziproken Figuren genüber dem Polarsystem des Rotationsparaboloides bei *Maxwell* s Nullsystem zu Grunde legt, stellte sich *G. Hauck*[52]) die Frage, ı sich nicht durch das Polarsystem einer dreiaxigen Fläche zweiter ·dnung das nämliche erreichen lässt, wenn die orthogonale Projekɔn, die bei *Maxwell* und *Cremona* allein verwandt ist, durch eine hiefe Parallelprojektion bezw. durch Centralprojektion ersetzt wird. ierbei ergab sich, sofern noch geeignete Umklappungen hinzugefügt ɪrden, der Satz:

---

50) Zunächst mitgeteilt 1867 in den Reports der British Association, dann ɪsführlicher Edinb. Roy. Soc. Trans. 26 (1872), p. 1.

51) *L. Cremona*, Le figure reciproche nella statica grafica, Milano 1872.

52) J. f. Math. 100 (1887), p. 365 und 120 (1899), p. 109.

Ein ebenes Stabnetz und ein zugehöriges Kräftenetz können angesehen werden als die Projektionen zweier reziproken Polyedergebilde im Polarsystem irgend einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung auf eine Projektionsebene, welche parallel zu einer cyklischen Ebene ist; und zwar das Stabnetz als schiefe Parallelprojektion in der Richtung des zugehörigen konjugierten Durchmessers, das Kräftenetz als Centralprojektion aus dem Mittelpunkt des Polarsystemes. Beim hyperbolischen Paraboloid tritt an die Stelle der cyklischen Ebene die Ebene eines gleichseitigen Hyperbelschnittes.

Den Nachweis, dass allgemein die Wirkungslinien der Kräfte eines beliebigen ebenen Kräftesystemes zusammen mit einem zugehörigen Seilpolygon einerseits und das entsprechende Kräftepolygon nebst den Linien, welche seine Ecken mit dem Pole des Seilpolygons verbinden, andererseits im *Maxwell*'schen Sinne als reziproke Figuren angesehen werden können, hat zuerst *L. Cremona* geführt. Die zugehörigen Raumfiguren ergeben sich direkt durch die in Nr. 7 berührten Entwickelungen. Die Ecken

$$0,\ 0;\quad X_1,\ Y_1;\quad \sum_1^2 X_i,\ \sum_1^2 Y_i;\ \ldots$$

des Kräftepolygons erscheinen als orthogonale Projektionen von Raumpunkten, die folgende Koordinaten haben:

$$(1)\qquad 0,\ 0,\ 0;\quad X_1,\ Y_1,\ M_1;\quad \sum_1^2 X_i,\ \sum_1^2 Y_i,\ \sum_1^2 M_i;\ \ldots,$$

ebenso der Pol

$$X,\ Y$$

des Kräftepolygons als Projektion des Raumpunktes

$$(2)\qquad X,\ Y,\ M.$$

Man ordne nun jedem Raumpunkte ξ, η, ζ vermöge des Nullsystems

$$(3)\qquad z - \zeta = x\eta - y\xi$$

eine (durch ihn hindurchgehende) Ebene zu. Trägt man hier für ξ, η, ζ die Werte (1), bezw. (2) ein, so erhält man genau die Ebenen (4), bezw. (5) der Nr. 7. — In ganz entsprechender Weise lässt sich übrigens die allgemeine Theorie der reziproken Figuren von *Maxwell-Cremona* analytisch formulieren (*Klein*).

Auch die von *Eddy* gefundene Methode der Zusammensetzung der Kräfte (s. Nr. 9 und insbes. Fig. 4) führt auf reziproke Figuren.

13. Zerlegung einer Kraft in Komponenten in derselben Ebene. Nach dem Parallelogrammgesetze müssen zwei Kräfte P_1 und P_2, die eine gegebene Kraft P ersetzen sollen, in zwei Linien wirken, die

sich auf der Aktionslinie von P schneiden und mit ihr in derselben Ebene liegen, im übrigen aber willkürlich zu wählen sind. *Culmann* behandelt im besonderen den Fall, dass diese Linien durch zwei gegegebene Punkte A und B gehen sollen. Ihr Schnittpunkt S kann dann auf der Aktionslinie g von P beliebig angenommen werden. Ist er gewählt, so geschieht die Zerlegung durch ein Kräftepolygon, in

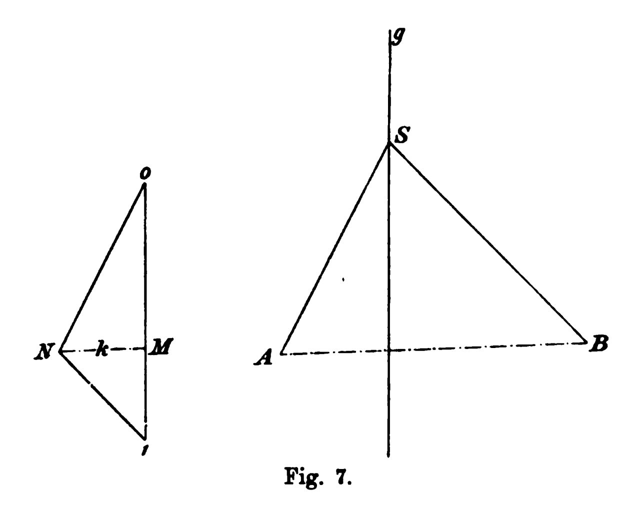


Fig. 7.

diesem Falle ein Dreieck (s. Fig. 7). Man zeigt leicht, dass hierbei der Schnittpunkt N der beiden die Komponenten P_1 und P_2 liefernden Linien $\overline{ON}$ und $\overline{N1}$ auf einer ganz bestimmten zu AB parallelen Geraden k liegt. Durch den Schnittpunkt mit dieser Geraden k wird also die Strecke $\overline{O1}$ so geteilt, dass $\overline{OM}$ und $\overline{M1}$ die einem unendlich fernen Punkte S entsprechenden parallelen Komponenten von P darstellen.

Für die Zerlegung einer Kraft in drei Komponenten in drei gegebenen Geraden haben *A. Ritter*[53]) und *Culmann*[54]) Methoden angegeben[55]). *A. Ritter* bestimmt die Komponenten durch den Satz vom statischen Moment, indem er, um Gleichungen zu erhalten, die nur je eine Unbekannte haben, die Drehpunkte in den Schnittpunkten der Aktionslinien der Komponenten annimmt[56]). *Culmann* findet die

53) Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen, Hannover 1863.

54) Gr. St., p. 363.

55) Auch *Hollender* giebt eine Methode für die Zerlegung einer Kraft in zwei und drei Komponenten.

56) Die *Ritter*'sche Methode pflegt im Gegensatz zu der *Culmann*'schen als eine rein analytische angesehen zu werden. Dies ist nicht richtig, da sich mit

drei in g_1, g_2, g_3 liegenden Komponenten durch die Bemerkung, dass die Resultante Q der beiden in g_1 und g_2 liegenden Komponenten einerseits durch den Schnitt von g_1 und g_2 und andererseits durch denjenigen von g_3 mit der gegebenen und zu zerlegenden Kraft P gehen muss.

B. Das ebene Kräftesystem. Anwendungen.

Die in den folgenden Nummern **14—23** zur Besprechung kommenden Anwendungen sind allgemein geometrisch und analytisch bereits in dem voraufgehenden Artikel (IV 4, *Jung*) behandelt, auf den wegen der Einzelheiten überall verwiesen sei; der vorliegende Artikel bringt ergänzend die graphischen Konstruktionen.

14. Graphische Schwerpunktsbestimmung. Die Bestimmung des *Mittelpunktes* eines Systemes von parallelen Kräften in derselben Ebene, bezw. des *Schwerpunktes* eines ebenen Systemes, läuft auf eine zweimalige Zusammensetzung der parallelen Kräfte in zwei verschiedenen Richtungen hinaus. Die beiden gefundenen Resultanten bestimmen durch ihren Schnittpunkt den gesuchten Mittelpunkt. In dieser Weise wird von *Culmann*[57]) die graphische Bestimmung des Schwerpunktes mit Hülfe von zwei Seilpolygonen ausgeführt. Handelt es sich hierbei um den Schwerpunkt einer gleichmässig belasteten Polygonfläche, so zerlegt *Culmann* dieselbe in lauter Dreiecke mit derselben Spitze, die er dann auf die nämliche Grundlinie bringt. Der Schwerpunkt der Polygonfläche ergiebt sich als Mittelpunkt eines Systemes von parallelen Kräften, die in den Schwerpunkten der einzelnen Dreiecke angreifen, und deren Grössen proportional sind den gefundenen Höhen der auf dieselbe Grundlinie gebrachten Dreiecke. Im Falle von nicht geradlinig begrenzten Flächen zerlegt *Culmann* dieselben durch parallele Linien in gleich breite Streifen, die näherungsweise als Trapeze betrachtet werden. Die Bestimmung der jedesmaligen Resultante wird in allen diesen Fällen durch das Seilpolygon bewerkstelligt.

15. Weitere graphische Methoden für die Schwerpunktsbestimmung. Andere graphische Schwerpunktsbestimmungen finden sich schon bei *G. Monge*[58]), *A. F. W. Brix*[59]) und anderen[60]). Hierbei

Momenten auf Grund der Darstellung derselben durch Flächen ebenso gut konstruieren, wie rechnen lässt.

57) bezw. von *Poncelet,* Fussn. 8.

58) Traité élémentaire de statique, ch. III, Paris 1810.

59) Lehrbuch der Statik fester Körper, 2. Aufl. Berlin 1849, Kap. 5.

60) S. auch *L. Cremona,* Elemente des graphischen Calculs. Übers. von *M. Curtze,* Kap. 8, Leipzig 1875.

wird vielfach der Satz vom statischen Momente der Kräfte verwandt. Häufig wird auch der Schwerpunkt erst durch Rechnung bestimmt und dann für den Rechnungsausdruck eine Konstruktion gegeben. Auch *Culmann* verfährt so in einer Reihe von Fällen[61]). Von *Brix* wird schon eine allgemeine Methode angegeben, um den Schwerpunkt der Fläche eines Polygones zu finden. Dieselbe beruht darauf, dass die Verbindungslinie der Schwerpunkte zweier Polygone, in welche das gegebene Polygon durch eine Diagonale zerfällt, eine Schwerlinie des gegebenen Polygones ist. Auf diese Weise wird die Bestimmung des Schwerpunktes eines Polygones auf diejenige von Polygonen mit weniger Eckpunkten, somit in letzter Linie auf die von Dreiecken zurückgeführt[62]).

Weitere allgemeine Methoden für die graphische Bestimmung des Schwerpunktes einer Polygonfläche sind von *Most*[63]), *A. Laisant*[64]) und *J. Gysel*[65]) angegeben.

16. Bestimmung des statischen Momentes einer Kraft durch das Seilpolygon. Aus dem Kräfte- und Seilpolygon lässt sich nach

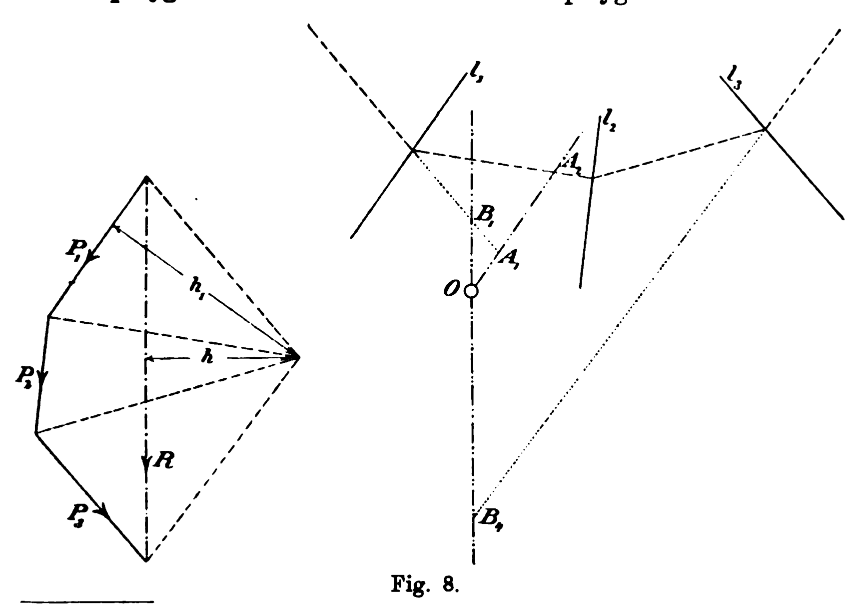


Fig. 8.

---

61) So z. B. bei dem Schwerpunkt des Trapezes, des Kreis- und Parabelabschnittes, Gr. St., p. 149.

62) Für Polygone, welche eine grössere Zahl von Eckpunkten haben, wird die Methode unübersichtlich, und demgemäss wird von *Brix* in solchen Fällen die Rechnung empfohlen.

63) Arch. d. Math. 49 (1869), p. 355. Die Methode ist auch anwendbar auf Polyeder.

64) Nouv. ann. (2) 16 (1877), p. 407, sowie Bull. Soc. math. de France 10

Culmann das statische Moment irgend einer der Kräfte oder auch der Resultante einer Gruppe von aufeinanderfolgenden Kräften angeben, und zwar *ist das Moment einer Kraft P in Bezug auf einen Drehpunkt O gleich dem Produkte aus der Strecke, welche auf einer durch O zu P parallelen Geraden durch die beiden sich auf P schneidenden Seiten des Seilpolygones ausgeschnitten wird, und dem Abstande des Poles von der betreffenden Kraft im Kräftepolygon.* So ist (Fig. 8) $\overline{A_1A_2}\cdot h_1$ das Moment der in l_1 liegenden Kraft P_1, und $\overline{B_1B_4}\cdot h$ dasjenige der Resultante von P_1, P_2, P_3 für O als Drehpunkt. Wichtigkeit erlangt diese Darstellung des Momentes erst bei parallelen Kräften[66] (Fig. 9). Die Momente aller Kräfte werden dann gleich auf dieselbe Basis reduziert und bei demselben Drehpunkt O auf der nämlichen Geraden ausgeschnitten. So ist bei den in l_1, l_2, l_3 liegenden Kräften P_1, P_2, P_3 für O als Drehpunkt:

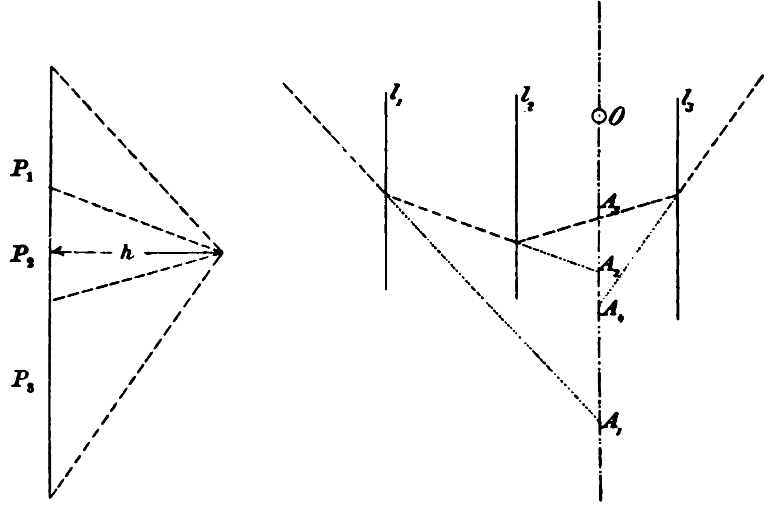


Fig. 9.

$$\text{das Moment von } P_1 = \overline{A_1A_2}\cdot h,$$
$$\text{das Moment von } P_2 = \overline{A_2A_3}\cdot h,$$
$$\text{das Moment der Resultante der Kräfte } P_1, P_2, P_3 = \overline{A_1A_4}\cdot h.$$

Auf diesem Verfahren beruht die *Culmann*'sche Darstellung des *Biegungsmomentes* beim belasteten Balken.

(1882), p. 40. Im Anschluss daran die Arbeit von *E. Laquière*, Bull. Soc. math. de France 10 (1882), p. 131.

65) Arch. sciences phys. (3) 32 (1894) p. 275.

66) Die von *Hollender* gegebene Methode zur Bestimmung des Momentes hat in dem allgemeinen Falle manche Vorzüge, vgl. Fussnote 46.

17. Biegungsmoment. Biegungsmomentenfläche. Einflusslinie. Die Kenntnis des Biegungsmomentes ist erforderlich, wenn es sich um die Untersuchung der Festigkeit eines belasteten Balkens handelt. Bevor an die Bestimmung des Biegungsmomentes herangetreten werden kann, sind die *Lagerreaktionen* zu finden, welche bei zwei Lagern durch die Bedingung bestimmt sind, dass sie den den Balken belastenden Kräften das Gleichgewicht halten müssen. Diese Lagerreaktionen lassen sich auf Grund der in Nr. 13 für die Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten angegebenen *Culmann*'schen Methode in folgender Art finden. Nach Konstruktion des Kräftepolygones, das ganz in eine vertikale gerade Linie fällt, und des Seilpolygones ist die *Schlusslinie* des letzteren zu ziehen, d. h. die Verbindungslinie der Punkte, in denen die äussersten Seilpolygonseiten die vertikalen Aktionslinien der Lagerreaktionen schneiden. Die durch den Pol des Kräftepolygones gehende, zu dieser Schlusslinie parallele Gerade teilt die vertikale Strecke, welche das Kräftepolygon bildet, so, dass die Stücke die Lagerreaktionen ergeben[67]).

Unter Biegungsmoment (moment fléchissant, moment of flexure, momento flettente) wird verstanden die Summe aus den Drehmomenten derjenigen Kräfte, welche auf der einen Seite des zu betrachtenden Querschnittes liegen, und zwar für die in dem Querschnitte liegende Biegungsaxe als Drehungsaxe. Für vertikale Kräfte, welche in derselben Ebene liegen, die eine Symmetrieebene für den Balken ist, und für zur Längsaxe des Balkens senkrechte Querschnitte ist die Biegungsaxe die horizontale Schwerlinie des Querschnittes. Es kann demgemäss in diesem Falle das Biegungsmoment definiert werden als *die Summe der Drehmomente der auf der einen Seite liegenden Kräfte für einen Punkt der Axe als Drehpunkt.*

Wird nach *Culmann* die Fläche, welche durch das für die Kräfte konstruierte Seilpolygon und dessen Schlusslinie begrenzt ist, die *Momentenfläche* und deren Höhe an irgend einer Stelle die *Momentenhöhe*, bezw. die *Ordinate der Momentenfläche*, genannt, so ergiebt sich der Satz: *Das Biegungsmoment eines belasteten Balkens ist gleich dem Produkte aus der Momentenhöhe und dem Polabstand.*

Das Biegungsmoment für den Querschnitt AB ist gleich $m \cdot h$. Für die Dimensionenbestimmung des Balkens kommt das grösste

67) Vgl. Fig. 10 auf p. 370. Die beiden den Balken belastenden Kräfte P_1 und P_2, welche im Kräftepolygon durch die Strecken $P_1 = \overline{01}$ und $P_2 = \overline{12}$ dargestellt sind, liefern in den Lagerpunkten die beiden Lagerreaktionen $R_1 = \overline{MO}$ und $R_2 = \overline{2M}$.

Biegungsmoment (*Maximalmoment*) in Betracht. In beistehender Figur würde dasselbe gleich $m' \cdot h$ sein.

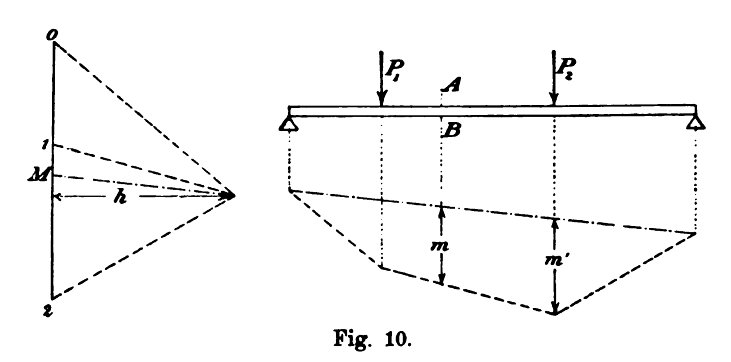


Fig. 10.

Culmann giebt eine Regel für das Vorzeichen des Biegungsmomentes, welche auch den Fall erledigt, bei dem die Vertikale in irgend einem Punkte der Axe aus der Begrenzung der Momentenfläche mehr als zwei Punkte ausschneidet[68]).

Es kommt häufig vor, dass der Balken durch eine auf den ganzen Balken oder auf einen Teil desselben stetig wirkende Belastung beansprucht ist. Die Begrenzung der Momentenfläche, bezw. das Seilpolygon aus den wirkenden Kräften, geht dann für den betreffenden Teil des Balkens in eine Kurve über (vgl. Nr. **10**), und das Maximalmoment findet sich an einer Stelle, an welcher die Tangente dieser Kurve parallel zur Schlusslinie der Momentenfläche ist, vorausgesetzt, dass das Maximalmoment sich überhaupt im Innern des betreffenden Intervalls befindet.

In vielen Fällen ist es zweckmässig, die vorhandene Belastung in Teile zu zerlegen und die Momentenfläche jedes Teiles für sich zu bestimmen. Ist hierbei der Polabstand jedesmal derselbe, so ergiebt sich die *Höhe* der *resultierenden Momentenfläche* aus den Momentenhöhen der für die Einzelbelastungen gezeichneten Momentenflächen durch eine algebraische Addition. Besonders wichtig ist eine derartige Zerlegung der Belastung, wenn ausser einer unveränderlichen Belastung eine *bewegliche Last* vorhanden ist. Mit diesem Falle und der dann erforderlichen Bestimmung des Maximalmomentes hat sich schon *Culmann* beschäftigt[69]). Das Verfahren besteht im wesentlichen darin, dass anstatt der Last der Balken verschoben wird. Es ist dann möglich, das Kräfte- und Seilpolygon beizubehalten und nur

68) Gr. St., 2. Aufl. Zürich 1875, p. 334.
69) Gr. St., p. 129 u. f.; siehe auch *Levy*, La statique graphique, Paris 1886.

die Schlusslinie des letzteren der Lage des Balkens entsprechend zu ändern. *Die Schlusslinien des Seilpolygones umhüllen hierbei eine Parabel, und die Höhe der durch das Seilpolygon und diese Parabel begrenzten Fläche liefert für die verschiedenen Stellungen der bewegten Last das sich aus derselben ergebende Maximalmoment.* Sind mehrere bewegte Lasten vorhanden, die unter sich in fester Verbindung stehen, so tritt an die Stelle der Parabel ein Linienzug, der sich aus mehreren Parabelbögen zusammensetzt.

Im Gegensatz zu *Culmann* nimmt *W. Stahl*[70]) und nach ihm *H. G. Zeuthen*[71]) die Schlusslinie des Seilpolygones als unveränderlich an und verschiebt das Lastensystem statt des Balkens. Bei Beibehaltung des Polabstandes ergeben sich dann bezüglich der Änderung, welche das Seilpolygon erfährt, die Sätze:

Jeder Eckpunkt des Seilpolygones bewegt sich auf einer Parabel, alle diese Parabeln sind untereinander kongruent und gleich gerichtet. Jede Seite des Seilpolygones dreht sich um einen festen Punkt, und zwar ist dieser Punkt der Schnittpunkt der beiden Parabeln, in welchen sich die Endpunkte dieser Seite bewegen.

W. Stahl zeigt, wie sich mit Hülfe dieser Sätze die *Maximalmomentenkurve* bestimmen und das *absolute Maximum* finden lässt[72]).

Von *J. Weyrauch*[73]) werden zur Untersuchung der Träger bei Einwirkung einer beweglichen Last die sog. *Influenz-* oder *Einflusslinien* eingeführt. Unter der *Einflusslinie* für irgend eine vorgeschriebene Stelle E des Balkens bez. des Trägers wird hierbei eine Linie verstanden, deren Ordinaten für die verschiedenen Lagen der bewegten Last den Einfluss derselben auf die Stelle E ausdrückt, also hier das Biegungsmoment, welches sich bei den verschiedenen Lagen der bewegten Last für die Stelle E ergiebt. In beistehender Figur (Fig. 11) stellt $AE'B$ die Einflusslinie für die Stelle E dar. Ist in derselben $\overline{EE'}$ das Biegungsmoment für den Querschnitt E, wenn die Last sich in E befindet, so ist

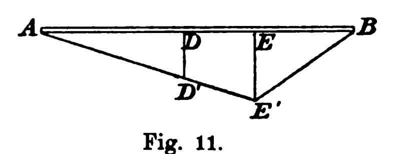


Fig. 11.

70) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 21 (1877), p. 7.

71) Tekn. Foren. Tidsskr. 1877.

72) Vgl. *J. Schlotke*, Civiling. (2) 31 (1885), p. 501, sowie *H. T. Eddy*, Zeitschr. f. Bauwesen 40 (1890), p. 397.

73) Allgemeine Theorie u. Berechnung d. kontinuierlichen und einfachen Träger, Leipzig 1873, p. 50; Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 21 (1875), p. 467. Die Untersuchungen von *J. Weyrauch* sind mehr analytisch.

$\overline{DD'}$ das Biegungsmoment für denselben Querschnitt, wenn die Last in D ist.

Diese Einflusslinien haben für den Fall einer beweglichen Last eine grosse Bedeutung erlangt nicht allein beim Balken, sondern auch bei den Fachwerken[74]).

18. Konstruktion des Trägheitsmomentes durch das Seilpolygon. Zur graphischen Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Systemes von Massenpunkten, die in den Punkten A_i einer Ebene E liegen, für eine Trägheitsaxe g in E zeichnet *Culmann* nach Ersetzung der Massen durch Kräfte P_i, welche in A_i angreifen und parallel zu g sind, das Kräfte- und Seilpolygon. Darauf wird ein zweites Seilpolygon gezeichnet für ein gleichgerichtetes und zu der Geraden g paralleles System von ebenfalls in den Punkten A_i angreifenden Kräften, wobei die Grössen dieser Kräfte gleich den Strecken zu nehmen sind, die aus der Trägheitsaxe g durch je zwei aufeinanderfolgende Seiten des ersten Seilpolygones geschnitten werden. Hat der Polabstand bei beiden Kräftepolygonen die nämliche Grösse h, so besitzt das Trägheitsmoment für die Axe g den Wert

$$J = \overline{AB} \cdot h^2,$$

wo $\overline{AB}$ die Strecke ist, welche durch die äussersten Seiten des zweiten Seilpolygones aus g geschnitten wird[75]).

Beistehend (Fig. 12) ist die Konstruktion des Trägheitsmomentes durchgeführt für die drei in A_1, A_2, A_3 angreifenden Kräfte $P_1 = \overline{01}$, $P_2 = \overline{12}$, $P_3 = \overline{23}$ und für die Axe g als Trägheitsaxe.

Nach einer Bemerkung von *Mohr*[76]) dient das zweite Seilpolygon nur dazu, um den Inhalt des Flächenstückes zu finden, welches durch

74) Graphisch sind die Einflusslinien von *W. Fränkel,* Civiling. (2) 22 (1876), p. 442 behandelt. Weiter ausgebildet und auf die Fachwerkträger angewandt ist die Theorie der Einflusslinien wesentlich von *H. Müller-Breslau.* Siehe auch *M. Levy,* La statique graphique 2 ed., Paris 1886, t. 2, p. 39.

75) Durch dieses Verfahren wird die Bestimmung des Trägheitsmomentes auf zweimalige Bestimmung von statischen Momenten zurückgeführt, s. auch Nr. 16. In entsprechender Weise konstruiert *Culmann* die höheren Momente. Es ist dies derselbe Gedanke, der in IV 4, Nr. 11 (*Jung*) zur Konstruktion des einem Massensystem zugehörigen Antipolarsystems benutzt wird.

76) Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 16 (1870), p. 41. Umgekehrt kann daher auch das Seilpolygon zur Bestimmung des Inhaltes eines Flächenstückes verwandt werden. Später hat *Culmann* gezeigt (Gr. St. 2. Aufl., p. 21), dass das Seilpolygon als Summationspolygon sich allgemein zur Konstruktion eines Ausdruckes von der Form $\sum_1^n x_i \frac{\Delta P_i}{H_i}$ benutzen lässt.

das erste Seilpolygon und die Trägheitsaxe begrenzt ist, und dessen Inhalt auch auf andere Weise z. B. durch das Planimeter bestimmt werden kann. Ist Φ der Inhalt dieses Flächenstückes, so ist das Trägheitsmoment

$$J = 2\Phi h.$$

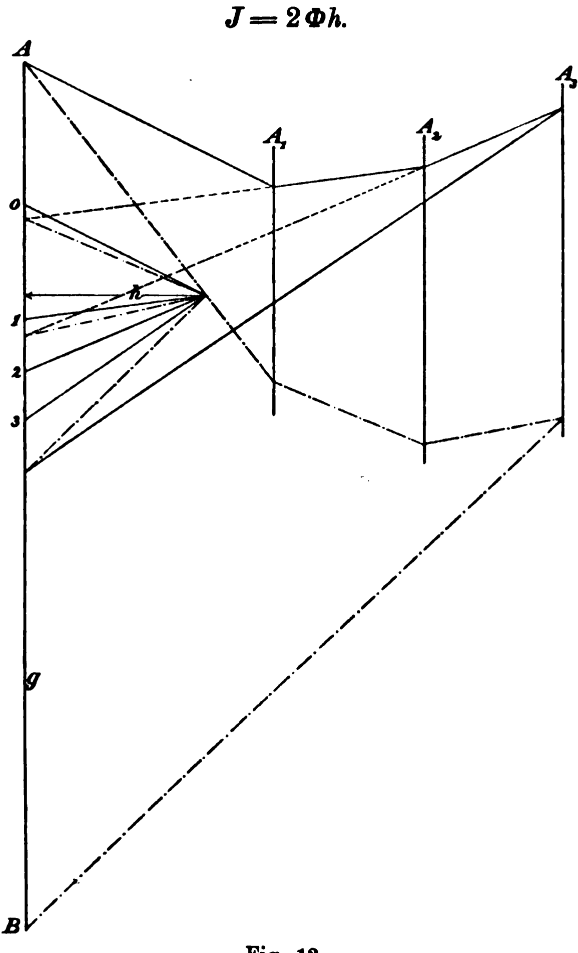


Fig. 12.

Durch das nämliche Seilpolygon kann dann auch das Trägheitsmoment für jede zu g parallele Trägheitsaxe und insbesondere für die zu g parallele Schwerlinie gefunden werden. In der umstehenden Figur (Fig. 13) ist $2\Phi' h$ das Trägheitsmoment für die drei in A_1, A_2, A_3 angreifenden Kräfte $P_1 = \overline{01}$, $P_2 = \overline{12}$, $P_3 = \overline{23}$ für die Schwerlinie s als Trägheitsaxe.

Handelt es sich um das Trägheitsmoment eines Flächenstückes F, so ist dasselbe bei unregelmässiger Begrenzung in Streifen parallel

zur Trägheitsaxe zu zerlegen und die Kräfte P_i sind dann in den Mittellinien dieser Streifen proportional zu den Inhalten, also proportional zu den mittleren Höhen für gleiche Breiten δ der Streifen

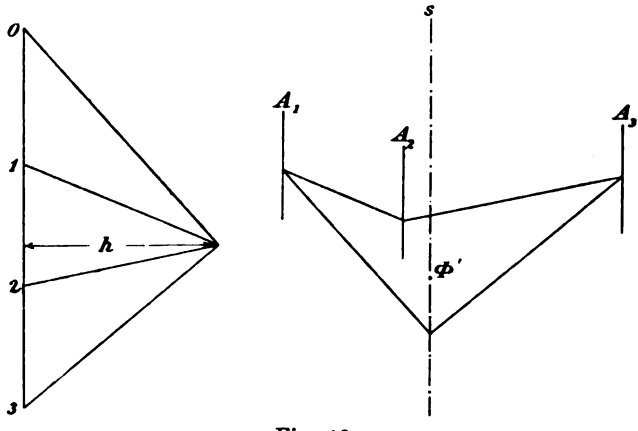


Fig. 13.

anzunehmen. Ist n dieser Proportionalitätsfaktor, so hat das Trägheitsmoment den Wert

$$J = 2n\delta h \cdot \Phi.$$

Da für B als Länge des Kräftepolygones der Inhalt des Flächenstückes

$$F = nB\delta$$

ist, so wird der sog. *Trägheitsradius*

$$k = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{2h}{B} \cdot \Phi},$$

bezw.

$$k = \sqrt{\Phi},$$

wenn nach dem Vorschlage *Mohr*'s der Polabstand h gleich $\frac{B}{2}$ gewählt ist. Zur Bestimmung des Trägheitsradius würde demnach die Fläche Φ in ein Quadrat zu verwandeln sein.

19. Weitere graphische Methoden zur Bestimmung des Trägheitsmomentes. An weiteren Methoden für die graphische Bestimmung des Trägheitsmomentes ist zunächst diejenige von *H. J. Hollender* [77]) zu erwähnen, bei welcher das sogenannte *Komponentenpolygon* die Stelle des Seilpolygones vertritt.

Von *Culmann* werden sodann die Trägheitsmomente von solchen ebenen Flächenstücken, deren Trägheitsmomente sich durch Integration

77) S. Fussn. 46.

leicht ermitteln lassen, vielfach durch direkte Konstruktion des Rechnungsausdruckes auf Grund der Methoden von *B. E. Cousinery*[78]) gefunden. Für ebene Flächenstücke, die von nicht gesetzmässigen Kurven begrenzt sind, werden von *Vojáček*, *Collignon*[79]), *Chr. Nehls*[80]), *R. Werner*[81]), *L. Lewicki*[82]) durch direkte graphische Integration nach *Cousinery*, indem die Begrenzungslinie als Ausgang genommen wird, reduzierte Flächen hergeleitet, deren Inhalte das betreffende Trägheitsmoment bezw. höhere Moment darstellen. Die verschiedenen Konstruktionen unterscheiden sich im wesentlichen nur durch eine verschiedene Art der Zerlegung des gegebenen Flächenstückes in Streifen, sowie durch andere Anordnung der Hülfslinien. So stellt (nach *Nehls*) für die Fläche F und die Axe g der Inhalt F_1 der durch die Kurve AP_1B und die y-Axe begrenzten Fläche das statische Moment $\int y\,df$, der Inhalt F_2 der durch die Kurve AP_2B und die y-Axe begrenzten Fläche das Trägheitsmoment dar.

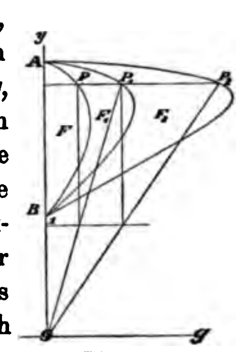


Fig. 14.

20. Konstruktion der Trägheitsellipse[83]). Für die technischen Zwecke, insbesondere für diejenigen der Festigkeitslehre, empfiehlt es sich, die von *Culmann* eingeführte Trägheitsellipse zu verwenden. Für die Konstruktion derselben kommt die Eigenschaft in Betracht, dass für jede durch den Mittelpunkt gehende Trägheitsaxe der *Trägheitsradius* gleich dem Abstande der beiden parallelen Tangenten vom Mittelpunkt ist. *Culmann* konstruiert demgemäss für drei durch den Mittelpunkt gehende Axen die Trägheitsradien und findet so sechs Tangenten, durch welche die Ellipse schon mehr als bestimmt ist[84]). Ist die Centralellipse gezeichnet, so ergiebt sich aus derselben

78) Le calcul par le trait, Paris 1839, vgl. oben Nr. 2.

79) Vortrag gehalten 1874 in Lille. Referat darüber von *M. d'Ocagne*, Bull. Soc. math. de France 12 (1884), p. 21. *M. d'Ocagne* zeigt auch, wie die Tangenten und die Krümmungsradien der reduzierten Flächen sich finden lassen.

80) Civiling. (2) 20 (1874), p. 295; 21 (1875), p. 131, 199, 261. Sodann „Über graphische Integration und ihre Anwendung in der graphischen Statik", Hannover 1877, 2. Aufl. Leipzig 1885.

81) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 21 (1877), p. 365.

82) Civiling. (2) 25 (1879), p. 527.

83) Für die Nummern 20—22 des Textes vgl. insbesondere IV 4, Nr. 20 (*Jung*).

84) *F. Graefe* schlägt vor, die Trägheitsradien für drei Axen zu bestimmen, deren eine mit jeder der beiden anderen einen Winkel von 45° einschliesst, und giebt dann eine einfache Konstruktion für zwei konjugierte Durchmesser, sowie

die Trägheitsellipse für einen anderen Mittelpunkt mit Hülfe der Beziehungen, die zwischen den Trägheitsmomenten bezw. den Trägheitsradien zweier parallelen Trägheitsaxen bestehen.

Um den Übergang von der Centralellipse einer Fläche F zu einer anderen Trägheitsellipse zu erleichtern, werden von *Mohr*[85]) die beiden Punkte φ und φ' (*Brennpunkte*[86]) der gegebenen Fläche F) eingeführt, für welche die Trägheitsellipse ein Kreis ist. Dieselben liegen auf der *kleinen* Axe der *Culmann*'schen Centralellipse[87]) und haben, wenn a und b deren Halbaxen sind, vom Schwerpunkte S die Entfernung

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \text{wenn } a > b,$$

d. h. dieselbe Entfernung, wie die Brennpunkte. Das Trägheitsmoment J und der Trägheitsradius k für eine beliebige Gerade g haben dann den Wert

$$J = F(a^2 + e_1 e_2), \qquad k = \sqrt{a^2 + e_1 e_2},$$

wo e_1 und e_2 die Entfernungen der Trägheitsaxe g von den beiden Brennpunkten der Fläche F sind. Sodann ergiebt sich der Satz: *Die beiden Hauptaxen eines beliebigen Punktes C halbieren die Winkel zwischen den von C nach den Brennpunkten der Fläche F gehenden Strahlen*[88]).

21. Trägheitskreis und Centralkreis. Vielfach ist es zweckmässig, die Trägheitsradien nicht durch die Trägheitsellipse, sondern durch einen Kreis darzustellen. Eine derartige Darstellung findet sich

---

für die Halbaxen, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 43 (1899), p. 210. Siehe auch *A. Sayno*, Ist. Lomb. Rend. (2) 8 (1875), p. 614.

85) Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 16 (1870), p. 48.

86) Diese Bezeichnung findet sich bei *Mohr* erst in einer späteren Arbeit, Civiling. (2) 33 (1887), p. 50. Unabhängig von *Mohr* sind später diese beiden Punkte von *G. Jung* gefunden und als Brennpunkte des Antipolarsystemes der Fläche F „Antifochi di F" bezeichnet worden, Ist. Lomb. Rend. (2) 8 (1875), p. 888—890, Nr. 19—22.

87) Diejenige Hauptträgheitsaxe, für welche das Trägheitsmoment den grössten Wert hat, wird von *Mohr* als die *erste* bezeichnet. Dieselbe ist die kleine Axe der *Culmann*'schen Trägheitsellipse, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 16 (1870), p. 48.

88) Dieser Satz ist in einem allgemeineren Satze enthalten. *Die Brennpunkte φ, φ' der Fläche F bestimmen eine konfokale Kegelschnittschar; jede Kurve der Schar (die in φ, φ' ausgeartete eingeschlossen) ist ein Kegelschnitt konstanten Trägheitsmomentes* (vgl. *G. Jung*, Ist. Lomb. Rend. (2) 12 (1870), p. 225). Die Hauptträgheitsaxen eines Punktes P sind die Tangenten in P der beiden konfokalen Kegelschnitte, die durch ihn gehen und halbieren daher den Winkel zwischen den von P nach φ und φ' gehenden Strahlen (vgl. IV 4, **21** (*Jung*)).

schon bei *Mohr*. Die Trägheitsradien werden nach *Mohr* durch die halbe Länge der durch die Trägheitsaxen aus einem Kreis, dem *Trägheitskreis*, geschnittenen Sehnen bestimmt[85])[86]). Der *Mohr*'sche Trägheitskreis für die Schwerpunktsaxen ist hierbei ein Kreis, welcher um den einen Brennpunkt B der Fläche F mit einem Radius a gleich dem Trägheitsradius der ersten Schwerpunktshauptaxe geschrieben wird. Aus demselben ergeben sich für das Trägheitsmoment J und den Trägheitsradius k einer beliebigen Axe g die Werte:

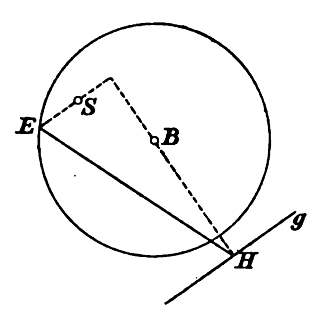


Fig. 15.

$$J = F \cdot \overline{EH}^2, \qquad k = \overline{EH},$$

wo E der eine Schnittpunkt der zu g parallelen Schwerlinie mit dem Kreise und H der Fusspunkt ist des vom Mittelpunkte B des Kreises auf g gefällten Perpendikels. Aus dem Trägheitskreis für den Schwerpunkt S lässt sich derjenige für einen beliebigen Punkt herleiten. Der Trägheitskreis kommt bei *Mohr* zur Verwendung, wenn es sich um die Bestimmung des Mittelpunktes der Spannung in einem Querschnitt handelt bei gegebener neutraler Axe[89]).

G. Jung hat gezeigt[90]), dass der *Mohr*'sche Trägheitskreis für den Schwerpunkt nichts anderes ist als die *Culmann*'sche Trägheitsellipse für jeden der Brennpunkte φ und φ' der Fläche F, sowie dass die Anwendung desselben noch erleichtert wird, wenn man einen anderen auf $S\varphi$ als Durchmesser beschriebenen Kreis hinzufügt.

Sind ferner f und f' die Brennpunkte und AA' die grosse Axe der Trägheitsellipse für einen Punkt O, so wird andererseits von *Jung* der auf AA' als Durchmesser geschlagene Kreis, der *Centralkreis*, benützt[91]). Dieser Kreis ist die Fusspunktkurve für die zu O gehörende Trägheitsellipse. Für eine beliebige Axe g durch O wird nach *Jung* der Trägheitsradius halb so gross als die durch f (oder f') gehende und zu g rechtwinklige Sehne des Centralkreises.

22. Centrifugalmoment (Deviationsmoment). Das Centrifugalmoment eines ebenen Massensystemes für zwei Axen in ihrer Ebene wird gebildet, indem man die einzelnen Massen mit den in der Rich-

89) Auch in der späteren Arbeit von *A. Lodge* werden die Trägheitsmomente durch Kreise dargestellt, Phil. Mag. (5) 22 (1886), p. 453, sowie Brit. Ass. Rep. 1886, p. 543.

90) Ist. Lomb. Rend. (2) 8 (1875), p. 890.

91) Brit. Ass. Rep. 1876, p. 25.

tung der Axen genommenen Abständen von diesen Axen multipliziert und alle diese Produkte addiert.

Die graphische Bestimmung des Centrifugalmomentes wird von *Culmann*[92]) unter Ersetzung der Massen durch ein System von parallelen Kräften in ähnlicher Weise wie diejenige des Trägheitsmomentes durchgeführt (vgl. Nr. 18). Die Kräfte werden zunächst parallel zur einen Axe angenommen, und deren Momente durch ein Seilpolygon für einen Drehpunkt in dieser Axe bestimmt. Darauf werden die auf denselben Hebelarm gebrachten Momente als Kräfte an die Stelle der Massen gesetzt, wobei diese Kräfte nunmehr die Richtung der zweiten Axe erhalten. Das resultierende Moment dieser Kräfte für einen Punkt der zweiten Axe als Drehpunkt liefert das Centrifugalmoment. Da die Bestimmung dieses resultierenden Momentes ebenfalls durch ein Seilpolygon geschehen kann, so lässt sich das Centrifugalmoment mit Hülfe von zwei Seilpolygonen konstruieren. Fallen die beiden Axen zusammen, so läuft die Konstruktion auf diejenige des Trägheitsmomentes hinaus.

Ist die Centralellipse eines Flächenstückes F gezeichnet, so lässt sich nach *Culmann* das Centrifugalmoment für zwei Axen g_1 und g_2, die durch den Mittelpunkt der Centralellipse gehen, sofort angeben. Ist nämlich A der Schnittpunkt des zur einen Axe g_1 konjugierten Durchmessers mit der Centralellipse, so ist das Centrifugalmoment pqF.[93]) Aus dem Centrifugalmoment für zwei durch den Schwerpunkt gehende Axen lässt sich dann sofort dasjenige für zwei parallele Axen herleiten, wenn man nicht zu dessen Bestimmung die Trägheitsellipse für den Schnittpunkt dieser beiden Axen verwenden will.

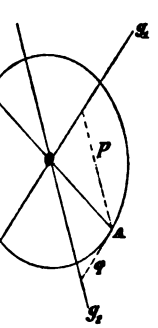


Fig. 16.

Um das Centrifugalmoment und mit ihm das Trägheitsmoment für Axen, welche durch einen Punkt P gehen, zurückzuführen auf statische Momente, legt *Mohr* durch P einen Kreis, den *Grundkreis*[94]) (*Mohr-Land*'scher Trägheitskreis), mit einem beliebigen Radius r und denkt sich denselben in der Weise mit Masse belegt, dass sich auf dem Längenelement ds eine Masse $\frac{dJ_p}{2r}$ befindet, wo dJ_p das polare Trägheitsmoment[95]) des Flächenstreifens ist, welcher durch die von P nach

92) Gr. St., 1. Aufl. (1866), p. 162.

93) Gr. St., 2. Aufl. (1875), p. 401 u. 404.

94) Bezeichnung von *R. Land*, Civiling. 34 (1888), p. 160.

95) Siehe IV 4, 10 (*Jung*).

den Endpunkten des Längenelementes ds gehenden Strahlen aus dem gegebenen Flächenstück F geschnitten wird, und zwar für P als Pol. Wird von der Masse auf dem Kreise der Schwerpunkt T_p (*Trägheitsschwerpunkt der Fläche F für den Pol P*) bestimmt und in demselben die ganze Masse $\frac{J_p}{2r}$ vereinigt angenommen, so ergeben sich nach *Mohr* die Sätze:

Das Centrifugalmoment der Fläche F für zwei beliebige Polstrahlen PA und PB ist gleich dem statischen Moment der Masse des Trägheitsschwerpunktes in Bezug auf die den beiden Polstrahlen zugehörige Kreissehne AB.

Das Trägheitsmoment der Fläche F für eine beliebige durch den Pol gehende Axe PA ist gleich dem statischen Moment der Masse des Trägheitsschwerpunktes in Bezug auf die Kreistangente im Schnittpunkte A des Kreises mit der Trägheitsaxe PA.

Die Hauptträgheitsaxen sind die Strahlen, welche von dem Pole P nach den Endpunkten des durch den Trägheitsschwerpunkt bestimmten Durchmessers des Grundkreises gehen.

Der Trägheitsschwerpunkt kann aus drei Trägheitsmomenten bestimmt werden. Aus dem Trägheitsschwerpunkt für den Schwerpunkt der Fläche F lässt sich derjenige für einen anderen Pol herleiten.

Zur Konstruktion des *Mohr-Land*'schen Trägheitskreises verwendet *R. Land* die Trägheitsmomente für zwei zu einander senkrechte Axen und das betreffende Centrifugalmoment[96]).

Die Beziehungen zwischen dem *Mohr-Land*'schen Trägheitskreis und der Trägheitsellipse sind von *F. Graefe* untersucht[97]). Insbesondere konstruiert *F. Graefe* den Trägheitskreis für den Schwerpunkt durch Ermittelung eines Punktes der Centralellipse.

23. Centralkern. Durch *Culmann* hat die Centralellipse eine weitere Bedeutung für die Festigkeitslehre erhalten[98]).

Wirkt auf einen ebenen Querschnitt F eines Körpers eine in einem beliebigen Punkte A desselben angreifende und zum Querschnitt senkrechte Kraft P, so erleidet derselbe nach *Culmann* eine Drehung um eine in dem Querschnitt liegende Biegungsaxe (*Nulllinie*), sodass die Normalspannungen des Querschnittes proportional zu der Entfernung von dieser Biegungsaxe werden. *Und zwar ist diese Biegungsaxe die Antipolare des Punktes A in Bezug auf die Centralellipse des*

96) Civiling. 34 (1888), p. 123; Zeitschrift f. Bauwesen 42 (1892), p. 549.
97) Zeitschr. Math. Phys. 46 (1901), p. 348.
98) Gr. St., 1. Aufl., p. 172 u. folg.; 2. Aufl., p. 415 u. folg.

Querschnittes, d. h. die Polare des dem Punkte A diametral gegenüberliegenden Punktes A'.

Schneidet die Biegungsaxe die Begrenzung des Querschnittes, so wird auf der einen Seite der Biegungsaxe Zug und auf der anderen Seite Druck vorhanden sein. Dagegen tritt im ganzen Querschnitt dieselbe Art der Spannung auf, sobald die Biegungsaxe ausserhalb des Querschnittes zu liegen kommt, bezw. den Querschnitt nicht schneidet.

Dasjenige Gebiet, in welchem der Angriffspunkt A der Kraft liegen muss, damit die Biegungsaxe den Querschnitt nicht schneidet, wird nun von *Culmann* als der *Centralkern* (*noyau central, central nucleus, nocciolo centrale*) bezeichnet. Demgemäss ist der Centralkern eines Querschnittes begrenzt durch die Antipole aller geraden Linien, welche die Begrenzungskurve der ursprünglichen Figur berühren, aber nicht schneiden. Vgl. IV 4, 23 (*Jung*).

Mit Hülfe der Centralellipse oder unter Umgehung derselben mit Hülfe des Trägheitskreises lässt sich der Centralkern für einen gegebenen Querschnitt leicht graphisch ermitteln[99]).

In Figur 17 ist der Centralkern des Rechteckes $ABCD$ bestimmt. Derselbe ist begrenzt durch die vier Antipolaren a, b, c, d der Punkte

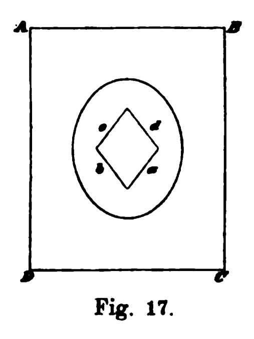


Fig. 17.

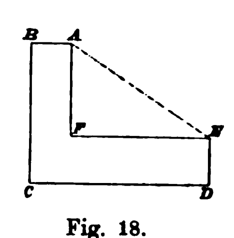


Fig. 18.

A, B, C, D in Bezug auf das durch die Centralellipse des Viereckes bestimmte Antipolarsystem.

Ist die Begrenzungskurve des Querschnittes teilweise nach innen gekrümmt, so ist vor Bestimmung der antipolaren Figur dieses nach innen gekrümmte Stück derselben durch die dasselbe abschneidende Tangente zu ersetzen, da die Tangente in den Punkten des nach innen

99) *Culmann* benutzt bei der Bestimmung des Centralkernes direkt die Centralellipse, während *Mohr* und später *Land* mit dem Trägheitskreis konstruieren: *Mohr,* Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 16 (1870), p. 55; *Land,* Zeitschr. f. Bauwesen 42 (1892) p. 558.

gekrümmten Teiles der Begrenzungskurve dieselbe sowohl schneiden wie berühren würde. Handelt es sich demgemäss um das Sechseck $ABCDEF$ (Fig. 18), so sind die beiden einspringenden Seiten AF und FE durch die Linie AE zu ersetzen. Der Kern des Sechseckes ist dann die antipolare Figur des Fünfeckes $ABCDE$ in Bezug auf das durch die Centralellipse des Sechseckes bestimmte Antipolarsystem[100]).

C. Das räumliche Kräftesystem[101]).

24. Kräfte mit demselben Angriffspunkt. Der *Satz vom Kräftepolygon* gilt bei Kräften im Raume in derselben Weise, wie bei Kräften in der Ebene. *Die Resultante von Kräften im Raume mit demselben Angriffspunkt ist die Schlusslinie des räumlichen Kräftepolygons. Kräfte im Raume mit demselben Angriffspunkt stehen im Gleichgewicht, wenn das räumliche Kräftepolygon ein geschlossenes ist.*

Zur graphischen Bestimmung der Resultante von Kräften im Raume mit demselben Angriffspunkt konstruiert *Culmann*[102]) die Polygone aus den Projektionen der Kräfte in drei[103]) zu einander senkrechten Projektionsebenen. Dieselben sind die Projektionen des räumlichen Kräftepolygones. Die Projektionen der Resultante sind dann die Schlusslinien dieser drei Polygone. Gleichgewicht ist vorhanden, wenn die Polygone aus den Projektionen der Kräfte geschlossen sind.

Die Zerlegung einer Kraft P in drei Komponenten P_1, P_2, P_3 mit demselben Angriffspunkt wie P ist eindeutig möglich, solange P_1, P_2, P_3 nicht in einer und derselben Ebene liegen. Die Komponenten P_1, P_2, P_3 sind dann durch den *Satz vom Kräfteparallelepiped* bestimmt. Die Zerlegung ist rasch durchführbar mit Hülfe der Bemerkung von *Culmann*, dass die Resultante der beiden Komponenten P_1 und P_2 in der Schnittlinie der Ebene P_1P_2 mit der Ebene PP_3 liegen muss. Eine nicht weniger bequeme Methode giebt *H. Müller-Breslau*[104]). Nach derselben wird mit dem Zeichnen des

---

100) In den Lehrbüchern der graphischen Statik, insbesondere in denjenigen von *Culmann* und *Saviotti* finden sich die Centralkerne für eine ganze Reihe von speziellen Querschnitten angegeben. Bezüglich der technisch wichtigen Querschnitte siehe *F. Heinzerling* und *O. Intze,* Deutsches Normalprofil-Buch f. Walzeisen, 5. Aufl., Aachen 1897, sowie die von den Hüttenwerken herausgegebenen Profilbücher.

101) Vgl. IV 2, Abschnitt III (*Timerding*).

102) Gr. St., p. 113.

103) Das dritte Polygon ist nicht unbedingt notwendig, es dient nur zur Kontrolle.

104) Zentralbl. d. Bauverwaltung 11 (1891), p. 437.

räumlichen Kräftepolygones begonnen, indem durch die Endpunkte der gegebenen Kraft P parallele Linien zu P_1 und P_3 gezogen werden. Auf denselben sind dann die Endpunkte von P_1 und P_3 so zu bestimmen, dass deren Verbindungslinie parallel zu P_2 ist. Dieses gelingt durch zweimaliges Probieren unter Anwendung des Satzes: Drehen sich die Seiten eines n-Ecks um feste Punkte, die auf einer Geraden liegen, und verschieben sich hierbei zugleich $n-1$ Eckpunkte längs beliebigen gegebenen Geraden, so beschreibt der letzte Eckpunkt auch eine Gerade.

25. Kräftepaare in verschiedenen Ebenen. Zur Bestimmung des resultierenden Kräftepaares einer Reihe von Kräftepaaren in verschiedenen Ebenen wird bei *Culmann* der Satz vom Axenpolygon direkt verwandt. Dagegen zerlegt *J. Bauschinger*[105]), wie dieses von *Poinsot* bei der analytischen Zusammensetzung geschieht, zunächst jedes Kräftepaar in drei Kräftepaare in drei zu einander senkrechten Projektionsebenen, und ermittelt dann, nach Zusammensetzung der Kräftepaare in derselben Projektionsebene, das resultierende Kräftepaar durch den Satz vom Axenparallelepiped[106]).

26. Graphische Zusammensetzung der Kräfte im Raum mit verschiedenen Angriffspunkten. Die graphische Zusammensetzung von Kräften P_i, die an verschiedenen Punkten eines starren Systemes angreifen, wird von *Culmann* unter Zugrundelegung von drei zu einander rechtwinkligen Projektionsebenen zunächst ganz im Sinne von *Poinsot*[101]) in der Weise ausgeführt, dass sämtliche Kräfte nach einem Punkte, der am besten im Schnittpunkt O der drei Projektionsebenen angenommen wird, verschoben werden. An die Stelle jeder Kraft P_i tritt hierbei die nach O verschobene Kraft und ein Kräftepaar. Die parallel verschobenen Kräfte können durch die Kräftepolygone aus den Projektionen der Kräfte zu einer in O angreifenden Kraft vereinigt werden, die Kräftepaare nach den in Nr. 25 behandelten Methoden zu einem einzigen Kräftepaar, sodass sich eine in O angreifende Kraft und ein Kräftepaar ergiebt.

Wird zur Zusammensetzung der Kräftepaare die Methode von

---

105) Elemente der graphischen Statik, München 1871, p. 59.

106) Da die Kräftepaare in den Projektionsebenen schon durch die Projektionen der Kräfte gegeben sind, so hat die *Bauschinger*'sche Methode den Vorzug, dass sich sämtliche Konstruktionen direkt in den drei Projektionsebenen ausführen lassen und Umklappungen u. s. w. nicht erfordern. Die Zusammensetzung der Kräftepaare in derselben Projektionsebene kann durch Kräfte- und Seilpolygon bewerkstelligt werden.

Bauschinger verwandt, so sind die Momente der drei resultierenden Kräftepaare in den drei Projektionsebenen gleich den Momentensummen der Kräfte für die Schnittlinien der Projektionsebenen, bezw. gleich den Summen aus den statischen Momenten der ersten, zweiten und dritten Projektionen der Kräfte für den Punkt O (Fig. 19). Die Bestimmung dieser Momentensummen kann nach den verschiedenen besprochenen Methoden erfolgen. Werden hierbei nach *Bauschinger* die drei Seilpolygone verwandt, die sich in den drei Projektionsebenen für die Projektionen der Kräfte konstruieren lassen, wobei es zweckmässig ist, die Abstände der drei Pole von den Schlusslinien der Kräftepolygone gleich gross zu wählen, *so läuft die graphische Zusammensetzung der Kräfte im Raum mit verschiedenen Angriffspunkten auf die Konstruktion der drei Kräfte- und Seilpolygone für die Projektionen der Kräfte hinaus.* Sind die drei Kräftepolygone aus den Projektionen der Kräfte geschlossen, die drei Seilpolygone, bezw. wenigstens eines derselben, offen, so lassen sich die Kräfte auf ein einziges Kräftepaar zurückführen. Sind die drei Kräftepolygone und Seilpolygone geschlossen, so stehen die Kräfte im Gleichgewicht. Also:

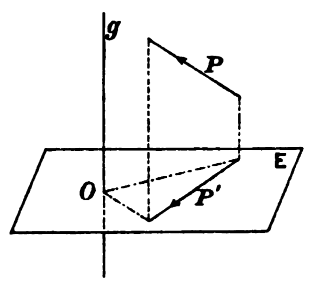


Fig. 19.

Kräfte im Raum sind dann und nur dann im Gleichgewicht, wenn sich sowohl die Kräfte- als auch die Seilpolygone aus ihren Projektionen auf jede von drei sich schneidenden Ebenen schliessen[107]).

Eine weitere Methode von *Culmann*[108]) besteht darin, dass sämtliche Kräfte in je zwei Komponenten zerlegt werden, von denen eine in einer angenommenen Ebene E liegt, während die andere durch einen beliebig gewählten Punkt A geht. Die Kräfte in E lassen sich durch Kräfte- und Seilpolygon zu einer einzigen Kraft in E vereinigen; die durch A gehenden Kräfte können durch zwei Kräftepolygone zu einer einzigen in A angreifenden Kraft zusammengesetzt werden, sodass die Kräfte auf zwei sich kreuzende Kräfte zurückgeführt sind, von denen die eine in der Ebene E liegt, während die andere durch den Punkt A geht. Dagegen gibt *F. Zuchetti*[109]) ein graphisches Verfahren zur Zurückführung des Kräftesystemes auf zwei sich kreuzende Kräfte, von denen die eine in einer vorgeschriebenen Geraden liegt.

107) *J. Bauschinger,* Graphische Statik, p. 62.
108) Gr. St., 2. Aufl., Zürich 1875, p. 215.
109) Torino, Atti 12 (1877), p. 44.

Für die *Centralaxe* und das *Hauptkräftepaar*[110]), das senkrecht gegen die Centralaxe gestellt ist, wird schon von *Culmann* eine graphische Methode gegeben, welche im wesentlichen auf den *Poinsot*'schen Ausführungen beruht. Sehr bequem ist zur Bestimmung von Centralaxe und Hauptkräftepaar eine Methode von *Mohr*[111]), bei welcher der Satz verwandt wird, dass die Projektion eines räumlichen Gleichgewichtssystemes wieder ein Gleichgewichtssystem bildet. Es seien in den drei Projektionsebenen aus den ersten, zweiten und dritten Projektionen der Kräfte die Resultanten A, B, C gefunden. B und C bestimmen, als zweite und dritte Projektion einer Kraft aufgefasst, eine solche D, C und A eine Kraft E, A und B eine Kraft F. Diese drei Kräfte D, E, F sind parallel zur Centralaxe, und die Centralaxe ist der Schnitt der drei Ebenen, welche durch die Kanten des durch die Kräfte D, E, F bestimmten Prismas normal zu den gegenüberliegenden Seiten desselben gelegt werden[112]).

An sonstigen Methoden für die graphische Zusammensetzung von Kräften im Raum mit verschiedenen Angriffspunkten ist zu erwähnen eine solche von *M. Levy*[113]), die von *F. Steiner*[114]) weiter ausgebildet ist. Dieselbe soll die für die Ebene durch das Seilpolygon gegebene Methode auf den Raum verallgemeinern. An die Stelle des Seilpolygones tritt hierbei eine *Seilpyramide.*

Ist auf eine dieser Arten[115]) das räumliche Kräftesystem auf eine Kraft und ein Kräftepaar, bezw. auf zwei sich kreuzende Kräfte, zurückgeführt, so bereitet es keine Schwierigkeiten, dieses *Kraftkreuz* mit Hülfe der Sätze über das Nullsystem durch ein anderes zu ersetzen. Das Gleiche gilt von der Zerlegung einer Kraft in drei, vier, fünf und sechs Komponenten[116]).

---

110) Siehe IV 2, Nr. **10** und Nr. **23** (*Timerding*).

111) Civiling. (2) 22 (1876), p. 121.

112) An die Arbeit von *Mohr* schliessen sich die Arbeiten von *O. Hüppner* und *J. Tesař* an, Civiling. (2) 29 (1883), p. 145; bezw. Prag. Ber. (1886), p. 259.

113) La statique graphique, Paris 1874, p. 220.

114) Über die graphische Zusammensetzung der Kräfte im Raum, Wien 1876, p. 10.

115) Mit der Frage, welche Methode die bequemste ist bei dem Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften beschäftigt sich eine Arbeit von *W. Stäckel*, Zeitschr. Math. Phys. 43 (1898), p. 62.

116) Mit der graphischen Zerlegung einer Kraft in sechs Komponenten hat sich schon *Culmann* beschäftigt, Gr. St., 2. Aufl. 1875, p. 275; später *Mohr*, Civiling. (2) 22 (1876), p. 129; sowie *L. Henneberg*, Civiling (2) 30 (1884), p. 381 mit Hülfe der Sätze über das Nullsystem. Vereinfachte Konstruktionen gaben *W. Stäckel* (Fussn. 115) und im Anschluss daran *R. Skutsch*, Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. 1 (1902), p. 59. Vgl. IV 2, Nr. **22**—**25** (*Timerding*).

27. Parallele Kräfte. Mittelpunkt. Schwerpunkt. Die Zusammensetzung von parallelen Kräften kann nach *Culmann* erfolgen durch Zusammensetzung der Projektionen der Kräfte in zwei Projektionsebenen, durch Kräfte- und Seilpolygon. Die hierbei sich ergebenden Resultanten sind die betreffenden beiden Projektionen der Resultante der gegebenen parallelen Kräfte. Sind die beiden in den Projektionsebenen gezeichneten Kräftepolygone geschlossen, die Seilpolygone dagegen offen, so vereinigen sich die parallelen Kräfte zu einem Kräftepaar. Gleichgewicht ist dagegen vorhanden, wenn die Kräfte- und Seilpolygone geschlossen sind.

Der Mittelpunkt[117]) eines Systemes von parallelen Kräften kann graphisch gefunden werden, indem die Bestimmung der Resultante für zwei verschiedene Richtungen durchgeführt wird. Praktisch ist es hierbei, die Kräfte zweimal parallel zu einer Projektionsebene anzunehmen, und die Kräfte in der betreffenden Projektionsebene durch Kräfte- und Seilpolygon zu vereinigen. Die beiden sich so ergebenden Resultanten bestimmen durch ihren Schnitt einen projizierenden Strahl, auf welchem der Mittelpunkt des Kräftesystemes liegt. Um auf demselben den Mittelpunkt zu finden, genügt es, nur einmal in einer anderen Projektionsebene in gleicher Weise die Zusammensetzung durchzuführen. Hiermit ist von *Culmann* eine allgemeine graphische Methode zur Bestimmung des Mittelpunktes von parallelen Kräften, bezw. des Schwerpunktes, gefunden, und zwar läuft dieselbe auf die Konstruktion von drei Seilpolygonen hinaus. Handelt es sich nicht um den Schwerpunkt von einzelnen schweren Punkten, sondern um denjenigen eines Körpers, so sind ähnliche Betrachtungen, wie bei den Schwerpunktsbestimmungen von Flächenstücken hinzuzufügen.

II. Die bestimmten Fachwerke. Allgemeine Theorie.

A. Ebene Fachwerke.

28. Einleitung. Eine der wichtigsten Anwendungen der graphischen Statik bildet die Theorie der Fachwerke. Sie gehört zu denjenigen Theorien, die ganz aus dem praktischen Bedürfnis heraus entstanden sind: sie hat sich ergeben infolge der Aufgaben, welche durch die Benutzung des Eisens bei den Ingenieurhochbauten auftraten, bezw. dadurch, dass hierbei Gerippe von verhältnismässig dünnen Stäben zur Übertragung der Lasten auf die Lager verwandt wurden. Alle derartigen Gerippe von Stäben, wie sie wesent-

---

117) Siehe IV 2, Nr. 21 (*Timerding*), sowie IV 4, Nr. 7 (*Jung*).

lich bei den Dach- und Brückenkonstruktionen verkommen, und die ihrem Zwecke entsprechend notwendig *stabil*[118]) sein müssen, werden schlechtweg als *Fachwerke* bezeichnet.

Die Hauptaufgabe, die bei der Untersuchung eines vorliegenden Fachwerkes entsteht, und welche auch die Hauptaufgabe einer Theorie der Fachwerke bildet, ist die Bestimmung der infolge der vorhandenen Belastungen in den einzelnen Stäben des Fachwerkes sich ergebenden Spannungen. In der Theorie der sog. *bestimmten* Fachwerke (vgl. weiter unten) sind die Punkte, in denen die einzelnen Stäbe mit einander verbunden sind, stets als Gelenke gedacht[119]), so dass die Bestimmung der Spannungen auf die Aufgabe einer Kräftezerlegung hinausläuft. Aus diesen Spannungen sind dann von dem Ingenieur in einem praktischen Falle auf Grund der Festigkeitslehre die Dimensionen zu berechnen, welche die einzelnen Stäbe erhalten müssen, um diese Spannungen aufnehmen zu können. Die Elastizität der Stäbe, die Gestaltsveränderung, welche sich daraus für das Fachwerk ergiebt, und die Änderung, welche die Spannungen wiederum hierdurch erleiden (Nebenspannungen) werden in der Theorie der bestimmten Fachwerke nicht berücksichtigt[120]).

Da hier nur Fachwerke behandelt werden sollen, die aus starren, durch Gelenke mit einander verbundenen, Stäben hergestellt sind, so werden im folgenden zunächst die Gelenksysteme untersucht.

29. Gelenksysteme und deren Klassifikation. Definition der freien Fachwerke. Unter einem *Gelenksystem* soll ein System von starren Stäben verstanden werden, die in ihren Endpunkten durch Gelenke miteinander verbunden sind.

Ein solches Gelenksystem, bei dem endliche oder unendlich kleine Bewegungen der einzelnen Stäbe bezw. Gelenke gegen einander möglich sind[121]), sei als *kinematisch unbestimmt* bezeichnet.

---

118) In diesem Artikel soll dementsprechend unter einem Fachwerk nur eine stabile Konstruktion verstanden werden.

119) Ein Fachwerk, in dem die einzelnen Stäbe nicht durch Gelenke, sondern starr mit einander verbunden sind, wird als ein *starres Fachwerk* bezeichnet.

120) Alle hierhergehörigen Fragen werden in einem späteren Artikel behandelt.

121) Die unbestimmten Gelenksysteme sind nach kinematischer Seite untersucht in IV 3, Nr. 28—30 (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*). Beiträge zu ihrer statischen Untersuchung geben die Entwickelungen in Nr. 8 oben. Anderweitige komplizierte Fälle werden in der Litteratur mehrfach behandelt, auch mit graphischen Hilfsmitteln. Vgl. insbes. *S. Finsterwalder,* Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation, Deutsche Math.-Ver. 6 (1899), p. 43, sowie *W. Schlink,* Über die Deformation von Häuten rhombischer Struktur, Diss. München (Neuwied) 1902.

Kinematisch bestimmt soll ein Gelenksystem genannt werden, bei welchem gegenseitige Bewegungen der Gelenke bezw. Stäbe nicht möglich sind, und aus welchem durch die Wegnahme eines jeden Stabes ein kinematisch unbestimmtes System entstehen würde. Dagegen sei ein *kinematisch überbestimmtes* Gelenksystem ein solches, bei welchem gegenseitige Bewegungen der Gelenke nicht möglich sind, und bei welchem sich wenigstens ein Stab finden lässt, nach dessen Wegnahme das System noch immer unbeweglich bleibt. Jedes kinematisch überbestimmte Gelenksystem lässt sich aus einem kinematisch bestimmten Gelenksystem durch Einschaltung eines oder einiger weiteren Stäbe herleiten.

Die kinematisch bestimmten wie die kinematisch überbestimmten Gelenksysteme werden als freie Fachwerke bezeichnet.

In dieser allgemeinen Weise sind die Fachwerke zuerst von *O. Mohr* und sodann von *A. Föppl* aufgefasst, während *A. Ritter*, *C. Culmann* und *L. Cremona*, die nebst *Clerk Maxwell* als die Begründer der Fachwerkstheorie anzusehen sind, nur ganz spezielle kinematisch bestimmte und kinematisch überbestimmte Gelenksysteme als Fachwerke definieren.

Mohr[122]) verstand ursprünglich unter einem Fachwerk jede aus stabförmigen Teilen zusammengesetzte Trägerkonstruktion, welche so unterstützt ist, dass eine Veränderung der Form und der Lage des Trägers nur infolge von Längenänderungen der Konstruktionsteile entstehen kann. Ein solches Fachwerk nannte *Mohr* ein *einfaches*, wenn die Längen der einzelnen Konstruktionsteile voneinander unabhängig sind, im anderen Falle ein *zusammengesetztes*.

Zweckmässiger sieht *A. Föppl*[123]) zunächst von den besonderen Lagerbedingungen (wie auch oben geschehen)[124]) ab und versteht unter *einem Fachwerke ein System, das aus materiellen Punkten und gewissen Verbindungslinien derselben so zusammengesetzt ist, dass keine relative Bewegung der Teile des Systemes gegen einander möglich ist, ohne dass die Länge dieser Verbindungslinien geändert wird.* Diese Definition ist mit der oben gegebenen Definition des freien Fachwerkes identisch.

Die materiellen Punkte (*Gelenke*, *Knotenpunkte*[125])) und die Ver-

---

122) Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 20 (1874), p. 223, 509, sowie 21 (1875), p. 17.

123) Theorie des Fachwerkes, Leipzig 1880.

124) Auf die sogenannten *gestützten* Fachwerke kommen wir in Nr. 47 zurück.

125) Bei den Fachwerken wird in der Regel von *Knotenpunkten* statt von Gelenken gesprochen.

bindungslinien (*Stäbe*) werden als Elemente der Fachwerke bezeichnet, die ihrerseits *ebene* oder *räumliche* Fachwerke genannt werden, je nachdem das ganze System in einer Ebene liegt oder nicht.

30. Analytische Kennzeichen für die verschiedenen Arten von Gelenksystemen. Je zwei Knotenpunkte eines *ebenen* Gelenksystemes mit den Koordinaten x_i, y_i und x_k, y_k, welche durch einen Stab von der Länge l_{ik} mit einander verbunden sind, liefern eine Gleichung

$$(1) \qquad (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 = l_{ik}^2 .$$

Daraus, dass diese Gleichungen im Falle des *kinematisch bestimmten* Gelenksystems nach Festlegung des Koordinatensystemes gegenüber dem Gelenksystem für die Koordinaten sämtlicher Knotenpunkte bestimmte Werte liefern müssen, ergiebt sich, dass die Zahl m der Stäbe eines ebenen Fachwerkes von n Knotenpunkten $2n - 3$ betragen muss, und dass in diesem Falle die obigen Gleichungen voneinander unabhängig sein müssen. Dadurch wird für das Gelenksystem eine ganz bestimmte „Struktur" festgelegt, auf deren nähere Bestimmung weiter unten (in Nr. 34) eingegangen wird.

Da wir auch unendlich kleine Beweglichkeit des Gelenksystemes ausschliessen, können wir die $(2n - 3)$ in Betracht kommenden Gleichungen durch ihre Differentialrelationen ersetzen:

$$(2) \qquad (x_i - x_k)(\delta x_i - \delta x_k) + (y_i - y_k)(\delta y_i - \delta y_k) = 0.$$

Zugleich werden wir, um das Koordinatensystem festzulegen, etwa

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

und dementsprechend

$$\delta x_1 = 0, \quad \delta y_1 = 0, \quad \delta x_2 = 0$$

setzen. Es muss dann verlangt werden, dass auch die übrigen $(2n - 3)$ Grössen δx_i, δy_i infolge der vorstehenden linearen Gleichungen verschwinden. Man ordne also die Gleichungen nach diesen δx_i, δy_i und bilde die Koeffizientendeterminante D. Die δx_i, δy_i sind dann notwendig alle gleich Null, wenn $D \gtrless 0$.

Damit ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Gelenksystem als ein *freies kinematisch bestimmtes Fachwerk* betrachtet werden kann, die, *dass die Zahl m der Stäbe bei n Gelenken (Knotenpunkten) $2n - 3$ beträgt, und dass die obige Determinante D einen von Null verschiedenen Wert besitzt*[126]).

126) Die Anzahl der notwendigen Stäbe haben unabhängig von einander *Mohr* und *Levy* bestimmt; *Mohr*, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 20 (1874), p. 509; *Levy*, La statique graphique, 1. éd. Paris 1874, p. 50 und 93—95; die Bedingung $D \gtrless 0$ findet sich zuerst bei *Föppl*. Vorher hat jedoch schon

Ist $m < 2n - 3$, so ist das Gelenksystem unter allen Umständen *inematisch unbestimmt,* wobei es jedoch sein kann, dass ein Teil es Gelenksystemes für sich als kinematisch bestimmt oder selbst als inematisch überbestimmt zu betrachten ist. So sind die beiden geichneten Gelenksysteme (Fig. 20), für welche $m < 2n - 3$, kineatisch unbestimmt, obgleich in dem ersten ein Teil kinematisch estimmt, in dem zweiten ein Teil kinematisch überbestimmt ist.

Ist ein Gelenksystem von n Gelenken (Knotenpunkten) und $= 2n - 3$ Stäben kinematisch unbestimmt, so sind zwei Fälle öglich:

a) Es kann sein, dass die für die kinematische Bestimmtheit erorderliche Struktur des Gelenksystemes nicht vorhanden ist. Dies

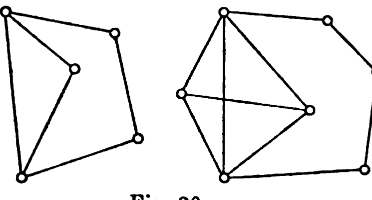


Fig. 20.

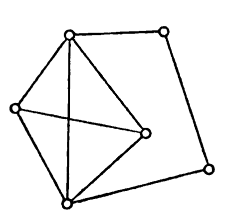


Fig. 21.

itt z. B. ein, wenn ein Teil des Gelenksystemes ein kinematisch berbestimmtes Fachwerk ist (wie in Fig. 21), während der andere eil zu wenig Stäbe hat. Die obigen $m = 2n - 3$ Gleichungen (1) ürden sich dann auf weniger als $2n - 3$ von einander unabhängige leichungen zurückführen lassen; für das lineare Gleichungssystem (2) edeutet dies ein Verschwinden der Determinante D.

b) Es kann aber auch sein, dass die erforderliche Struktur orliegt und trotzdem $D = 0$ ist. Dieser Fall möge der *Grenzfall* enannt werden[127]). Die kinematische Unbestimmtheit ist nur hervorerufen durch die speziellen Werte, welche die Längen der einzelnen täbe besitzen. Beispiele hierzu bieten ein Dreieck ABC, dessen

---

. *F. Moebius,* Lehrbuch der Statik, Leipzig 1837, 2. Bd., Kap. 4 die Frage itschieden für den allgemeinen Fall verschiedener mit einander verbundener örper.

127) Diesen Grenzfall behandelt *A. F. Moebius,* vgl. Fussn. 126. Bei den achwerken machte *O. Mohr* zuerst auf diesen Fall und dessen Wichtigkeit ifmerksam, Civiling. (2) 31 (1885), p. 289. *Mohr* bezeichnet diesen Fall als enjenigen, bei welchem die eine Stablänge als Funktion der übrigen betrachtet, n Maximum oder Minimum ist. Dass bei dem Grenzfall die Struktur des Genksystemes übrigens die für die kinematisch bestimmten Fachwerke erforderche ist, wurde von *L. Henneberg,* Statik, p. 219, nachgewiesen.

Eckpunkte in dieselbe Gerade fallen, sowie das Fachwerk von 6 Knotenpunkten (Fig. 22), bei welchem die drei Stäbe AA_1, BB_1, CC_1, bezw. deren Verlängerungen, sich in demselben Punkte O schneiden. In be-

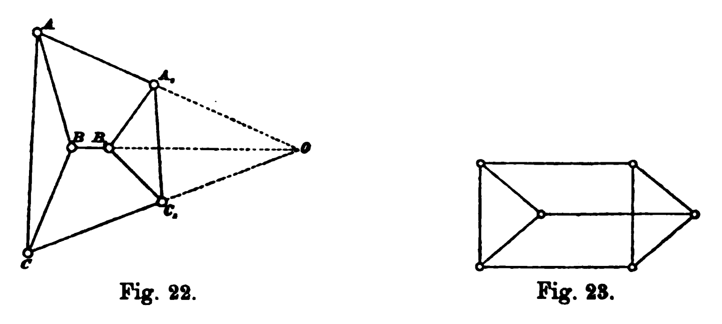


Fig. 22. Fig. 23.

sonderen Fällen kann auch endliche Bewegung auftreten, vgl. Fig. 23.

Jedenfalls lässt sich der Satz aussprechen:

Hat ein Gelenksystem von $m = 2n - 3$ Stäben diejenige Struktur, welche für ein freies kinematisch bestimmtes Fachwerk erforderlich ist, so ist es entweder ein solches, oder es liegt der Grenzfall vor.

Hat ein Gelenksystem mehr als $2n - 3$ Stäbe, so ist es entweder kinematisch überbestimmt oder kinematisch unbestimmt. Bei der Entscheidung dieser Frage kommt es darauf an zu untersuchen, ob das obige System der Gleichungen (1) sich auf $2n - 3$ voneinander unabhängige zurückführen lässt oder auf weniger als $2n - 3$.

31. Das statische Grundproblem für die freien Fachwerke. „Bestimmte" Fachwerke. Auf die Gelenke (Knotenpunkte) eines Gelenksystemes sollen Kräfte wirken, welche zusammengenommen untereinander im Gleichgewichte sich befinden. Die sich dann ergebende Aufgabe, die Spannungen in den einzelnen Stäben, die infolge dieser Kräfte auftreten, zu bestimmen, lässt sich so formulieren: *Die auf die Knotenpunkte wirkenden und in ihrer Gesamtheit im Gleichgewicht stehenden Kräfte sollen in der Weise in die einzelnen Stäbe zerlegt werden, dass sich in jedem Stabe zwei gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Kräfte ergeben.* Die absolute Grösse der beiden Kräfte in einem Stabe giebt die absolute Grösse der betreffenden Spannung, während durch deren Richtung bestimmt ist, ob in dem Stabe Zug oder Druck herrscht. In der Regel wird diese Aufgabe der Spannungsbestimmung in etwas veränderter Weise gefasst. Statt der betreffenden Komponenten der auf ein Gelenk wirkenden Kraft P werden ihnen entgegengesetzte, gleich grosse Kräfte, die *Gelenkdrücke*, eingeführt. Dann ist die in einem Knotenpunkte A angreifende Kraft P

in das Gleichgewicht zu setzen mit den auf den Punkt A wirkenden und in den in A zusammentreffenden Stäben liegenden Gelenkdrücken, wobei die beiden Gelenkdrücke, welche in demselben Stabe liegen, und die auf die beiden den Stab begrenzenden Knotenpunkte wirken, dieselbe Grösse, aber entgegengesetzte Richtung haben müssen. Die letzte Auffassung hat den Vorteil, dass man die für jeden Knotenpunkt sich ergebenden Kräftepolygone in derselben Richtung von der betreffenden Kraft P ausgehend zu umfahren hat (siehe die *Polygonmethode* in Nr. 32). Wir erläutern zunächst den analytischen Ansatz.

In einem Gelenksysteme von n Knotenpunkten und m Stäben seien die Koordinaten der Knotenpunkte mit x_i, y_i, die Komponenten der auf x_i, y_i wirkenden Kraft mit X_i, Y_i, die Länge eines zwei Knotenpunkte x_i, y_i und x_k, y_k verbindenden Stabes mit l_{ik} und die Spannung in demselben mit S_{ik} bezeichnet. Dann ergeben sich für die Spannungen die Gleichungen

$$X_i = \sum_k S_{ik} \frac{x_i - x_k}{l_{ik}},$$

$$Y_i = \sum_k S_{ik} \frac{y_i - y_k}{l_{ik}}, \text{ [128]}$$

wobei die Summen über diejenigen Knotenpunkte $x_k y_k$ zu erstrecken sind, welche mit dem Knotenpunkte $x_i y_i$ durch Stäbe verbunden sind. Die Zahl dieser $2n$ Gleichungen reduziert sich infolge der Gleichgewichtsbedingungen, denen die Kräfte genügen sollen:

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum (Y_i x_i - X_i y_i) = 0$$

auf $2n - 3$ voneinander unabhängige. Die Bestimmung der Spannungen erfolgt durch Auflösung dieses Systemes von $2n - 3$ linearen Gleichungen mit m Unbekannten.

Soll das Gelenksystem *statisch bestimmt* sein, d. h. sollen sich für jedes Gleichgewichtssystem der Kräfte X_i, Y_i ganz bestimmte endliche und eindeutige Werte für die Spannungen ergeben, so ist erforderlich:

a) dass die Zahl der obigen von einander unabhängigen Gleichungen übereinstimmt mit der Zahl der Unbekannten. Das Gelenksystem muss somit $m = 2n - 3$ Stäbe haben, also ebensoviele Stäbe haben, wie die kinematisch bestimmten Fachwerke.

128) *A. Castigliano*, Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques, Turin 1879, p. 15. Werden die Gleichungen für die Spannungen in dieser Weise geschrieben, wobei in den Summen auf den rechten Seiten stets mit den Koordinaten x_i, y_i angefangen wird, also mit den Koordinaten desjenigen Knotenpunktes, auf den die betreffende Kraft $X_i Y_i$ wirkt, so wird S_{ik} positiv im Falle einer Zugspannung und negativ im Falle einer Druckspannung, vgl. *L. Henneberg*, Statik, p. 223.

b) Es muss die Eliminationsdeterminante Δ der Gleichungen einen von Null verschiedenen Wert besitzen.

A. Föppl hat nun den wichtigen Satz bemerkt[129]), dass diese Determinante Δ übereinstimmt mit der vorhin besprochenen Determinante D, von welcher es abhängt, ob ein Gelenksystem von $m = 2n - 3$ Stäben kinematisch bestimmt ist oder nicht. So ergiebt sich der Satz von *A. Föppl*:

Die freien kinematisch bestimmten Fachwerke sind identisch mit den statisch bestimmten Gelenksystemen.

Infolge dieses Satzes werden von *A. Föppl* die freien kinematisch bestimmten Fachwerke schlechtweg als *„bestimmte" Fachwerke* bezeichnet.

Die Bestimmung der Spannungen in einem bestimmten Fachwerke ist zurückgeführt auf die Auflösung des obigen Systemes von $2n - 3$ linearen Gleichungen mit $2n - 3$ Unbekannten und nicht verschwindender Determinante[130]).

Ist ein Gelenksystem von $m = 2n - 3$ Stäben kinematisch unbestimmt, sei es nun, dass ein Teil des Gelenksystemes zu viel, ein anderer Teil zu wenig Stäbe hat, sei es, dass der *Grenzfall* vorliegt, so lässt sich die Spannungsbestimmung nur für spezielle Kräftesysteme durchführen und führt dann auf unendlich viele Werte für die Spannungen[130a]). Daraus folgt der Satz:

129) Dass die beiden Determinanten übereinstimmen, ist ausgesprochen und der Beweis kurz angedeutet in *Föppl*, Theorie des Fachwerks, p. 26. Später giebt *A. Föppl*, Schweiz. Bauz. 9 (1887), p. 42 einen ausführlicheren Beweis. Werden in Rücksicht darauf, dass oben $\delta x_1 = 0$, $\delta y_1 = 0$, $\delta x_2 = 0$ gesetzt ist, nun die Gleichungen für X_1, Y_1, X_2 weggelassen und dann in den Gleichungen für die Spannungen die Grössen $\frac{S_{ik}}{l_{ik}}$ als die Unbekannten betrachtet, so ergeben sich diese beiden Determinanten aus einander durch Vertauschung der Reihen und Zeilen, wie *A. Föppl* gezeigt hat. Bei *L. Henneberg*, Statik, wird der Satz von *Föppl* bewiesen durch den Nachweis, dass die kinematisch bestimmten Fachwerke und die statisch bestimmten Gelenksysteme dieselbe Struktur haben, und dass beide Male die Grenzfälle sich decken.

130) In den folgenden Nummern werden demgemäss wesentlich die Methoden gegeben werden müssen, welche zur graphischen oder analytischen Auflösung dieses Systemes von linearen Gleichungen dienen. Zunächst soll die Untersuchung durchgeführt werden für spezielle Fachwerksformen (Nr. 32 und 33). Daran schliesst sich die Untersuchung der Struktur des allgemeinen bestimmten ebenen Fachwerkes (Nr. 34). Auf Grund dieser Struktur werden dann (Nr. 35—38) die allgemeinen Methoden für die Auflösung des obigen Systemes von Gleichungen entwickelt. Den Schluss des Abschnittes bilden die Kriterien für das Auftreten der Grenzfälle (Nr. 39).

130a) Dass die Spannungen beim Grenzfall im allgemeinen unendlich gross werden, hat zuerst *O. Mohr*, Civiling. 31 (1885), p. 295 bemerkt; vgl. auch *L. Henneberg*, Statik, p. 231.

Ein Gelenksystem von $m = 2n - 3$ Stäben ist ein bestimmtes Fachwerk, sobald sich für irgend ein angenommenes Gleichgewichtssystem von Kräften die Spannungen als endlich und eindeutig bestimmen lassen[131].

Ist ein *kinematisch überbestimmtes* Fachwerk gegeben von n Knotenpunkten und $m = 2n - 3 + p$ Stäben, so ist die Zahl der unbekannten Spannungen um p grösser als die Zahl der linearen Gleichungen. Es ergeben sich somit unendlich viele Werte für die Spannungen. Die kinematisch überbestimmten Fachwerke werden daher als *statisch unbestimmte Fachwerke* bezeichnet. Die Spannungen lassen sich bei einem statisch unbestimmten Fachwerke in der Form anschreiben

$$S_{ik} = S_{ik}^{(0)} + \lambda_1 S'_{ik} + \lambda_2 S''_{ik} + \cdots + \lambda_p S_{ik}^{(p)},$$

wobei $S_{ik}^{(0)}$ irgend ein mögliches Wertesystem der Spannungen darstellt, während $S'_{ik}, \cdots S_{ik}^{(p)}$ p von einander verschiedene Wertesysteme für die Spannungen bedeuten, die möglich sind, wenn sämtliche äusseren Kräfte gleich Null gesetzt werden. Die spezifische Untersuchung der statisch unbestimmten Fachwerke läuft auf die Bestimmung der p Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ hinaus, was mit Hülfe der Elastizitätslehre möglich ist.

Wir werden bei den folgenden Betrachtungen die statisch unbestimmten Fachwerke der Kürze halber beiseite lassen[132], womit dann auch die Betrachtung der *mehrfach zusammenhängenden* Fachwerke entfällt, über die *Maxwell* in seiner Abhandlung von 1869 einige vorläufige Bemerkungen macht.

32. Dreiecksfachwerke. Schnittmethode. Methode der Kräftepolygone. Fachwerke, welche man sich entstanden denken kann durch Aneinanderlegen von Dreiecken, werden *Dreiecksfachwerke* genannt. *A. Ritter*[133] und *C. Culmann*[134] haben in ihren anfänglichen Untersuchungen überhaupt nur an Dreiecksfachwerke gedacht und demgemäss die Fachwerke definiert.

Unter einem Fachwerk wird von *Culmann* geradezu ein System von Stäben verstanden, das nach dem umstehenden Schema hergestellt ist[135].

---

131) Dieser Satz wird wichtig werden, wenn es sich um die Entscheidung des Grenzfalles handelt.

132) Die Behandlung der statisch unbestimmten Fachwerke wird in den Referaten über Elastizität und Festigkeitslehre ihren Platz finden. In der Praxis kommen sehr oft statisch unbestimmte Fachwerke vor, vgl. die unten in Nr. 48 und 49 gegebene Aufzählung.

133) Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen, Hannover 1863.

134) Graphische Statik, 1. Aufl. (1866), 1. Teil (1864).

135) *Culmann*, Gr. St., p. 362.

Der Polygonzug 1, 3, 5, 7, u. s. w., auf welchem sämtliche Knotenpunkte liegen, wird die *Gurtung* oder der *Rand* des Fachwerkes genannt, die betreffenden Stäbe die *Gurtungs-* bezw. die *Randstäbe*. Die übrigen Stäbe $\overline{23}$, $\overline{34}$, $\overline{45}$, ..., welche einen fortlaufenden Zug bilden, werden als *Diagonalen* bezw. als *Diagonalstäbe* bezeichnet, die Dreiecksflächen $\overline{123}$, $\overline{234}$, ..., durch deren Aneinanderfügen das

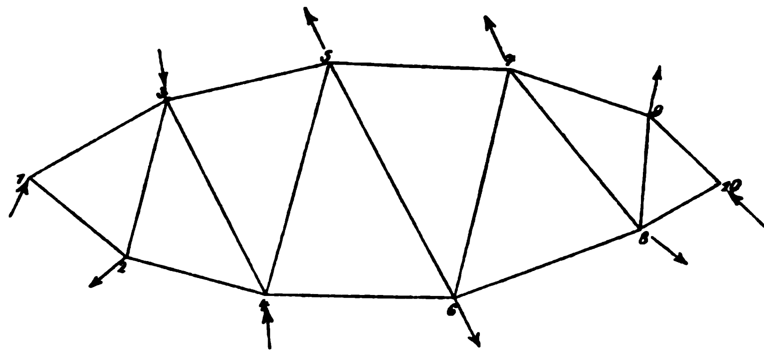


Fig. 24.

System entstanden gedacht werden kann, als die *Fächer* oder *Felder* des Fachwerkes.

Das hier von *Culmann* als Fachwerk eingeführte System ist im Sinne einer allgemeinen Definition als ein spezielles Dreiecksfachwerk zu bezeichnen, da bei den allgemeinen Dreiecksfachwerken die Diagonalen keinen fortlaufenden Zug zu bilden brauchen.

Zur *Bestimmung der Spannungen* werden nun bei *Ritter* und *Culmann* Schnitte durch das Fachwerk gelegt, welche nur drei nicht durch denselben Punkt gehende Stäbe treffen (*Schnittmethode*). Die Bestimmung der Spannungen erfolgt dann durch die Bemerkung, dass diejenigen Kräfte, welche auf den einen Teil des Fachwerkes wirken, im Gleichgewicht stehen müssen mit den drei Gelenkdrücken, welche von dem anderen Teile des Fachwerkes herrühren und in den drei vom Schnitte getroffenen Stäben liegen. Im weiteren unterscheiden sich die Methoden von *Ritter* und *Culmann* nur durch die verschiedene Art der Lösung der Aufgabe, eine Kraft in drei Komponenten zu zerlegen, welche in drei vorgeschriebenen Geraden liegen (s. Nr. **13**).

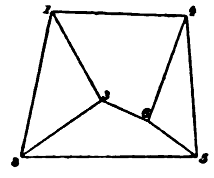


Fig. 25.

Die Schnittmethode ist stets anwendbar, wenn sich durch das Fachwerk ein Schnitt legen lässt, der nur drei Stäbe trifft, die (bezw. deren Verlängerungen) nicht durch denselben Punkt gehen, und

kann dann zur Bestimmung der Spannungen in den drei vom Schnitte getroffenen Stäben verwandt werden. Die Bedeutung der Schnittmethode geht daher über die Dreiecksfachwerke hinaus. So kann in dem beigezeichneten Fachwerke (Fig. 25), welches kein Dreiecksfachwerk ist, die Schnittmethode benutzt werden zur Bestimmung der Spannungen in den drei Stäben $\overline{14}$, $\overline{25}$, $\overline{36}$.

Bei der Methode der *Kräftepolygone* (*Polygonalmethode*)[136]) erfolgt die Bestimmung der Spannungen in der Reihenfolge 1, 2, 3, 4, ... (Fig. 24) der Knotenpunkte für jeden Knotenpunkt einzeln durch das zugehörige Kräftepolygon, da sich dann stets nur zwei unbekannte Gelenkdrücke ergeben, die durch die Bedingung des geschlossenen Kräftepolygones bestimmt sind. Jede Spannung kommt hierbei zweimal vor und zwar in den beiden Kräftepolygonen, die für die beiden den betreffenden Stab begrenzenden Knotenpunkte konstruiert sind. In Fig. 26 sind nach der Polygonalmethode die Spannungen

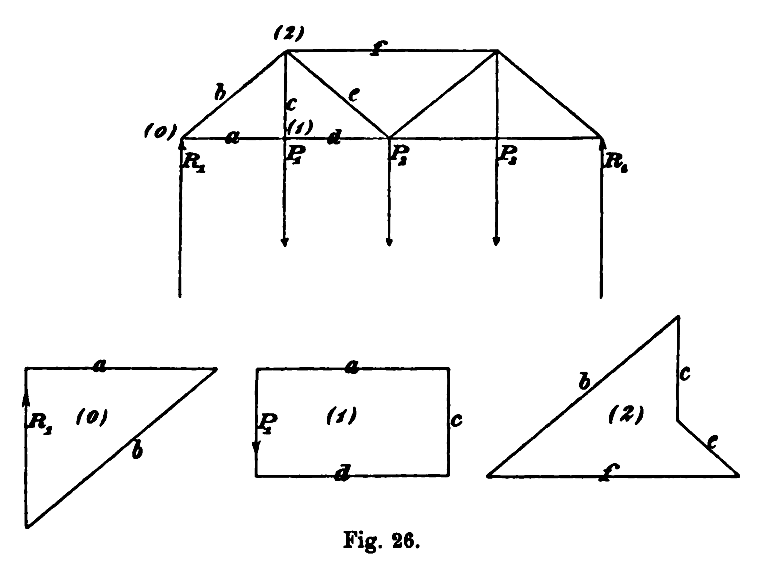


Fig. 26.

für einen einfachen symmetrisch gebauten und symmetrisch belasteten Brückenträger bestimmt. Infolge der Symmetrieverhältnisse brauchen die Spannungen dabei nur für die Hälfte des Fachwerkes gefunden zu werden. Es sind daher die Kräftepolygone nur für die Knotenpunkte (0), (1) und (2) gezeichnet. In den einzelnen Kräftepolygonen haben die Spannungen dieselbe Bezeichnung wie die betreffenden Stäbe

136) Die Polygonalmethode scheint von *M. Taylor* und *Fl. Jenkin* zuerst benutzt worden zu sein, vgl. *Cremona-Saviotti*, Les figures réciproques, p. 8.

des Fachwerkes erhalten. Die Spannungen b und f sind Druckspannungen, die übrigen Zugspannungen.

Die Bedeutung der Polygonalmethode geht ebenfalls über die Dreiecksfachwerke hinaus. Dieselbe ist anwendbar für alle Fachwerke, welche man sich aus einem Dreieck durch successives Hinzufügen von weiteren Knotenpunkten, von denen jeder durch zwei Stäbe festgelegt ist, entstanden denken kann[137]). Bei dem Zeichnen der Kräftepolygone ist mit dem zuletzt hinzugekommenen Knotenpunkte zu beginnen, dann zum vorletzten überzugehen, u. s. w., sodass sich stets Polygone ergeben, von denen sämtliche Seiten mit Ausnahme von zweien von vornherein bekannt sind.

Vom analytischen Gesichtspunkte aus betrachtet, liefert die Schnittmethode für den Fall ihrer Anwendbarkeit ein Mittel, um aus den linearen Gleichungen des Problems sämtliche Spannungen mit Ausnahme von dreien zu eliminieren, und so drei lineare Gleichungen herzustellen mit drei Unbekannten bezw. drei Gleichungen, von denen jede nur eine Unbekannte enthält. Bei der Polygonalmethode, falls dieselbe anwendbar ist, werden die obigen Gleichungen zu je zweien so gruppiert, dass ihre Auflösung sich durch successives Auflösen von je zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten bewerkstelligen lässt.

Aus der Schnittmethode ergiebt sich die zuerst von *H. Müller-Breslau* benutzte Methode der *imaginären Gelenke*[138]), die in einer zweifachen Anwendung der Schnittmethode besteht. Diese Methode kann verwandt werden zur Bestimmung der Spannungen in zwei Stäben a und b, wenn sich durch dieselben zwei Schnitte g_1 und g_2 legen lassen, von denen der erste ausser den beiden Stäben a und b nur noch zwei Stäbe c_1 und d_1, der letzte zwei Stäbe c_2 uud d_2 trifft. Werden nämlich für diese beiden Schnitte die Momentengleichungen aufgestellt und zwar bei dem Schnitte g_1 unter Benutzung des Schnittpunktes O_1 von c_1 und d_1 als Drehpunkt, und bei dem Schnitte g_2 für den Schnittpunkt O_2 von c_2 und d_2 als Drehpunkt, so ergeben sich zwei lineare Gleichungen für die Spannungen in den Stäben a und b. Die Schnittpunkte O_1, O_2 der Linien c_1, d_1 und c_2, d_2 werden dabei als imaginäre Gelenke bezeichnet.

Durch diese verschiedenen Methoden sind die Spannungen in

---

137) Siehe Nr. 34 (das dort an zweiter Stelle angeführte Bildungsgesetz).

138) Schweiz. Bauz. 9 (1887), p. 122. *H. Müller-Breslau* bestimmt die Spannungen in einem Fachwerke, das durch ein Sechseck und die drei Hauptdiagonalen gebildet ist. Die Benennung *imaginäre Gelenke* ist von *A. Föppl* eingeführt: Theorie des Fachwerks (1880), p. 40.

vielen schon komplizierteren Fachwerken bestimmbar. Häufig wird es hierbei notwendig sein, bei demselben Fachwerke mehrere Methoden zu verwenden[139]).

33. Maxwell'sche Fachwerke. Ausgehend von der durch ihn begründeten Theorie der reziproken Figuren (Nr. 12) stellte sich *Clerk Maxwell*[140]) die Aufgabe, Fachwerke zu finden, deren Kräftepolygone sich so zusammenlegen lassen, dass sie eine zu dem ursprünglichen Fachwerke und den an ihm wirkenden Kräften reziproke Figur bilden.

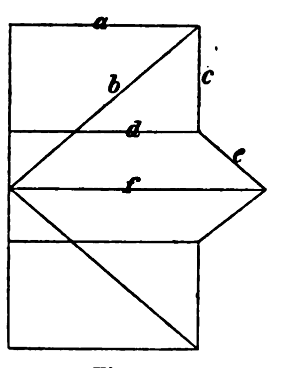


Fig. 27.

Beispielsweise kann man die drei Kräftepolygone der Fig. 26 und die zu ihnen symmetrischen, in Fig. 26 nicht gezeichneten Kräftepolygone, so zusammenlegen, dass beistehende Figur entsteht, die zu der des in Fig. 26 dargestellten Brückenträgers reziprok ist. Augenscheinlich hat die Fig. 27 vor den Polygonen der Fig. 26 den Vorzug, dass bei ihr die Spannung eines jeden Stabes nur einmal vorkommt.

Aus den Untersuchungen von *Maxwell* ergiebt sich nun:

Alle und nur solche bestimmten Fachwerke, welche zusammen mit den Aktionslinien der wirkenden Kräfte als orthogonale Projektion einer Polyederschale angesehen werden können, liefern reziproke Kräftepläne.

Wir werden die betreffenden Fachwerke als *Maxwell'sche Fachwerke* bezeichnen. Will man bei einem Maxwell'schen Fachwerke das Bild eines geschlossenen Polyeders vor Augen haben, so kann man so verfahren, dass man in die Aktionslinien der wirkenden Kräfte noch ein Seilpolygon einspannt und dementsprechend in der reziproken Figur die vom zugehörigen Pole des Kräftepolygons nach den Ecken desselben gehenden Diagonalen hinzufügt.

In Nr. 12 ist der Zusammenhang der reziproken Figuren mit dem Nullsystem ausführlich besprochen und zum Teil durch Formeln

---

139) Eine ganze Reihe spezieller Methoden finden sich bei *C. Saviotti*, La statica grafica, Milano 1888. *Saviotti* untersucht eine grosse Zahl schwierigerer Fachwerke, bei denen er die Spannungen vielfach durch spezielle Überlegungen findet.

140) Phil. Mag. (4) 27 (1864) und Edinb. Roy. Trans. 26 (1872) = Papers 1, p. 514 bezw. Papers 2, p. 161.

erläutert. In der nachfolgenden Figur (Fig. 28) ist die ganze Konstruktion für einen Dachstuhl, auf dessen Knotenpunkte ausser der Belastung noch Winddruck wirkt (die Seitenansicht findet sich in der Figur links unten) nach den Methoden der darstellenden Geometrie in Grundriss und Aufriss durchgeführt[141]).

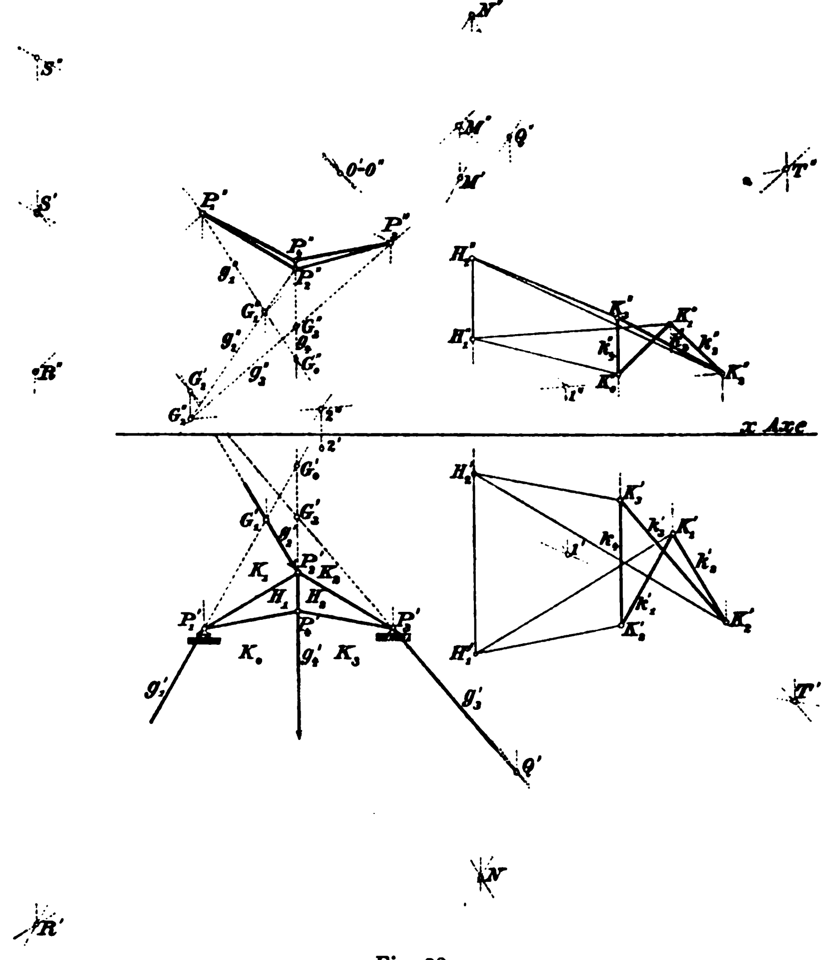


Fig. 28.

Übrigens hat eine derartige Figur nur theoretisches Interesse; für die Konstruktion der reziproken Kräftepläne braucht man nicht aus der Ebene herauszutreten.

141) Ref. verdankt diese Figur, wie überhaupt eine Reihe sonst verwendeter wertvoller Mitteilungen Herrn *F. Schilling.*

Bequem ist bei der Herstellung der reziproken Kräftepläne die Bezeichnung von *R. H. Bow*[142]), nach welcher im Fachwerk die einzelnen Fächer und im Kräfteplan die diesen Fächern entsprechenden Punkte dieselbe Bezeichnung erhalten[143]).

Unabhängig von *Maxwell* sind *M. Taylor* und *Fl. Jenkin*[144]) durch das praktische Bedürfnis veranlasst zu diesen reziproken Kräfteplänen gekommen. Auch sind schon von *Fl. Jenkin*[144]) die reziproken Kräftepläne für eine ganze Reihe von technisch wichtigen Fachwerken angegeben. Weitere Beispiele gab von englischer Seite *R. H. Bow*[142]). Andere zum Teil komplizierte Beispiele hat *L. Cremona* hinzugefügt. Hervorzuheben ist die systematische Darstellung *L. Cremona*'s unter Benutzung des Nullsystemes.

Vorzugsweise einfach werden die reziproken Kräftepläne für alle diejenigen Fachwerke, welche in der Form Fig. 24 enthalten sind. Für die betreffenden Kräftepläne fand *L. Cremona* die folgenden Regeln[145]), mit Hülfe deren man dieselben rein schematisch[146]) zeichnen kann:

Im Kräftepolygone sind die Kräfte in der nämlichen Reihenfolge anzuordnen, wie die Knotenpunkte bei Umgehung der Gurtung des Fachwerkes auf einander folgen. Von den Eckpunkten dieses Kräftepolygones müssen die Spannungen in den Gurtungsstäben ausgehen, und zwar die Spannung in dem die Knotenpunkte i und k verbindenden Gurtungsstabe von demjenigen Punkte aus, in welchem die auf diese Knotenpunkte i und k wirkenden Kräfte im Kräftepolygone zusammenkommen. Die Diagonalspannungen bilden einen fortlaufenden Zug. Die Spannungen in den Stäben eines Faches kommen in einem Punkte zusammen.

So einfach wie in Fig. 27 werden die Zeichnungen allerdings nicht immer.

Die nachfolgende Fig. 29 giebt den Kräfteplan für ein Fachwerk von der Form Fig. 24. $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_8, b_1$ ist das Kräftepolygon für die auf die Knotenpunkte $1, 2, 3, \ldots$ wirkenden Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$,

---

142) *R. H. Bow*, Economies of constructions in relation to framed structures, London 1873.

143) Cambr. Phil. Soc. Proc. 2 (1876) = Papers 2, p. 492.

144) Edinb. Roy. Soc. Trans. 25 (1869), p. 441.

145) *L. Cremona*, Le figure reciproche nella statica grafica. — Die im Text gegebenen Regeln reichen aus für eine grosse Zahl technisch wichtiger Fachwerke.

146) Es ist hier also nicht nötig, sich erst die räumlichen Figuren zu bilden (s. die obige Bemerkung).

welche ein Gleichgewichtssystem bilden. In diesem Kräftepolygone sind die Kräfte in der Reihenfolge $P_1, P_2, P_4, P_6, P_8, P_7, P_5, P_3$ an einander angetragen, somit in der Reihenfolge wie die Knotenpunkte des Fachwerkes bei Umgehung des Randes. Die Spannungen in den Gurtungsstäben des Fachwerkes sind die Linien, welche von den Eckpunkten $b_1, b_2, \ldots$ des Kräftepolygones ausgehen. Insbesondere ist die Strecke $\overline{b_4 \mathrm{IV}}$, welche von dem Punkte b_4 ausgeht, in dem die Kräfte P_4 und P_6 zusammentreffen, die Spannung in dem Gurtungsstabe $\overline{46}$. Der Linienzug I, II, III... ist der Zug der Diagonalspannungen. So ist $\overline{\mathrm{I\,II}}$ die Spannung in der Diagonalen $\overline{23}$, $\overline{\mathrm{II\,III}}$ die Spannung in der Diagonalen $\overline{34}$ u. s. w. Die Punkte I, II, ... sind diejenigen

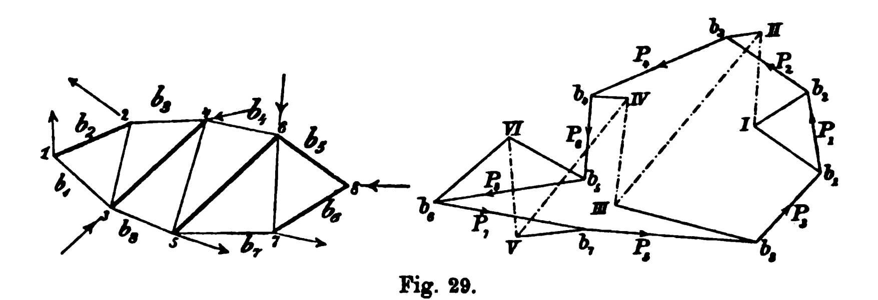


Fig. 29.

Punkte des Kräfteplanes, welche den einzelnen Fächern des Fachwerkes entsprechen, und in denen stets die drei Spannungen zusammentreffen, die in den das betreffende Fach begrenzenden Stäbe liegen. In der Zeichnung des Fachwerkes sind, wie dieses üblich ist, die auf Druck in Anspruch genommenen Stäbe durch eine zweite schwächere Linie hervorgehoben.

Es entsteht die Frage: Wann lässt sich überhaupt ein Fachwerk nebst den Aktionslinien der wirkenden Kräfte und dem Seilpolygon als Projektion eines Polyedergebildes betrachten, sodass ein reziproker Kräfteplan (*Diagramm*) möglich ist? Diese Frage beantwortet *J. Petersen* durch den Satz: *Wenn jeder geschlossene „Polygonweg“ ein Stück vom Systeme vollständig losschneidet, so existiert ein Diagramm*[147]). (*Petersen* setzt dabei das Fachwerk nicht notwendig als bestimmt und nicht einmal als eben voraus.) Dagegen giebt *F. Schur* (vgl. Nr. 38 u. Fussn. 173) die Regel: für das Fachwerk solle eine vollständige und zusammenhängende Zerlegung in $k - 1$ „einfache“ Polygone existieren (k ist dabei die Zahl der Knotenpunkte).

147) *J. Petersen*, Statik, p 159.

34. Die Struktur des (allgemeinen) „bestimmten" ebenen Fachwerkes. In den folgenden Betrachtungen seien die Knotenpunkte nach der Zahl der Stäbe unterschieden, die in ihnen zusammenkommen, und zwar sei ein Knotenpunkt, in dem $k+1$ Stäbe durch ein Gelenk verbunden sind, ein k-facher Knotenpunkt genannt[148]).

Die älteren Methoden zur Herstellung von bestimmten ebenen Fachwerken sind wesentlich die beiden folgenden[149]):

1) Man sucht zwei bestimmte ebene Fachwerke (*Scheiben*) von n_1 und n_2 Knotenpunkten zu einem einzigen bestimmten ebenen Fachwerke von n_1+n_2 Knotenpunkten zu vereinigen. Dies geschieht, indem drei Knotenpunkte des einen Fachwerkes durch drei Stäbe mit drei Knotenpunkten des anderen Fachwerkes verbunden werden[150]). Hierbei dürfen sich die drei Stäbe bezw. ihre Verlängerungen nicht in demselben Punkte schneiden, sonst würde „der Grenzfall" eintreten[151]).

2) *Aus einem bestimmten ebenen Fachwerk von n Knotenpunkten lässt sich ein solches von $n+1$ Knotenpunkten herleiten, wenn nach Annahme eines Punktes C als $(n+1)^{\text{ten}}$ Knotenpunkt derselbe durch Stäbe mit zwei Knotenpunkten A und B des Fachwerkes von n Knotenpunkten verbunden wird. Hierbei darf der Punkt C nicht auf der Verbindungslinie der Punkte A und B liegen, da sonst der Grenzfall eintreten würde.*

Der erste, welcher sich das allgemeine Problem stellte, sämtliche bestimmten Fachwerke von gegebener Knotenzahl zu finden, ist *C. Saviotti*[152]). Wenn auch *Saviotti* eine Reihe von weiteren Gesetzen angibt, so sind dieselben doch nicht die allgemeinsten.

Von *L. Henneberg*[153]) werden die allgemeinen Gesetze zur Herstellung von bestimmten ebenen Fachwerken mit Hülfe des aus der Gleichung

$$m = 2n - 3$$

folgenden Satzes hergeleitet:

---

148) *M. Grübler* bezeichnet dagegen einen Knotenpunkt, in dem k Stäbe zusammenkommen, als einen k-fachen.

149) *Lévy*, La statique graphique, Paris 1874, 2. Aufl. 1886; *Föppl* etc.

150) Es können von den Knotenpunkten einzelne zusammenfallen; so dürfen z. B. zwei Stäbe von dem nämlichen Knotenpunkte ausgehen.

151) Kann das Fachwerk als in dieser Weise hergestellt erklärt werden, so lassen sich Schnitte durch das Fachwerk legen, welche nur drei nicht durch einen Punkt gehende Stäbe treffen, was bei der Schnittmethode vorausgesetzt ist.

152) La statica grafica und *Cremona-Saviotti,* Les figures réciproques.

153) Statik, Darmstadt 1886 und Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 3 (1894), p. 567.

Ein bestimmtes ebenes Fachwerk hat wenigstens e i n e n *einfachen oder zweifachen Knotenpunkt.*

Es sind hiernach zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Das Fachwerk von n Knotenpunkten hat einen einfachen Knotenpunkt. Wird dann dieser Knotenpunkt nebst den beiden nach ihm führenden Stäben weggenommen, so entsteht ein „bestimmtes" ebenes Fachwerk von $n-1$ Knotenpunkten.

b) Das Fachwerk von n Knotenpunkten hat keinen einfachen Knotenpunkt. Dann ist jedenfalls ein zweifacher Knotenpunkt O vorhanden, von welchem drei Stäbe nach drei anderen Knotenpunkten A, B, C gehen. Nach Wegnahme des Knotenpunktes O und dieser drei Stäbe entsteht ein bewegliches System und zwar werden wenigstens zwischen zweien der Punkte A, B, C, z. B. zwischen A und B Bewegungen möglich sein. Alsdann ist das bei Verbindung der beiden Knotenpunkte A und B durch einen Stab entstehende Stabsystem von $n-1$ Knotenpunkten und $[2(n-1)-3]$ Stäben ein bestimmtes Fachwerk von $n-1$ Knotenpunkten.

Da nach Wegnahme des Knotenpunktes O und der drei Stäbe $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ nur Bewegungen zwischen zweien der drei Punkte A, B, C möglich zu sein brauchen, so sind bei der Zurückführung des Fachwerkes von n Knotenpunkten auf ein solches von $n-1$ Knotenpunkten unter Umständen drei Möglichkeiten zu prüfen.

Umgekehrt folgt der Satz:

3) *Aus einem bestimmten ebenen Fachwerke von* $n-1$ *Knotenpunkten, bei welchem zwei Knotenpunkte* A *und* B *durch einen Stab verbunden sind, lässt sich ein solches von* n *Knotenpunkten herleiten, indem nach Wegnahme des Stabes* AB *und Fixierung eines Punktes* O *als* n^{ten} *und zwar als zweifachen Knotenpunkt derselbe mit den Punkten* A *und* B *und einem beliebig gewählten dritten Knotenpunkt* C *durch Stäbe verbunden wird. Hierbei ist die Wahl des Punktes* O *an die Bedingung geknüpft, dass* O *nicht auf einem gewissen Kegelschnitt, dem Grenzkegelschnitt*[154]*), liegen darf, da sonst der Grenzfall eintreten würde.*

Da jedes bestimmte ebene Fachwerk von n Knotenpunkten sich durch die Regeln a) und b) auf ein solches von $n-1$ Knotenpunkten und in letzter Linie auf ein Dreieck zurückführen lässt, so genügen umgekehrt die Gesetze 2) und 3) zur Herstellung sämtlicher bestimmten ebenen Fachwerke von gegebener Knotenzahl.

---

154) Für diesen von *L. Henneberg* gefundenen Grenzkegelschnitt hat *M. Grübler* eine Konstruktion gegeben. Zeitschr. Math. Phys. 35 (1890), p. 247.

Hierdurch ist das, was bereits oben (Nr. **30**) *als Struktur des bestimmten Fachwerkes bezeichnet wurde, endgültig festgelegt.*

Ein Fachwerk, zu dessen Herstellung nur das Gesetz 2) verwandt ist, wird von *Föppl* ein *einfaches* genannt, ein solches dagegen, zu dessen Herstellung auch das Gesetz 3) erforderlich ist, ein *zusammengesetztes.* Dasjenige Fachwerk, welches aus einem bestimmten ebenen Fachwerk nach successivem Wegnehmen aller einfachen Knotenpunkte entsteht, wird nach *G. Lang* als die *Grundfigur* oder das *Grundeck* des gegebenen Fachwerkes bezeichnet[155].

Vielfach wird die sog. *Methode der Stabvertauschung* zur Herstellung von neuen Fachwerken empfohlen[156]. Dieselbe ist nur dann dazu geeignet, wenn das Fachwerk, von welchem man ausgeht, so einfach ist, dass man sofort erkennt, welche Stäbe man vertauschen darf, ohne dass durch die betreffende Stabvertauschung sich eine Beweglichkeit ergiebt.

Ist ein Gelenksystem auf Grund der Gesetze 2) und 3) hergestellt, so ist es entweder ein bestimmtes Fachwerk, oder es liegt der Grenzfall vor. Die Entscheidung hierüber bedarf einer besonderen Untersuchung (Nr. **39**). Ergiebt sich, dass der Grenzfall vorliegt, so wird eine geringe Änderung der Lage der Knotenpunkte genügen, um das Gelenksystem zu einem bestimmten Fachwerk zu machen.

Umgekehrt sind die Regeln a) und b) zur Prüfung eines Gelenksystemes von n Knotenpunkten und $m = 2n - 3$ Stäben geeignet. Lässt sich ein Gelenksystem durch die Regeln a) und b) auf ein Dreieck zurückführen, so ist es entweder ein bestimmtes Fachwerk,

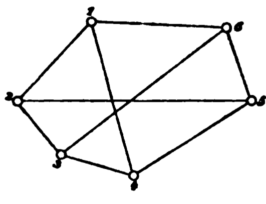


Fig. 30.

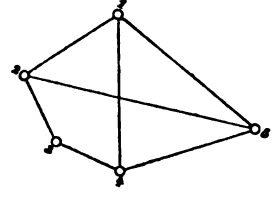


Fig. 31.

oder es liegt der Grenzfall vor, was wieder einer besonderen Untersuchung bedarf. Wird z. B. bei Fig. 30 der Knotenpunkt 6 nebst den drei Stäben $\overline{61}$, $\overline{63}$, $\overline{65}$ weggenommen und dafür der Stab 15 eingeschaltet, so entsteht das System Fig. 31, welches durch Wegnahme der Knotenpunkte 3 und 4 und der betreffenden Stäbe das

155) Riga, Ind.-Zeitung 15 (1889), p. 75.

156) *A. Föppl,* Graphische Statik, Leipzig 1900, p. 214.

Dreieck 125 ergiebt. Folglich ist das Gelenksystem Fig. 30 ein bestimmtes Fachwerk, oder es liegt der Grenzfall vor[157]).

Bezüglich der weiteren geometrischen Eigenschaften der bestimmten ebenen Fachwerke, der Frage nach der Anzahl der Dreiecke, der Vierecke u. s. w., der Frage nach der Anzahl der Knotenpunkte von gegebener Art etc. möge auf die Arbeiten von *G. Lang*[158]), *M. Grübler*[159]), *C. Rodenberg*[160]) und *Fr. Schur*[161]) verwiesen werden.

35. Bestimmung der Spannungen in den (allgemeinen) „bestimmten" ebenen Fachwerken. Einleitung. Durch die Schnittmethode sind die Spannungen in allen Fachwerken, bezw. in allen denjenigen Stäben eines Fachwerkes bestimmbar, durch welche sich Schnitte legen lassen, die nur drei nicht in einem Punkt zusammenkommende Stäbe treffen. Ebenso bietet die Bestimmung der Spannungen keine Schwierigkeiten, wenn das vorliegende Fachwerk lediglich unter Anwendung des Gesetzes 2) hergestellt ist. Allgemeinere Methoden sind eventuell erforderlich, wenn das Fachwerk sich nur durch Zuhülfenahme des Gesetzes 3) erklären lässt.

Mit der allgemeinen Aufgabe, die Bestimmung der Spannungen für ein beliebig gegebenes bestimmtes Fachwerk durchzuführen, haben sich zuerst *O. Mohr*, *A. Föppl* und *C. Saviotti* beschäftigt. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist hierbei zuerst von *Mohr* verwandt. *Föppl* sagt bezüglich dieser Aufgabe[162]), dass sich die Spannung in einem Stabe AB eines bestimmten Fachwerkes ermitteln lässt, indem man diesen Stab wegnimmt bezw. ersetzt durch zwei gleich grosse, entgegengesetzt gerichtete Kräfte, die in A und B angreifen und in der Linie AB liegen, und dann durch das Prinzip der virtuellen Verrückungen die Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Doch wird dieser Gedanke auch von *Föppl* nicht weiter zur Bestimmung der Spannungen verwertet, vgl. weiter unten Nr. 37.

---

157) Vgl. auch *L. Henneberg*, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 3 (1894). Hier ist unter einem einfachen Fachwerke gemäss der ursprünglichen *Mohr*schen Terminologie (Nr. 29) dasjenige verstanden, was jetzt im Text als bestimmtes Fachwerk bezeichnet ist.

158) Riga, Ind.-Zeitung 15 (1889), p. 73.

159) Riga, Ind.-Zeitung 13 (1887) p. 37 u. 49; 14 (1888), p. 277; 15 (1889), p. 88; 17 (1891), p. 75 u. 206.

160) Riga, Ind.-Zeitung 17 (1891), p. 73 u. 205.

161) Math. Ann. 48 (1897), p. 142.

162) Theorie des Fachwerks (1880), p. 20. Vorher hatte jedoch schon *Mohr* bemerkt, dass sich in dieser Weise die Bestimmung der Spannungen durchführen lässt, Zeitschrift d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 20 (1874), p. 512 und Civiling. (2) 31 (1885), p. 291.

Die Untersuchungen von *C. Saviotti* haben zu einer *Méthode de la fausse position* geführt[163]). Dieselbe beruht auf dem Satze: Ändert ein n-Eck in der Weise seine Form, dass sämtliche Seiten desselben durch feste Punkte einer und derselben Geraden gehen (die bei der Methode de la fausse position die unendlich ferne Gerade ist), während $n-1$ Eckpunkte gerade Linien beschreiben, so bewegt sich auch der n^{te} Eckpunkt auf einer Geraden. Die Methode ist insbesondere anwendbar, sobald sich, nach Annahme der Spannung in einem Stabe, ein reziproker Kräfteplan konstruieren lässt, und führt dann durch zweimaliges Probieren zum Ziele. In der beistehenden Figur ist mit Hülfe der Methode de la fausse position in einem ganz einfachen Fach-

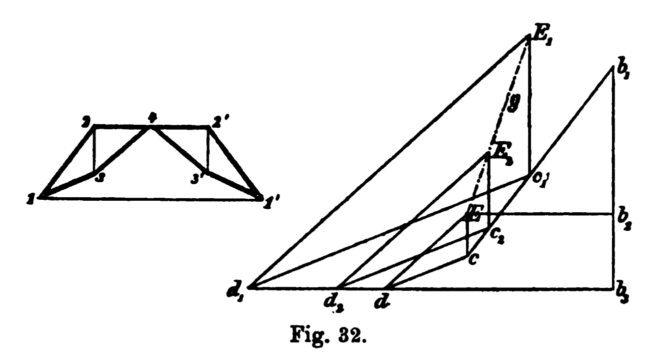


Fig. 32.

werke die Bestimmung der Spannungen durchgeführt (Fig. 32). Auf die Knotenpunkte 2, 4, 2′ wirken drei Kräfte $P_2, P_4, P_{2'}$, die vertikal nach abwärts gerichtet sind und dieselbe Grösse P haben. Das Fachwerk ist in 1 und 1′ gelagert, und die Lagerreaktionen P_1 und $P_{1'}$ werden infolge der Symmetrieverhältnisse dieselbe Grösse $P_1 = P_{1'} = \frac{3}{2}P$ erhalten. Infolge der Symmetrieverhältnisse ist es nur erforderlich, den halben Kräfteplan zu konstruieren. b_1, b_2, b_3 ist das Kräftepolygon, und zwar ist $P_2 = \overline{b_1 b_2}$, $\frac{P_4}{2} = \overline{b_2 b_3}$, $P_1 = \overline{b_3 b_1}$. Wird nun für die Spannung in dem Stabe $\overline{12}$ die Grösse $\overline{b_1 c_1}$ gewählt, so wird $\overline{c_1 d_1}$ die Spannung in $\overline{13}$ und $\overline{d_1 b_3}$ diejenige in $\overline{11'}$. Nachdem die Spannung in $\overline{13}$ gefunden ist, lässt sich der Knotenpunkt 3 untersuchen und zwar wird $c_1 d_1 E_1$ das Flächenstück, welches dem Punkte 3 entspricht, bezw. $\overline{d_1 E_1}$ und $\overline{E_1 c_1}$ werden die Spannungen in $\overline{34}$ und $\overline{23}$. Wird andererseits die Spannung in dem Stabe $\overline{12}$ gleich $\overline{b_1 c_2}$ gewählt, so kommt der frühere Punkt E_1 nach E_2, er bewegt sich somit in der

163) *Cremona-Saviotti*, Les figures réciproques, p. 65. In diesem Buche untersucht *Saviotti* auch Fachwerke, bei denen die Kräfte nicht in den Knotenpunkten, sondern an beliebigen Stellen der Stäbe angreifen, s. ch. IV u. V; s. auch Roma, Acc. dei Lincei Atti 2 (3) (1875), p. 148.

durch E_1 und E_2 bestimmten Geraden g. Da aber dieser Punkt in der durch b_2 gehenden zu $\overline{24}$ parallelen Linie (horizontalen Linie) liegen muss, so ist er der Schnitt von g mit dieser Linie. Nachdem so die wirkliche Lage E dieses Punktes gefunden ist, lässt sich der Kräfteplan für das Fachwerk leicht angeben und zwar bekommt die Spannung in dem Stabe $\overline{12}$ die Grösse $\overline{bc}$.

Aus dem Kräfteplane für dieses einfach gewählte Fachwerk geht die Bedeutung der Methode von *Saviotti* noch nicht genügend hervor, da sich auf dieses Fachwerk auch die Schnittmethode hätte anwenden lassen. *Saviotti* benutzt jedoch diese Methode auch zur Bestimmung des Kräfteplanes für kompliziertere Fachwerke, für welche die Schnittmethode versagt. Jedenfalls lässt sich die Methode stets verwenden, wenn sich für das Fachwerk nach Kenntnis der Spannung in *einem* Stabe ein reziproker Kräfteplan zeichnen lässt.

Die allgemeinen Methoden für die Bestimmung der Spannungen sind: die Methode von *Henneberg*, die *kinematische Methode* von *Mohr* und *Müller-Breslau* und die von *Schur* erweiterte *Methode der reziproken Kräftepläne* von *Maxwell-Cremona*.

36. Fortsetzung: Die Methode von Henneberg[164]. Die Spannungsbestimmung in dem gegebenen Fachwerke erfolgt durch mehrmalige Bestimmung der Spannungen in einem einfacheren (abgeleiteten) Fachwerke. Zur Herstellung des abgeleiteten Fachwerks werden die Strukturgesetze benutzt und so die Bestimmung der Spannungen in dem gegebenen Fachwerk von n Knotenpunkten auf diejenige im Fachwerke von $n-1$ Knotenpunkten zurückgeführt.

Es sei bei dem vorliegenden Fachwerk von n Knotenpunkten ein zweifacher Knotenpunkt O vorhanden[165]), der mit drei Knotenpunkten A, B, C des Fachwerkes durch Stäbe verbunden ist. Nach Wegnahme des Knotenpunktes O und der Stäbe OA, OB, OC sollen Verrückungen der Knotenpunkte A und B möglich sein, so dass bei Hinzufügen des Stabes AB sich ein bestimmtes Fachwerk von $n-1$ Knotenpunkten ergiebt.

Die auf das gegebene Fachwerk von n Knotenpunkten wirkenden Kräfte seien P_i, und speziell P_0, P_1, P_2, P_3 die Kräfte in den Knotenpunkten O, A, B, C. Die Komponenten von P_0, die sich bei Zerlegung von P_0 in den Stäben OA, OB, OC ergeben, lassen sich in der Form darstellen

$$S_1 = S_1' + \lambda \cdot S_1'', \quad S_2 = S_2' + \lambda \cdot S_2'', \quad S_3 = S_3' + \lambda \cdot S_3'',$$

164) Statik (1886), p. 222 u. f.

165) Der Fall, bei welchem auch einfache Knotenpunkte vorkommen, bedarf keiner weiteren Erörterung.

wo S_1', S_2', S_3' die Komponenten bei einer beliebigen Zerlegung von P_0 und S_1'', S_2'', S_3'' irgend drei im Gleichgewicht stehende und in OA, OB, OC liegende Kräfte sind.

Es seien nun gefunden:

a) Die Spannungen in den Stäben des Fachwerkes von $n-1$ Knotenpunkten, wenn auf die Knotenpunkte A, B, C die Resultanten von P_1 und S_1', P_2 und S_2', P_3 und S_3' und auf die übrigen Knotenpunkte die Kräfte P_4, P_5, ... wirken. Hierbei möge sich in einem Stabe l_{ik} eine Spannung S_{ik}', und insbesondere in dem Stabe AB eine Spannung S_{12}' ergeben haben.

b) Die Spannungen in den Stäben des Fachwerkes von $n-1$ Knotenpunkten, wenn auf A, B, C die drei im Gleichgewichte stehenden Kräfte S_1'', S_2'', S_3'' und auf die übrigen Knotenpunkte gar keine Kräfte wirken. Hierbei möge sich in einem Stabe l_{ik} eine Spannung S_{ik}'' und insbesondere in dem Stabe AB eine solche S_{12}'' ergeben.

Dann ist

$$S_{ik} = S_{ik}' - \frac{S_{12}'}{S_{12}''} \cdot S_{ik}''$$

die Spannung in dem Stabe l_{ik} des gegebenen Fachwerkes von n Knotenpunkten[166]).

Die Methode ist sowohl graphisch[167]) wie analytisch durchführbar. Bei der graphischen Durchführung kommt es darauf an, zwei Kräftepläne für das Fachwerk von $n-1$ Knotenpunkten zu zeichnen und nach entsprechender proportionaler Änderung des zweiten denselben vom ersten abzuziehen. Welche graphische Methode dabei benutzt wird, ist selbstverständlich gleichgiltig.

Bei der analytischen Anwendung der obigen Methode ist die Auflösung eines Systemes von $2n-3$ Gleichungen mit $2n-3$ Unbekannten zurückgeführt auf die Auflösung von zwei Systemen von $2n-5$ Gleichungen mit $2n-5$ Unbekannten. Der Vorteil dieser Berechnungsart besteht darin, dass die $2n-5$ Gleichungen dieselbe einfache Struktur wie die $2n-3$ Gleichungen erhalten, bezw. dass in jeder der $2n-5$ Gleichungen wie in jeder der $2n-3$ Gleichungen nur ganz wenige der Unbekannten vorkommen.

Ein ähnliches Verfahren wendet *H. Müller-Breslau*[168]) an, indem

166) Hat das Fachwerk von $n-1$ Knotenpunkten, auf welches das vorliegende Fachwerk zurückgeführt wird, abermals keinen einfachen Knotenpunkt, so würde das Verfahren nochmals anzuwenden sein. Die Methode führt stets zum Ziele, da man zuletzt auf ein Dreieck kommt.

167) *L. Henneberg*, Statik, p. 234 führt die Methode an einem Beispiele graphisch durch.

168) Baukonstruktionen, 1. Teil (1887), 2. Aufl., p. 213; 3. Aufl., p. 443.

er das Fachwerk durch Beseitigung von Stäben und Hinzufügung von ebensoviel neuen Stäben (*Ersatzstäbe*) in ein Stabgebilde verwandelt, dessen statische Bestimmtheit „ausser Zweifel steht", und dann die Bestimmung der Spannungen in dem gegebenen Fachwerk auf diejenige in dem reduzierten Fachwerk zurückführt. Hierbei sind die unbekannten Spannungen in den weggenommenen Stäben als äussere Kräfte einzuführen und die notwendigen Gleichungen für die Multiplikatoren sind wie bei *Henneberg* durch die Bedingung gegeben, dass die Spannungen in den Ersatzstäben Null sein müssen. Das Verfahren hat jedoch den Übelstand, dass keine allgemeine Regel angegeben ist, wie die Verwandlung des Fachwerkes in ein Stabgebilde, dessen statische Bestimmtheit ausser Zweifel ist, zu erfolgen hat[169]).

37. Fortsetzung: Die kinematische Methode von Mohr und Müller-Breslau. Den in Nr. 35 erwähnten Gedanken von *O. Mohr* und (später)

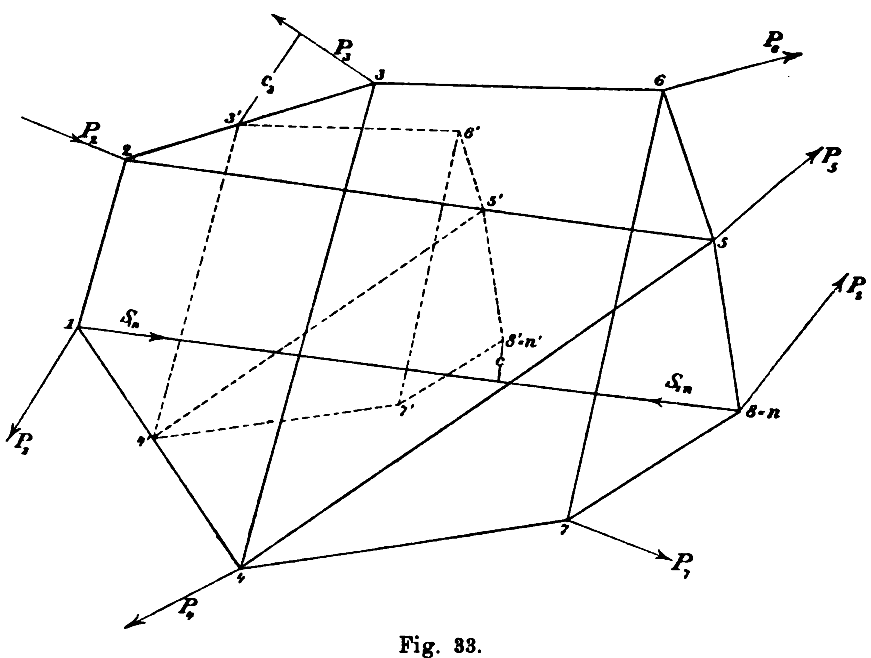


Fig. 33.

169) *H. Müller-Breslau* bezeichnet dieses Verfahren als die „Methode des Ersatzstabes". Ist das vorliegende Fachwerk so einfach, dass man, auch ohne sich streng an das Gesetz 3) in Nr. 34 zu halten, ein stabiles System herleiten kann, für welches sich die Spannungsbestimmung leicht durchführen lässt, so kann man allerdings in dieser Weise die Methode von *Henneberg* zur Ausführung bringen und wird dieses auch vielfach mit Vorteil thun. Siehe auch die Ab-

Föppl hat zuerst *H. Müller-Breslau*[170]) zur graphischen Bestimmung r Spannungen im Fachwerk verwandt.

Um die Spannung S_{1n} in einem Stabe l_{1n} zu bestimmen, möge ›ser fortgenommen werden, sodass ein bewegliches System entsteht ʒl. Fig. 33). Wird dann der Stab l_{12} festgehalten, so ist nur Gleichwicht möglich, wenn auf den Knotenpunkt n ausser der Kraft P_n ch eine Kraft S_{1n} wirkt, welche in l_{1n} liegt und gleich dem be›ffenden Gelenkdrucke ist. Durch S_{1n} ist dann die Spannung in m Stabe l_{1n} bestimmt. Die Bestimmung von S_{1n} geschieht nun rch das Prinzip der virtuellen Verrückungen, aus welchem folgt, ss für den Fall des Gleichgewichtes die Summe aus den virtuellen ›menten der Kräfte P_3, P_4, ... und dem virtuellen Momente der ch auf den Punkt n wirkenden Kraft S_{1n} gleich Null sein muss.

Zur Bestimmung der virtuellen Momente werden nach *Williot* die rmalen Geschwindigkeiten verwandt, bezw. es werden die virtuellen Ver›kungen der einzelnen Knotenpunkte auf den Normalen der Bahnen n dem betreffenden Knotenpunkte aus so aufgetragen, dass das stache Moment der auf den betreffenden Knotenpunkt wirkenden Kraft : den Endpunkt der normalen Geschwindigkeit (*Geschwindigkeitspol*) ; Drehpunkt dasselbe Vorzeichen hat, wie das virtuelle Moment und mit mit demselben übereinstimmt. Hierbei ist die Grösse der nor›len Geschwindigkeit *eines* Knotenpunktes wählbar. Jedem Knotennkte 3, 4, ... n ist als Endpunkt der normalen Geschwindigkeit ı Punkt 3', 4', ... n' zugeordnet. Sind dann c_3, c_4, ... c_n die je ch dem Drehungssinn positiv oder negativ genommenen Hebelarme r Kräfte P_3, P_4, ... P_n für die Punkte 3' 4', ... n' als Drehpunkte d ebenso c derjenige von S_{1n} für n' als Drehpunkt, so folgt aus m Prinzip der virtuellen Verrückungen die Gleichung

$$S_{1n} \cdot c + \sum_3^n P_i c_i = 0,$$

rch welche die Spannung S_{1n} in dem Stabe l_{1n} bestimmt ist, was ı besten graphisch geschieht.

Wird der Stab l_{12} nicht festgehalten, so sind noch die Momente r Kräfte P_1 und P_2, sowie das Moment einer in 1 angreifenden und

ndlungen von *H. Müller-Breslau*, Zentralbl. d. Bauverw. 23 (1903), p. 65; *O. Mohr*, ntralbl. d. Bauverw. 23 (1903), p. 237, 402 und *L. Henneberg*, ebenda, p. 377.

170) Schweiz. Bauzeitung 9 (1887), p. 121; Baukonstruktionen, 2. Aufl., Bd., p. 204; Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 34 (1888), p. 191. Diese thode pflegt als *Müller-Breslau*'sche Methode bezeichnet zu werden. Vgl. die beit von *O. Mohr*, Zentralbl. d. Bauverw. 23 (1903), p. 237, in welcher *O. Mohr* nen Anteil an der kinematischen Methode wahrt.

der Kraft S_{1n} entgegengesetzten aber gleichgrossen Kraft hinzuzufügen. Zur Bestimmung der Spannung S_{1n} in dem Stabe l_{1n} ergiebt sich dann eine Gleichung von der Form

$$S_{1n}(c' - c'') + \sum_1^n P_i c_i = 0.$$

Zur Bestimmung der Spannungen ist hierbei für jeden Stab ein besonderer Geschwindigkeitsplan zu konstruieren. In den meisten praktischen Fällen wird jedoch die einmalige Durchführung der Konstruktion genügen, da sich nach Bestimmung der Spannung in einem Stabe die übrigen Stabspannungen unter Anwendung der gewöhnlichen Methoden werden finden lassen. Wie die Schnittmethode, so gestattet es auch im allgemeinen Fall die kinematische Methode, die Spannung in einem Stabe des Fachwerkes zu bestimmen, ohne die Spannung in sämtlichen anderen Stäben mitzubestimmen.

Bei der Konstruktion des Geschwindigkeitsplanes, also der Punkte $3', 4', \ldots, n'$, verwenden *H. Müller-Breslau* und insbesondere *O. Mohr*[170a]) die Sätze über das momentane Drehungscentrum, sowie speziell den Satz, nach welchem die relativen momentanen Drehungscentra dreier Ebenen gegen einander in einer Geraden liegen. Die Figur der Geschwindigkeitspole eines irgendwie bewegten Fachwerkes ist in jedem Momente ein Fachwerk von derselben Gliederung und mit entsprechenden Stäben gleicher Richtung, und es kann umgekehrt jedes solche Fachwerk als die Figur der Geschwindigkeitspole einer dadurch bestimmten Bewegung des ersten Fachwerkes betrachtet werden[171]).

Analytisch betrachtet führt die kinematische Methode allerdings für jeden Stab auf eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten, nämlich der betreffenden Stabspannung; die rechnerische Bestimmung der Hebelarme c_i und somit diejenige der beiden Koeffizienten der Gleichung kann jedoch gegebenenfalls sehr umständlich werden.

H. Müller-Breslau giebt die Geschwindigkeitspläne nur an einigen Beispielen. Für eine Reihe von weiteren, mehr komplizierten Fällen hat *G. Lang* die Geschwindigkeitspläne angegeben[172]). Dass jedoch sich stets in der angegebenen Weise der Geschwindigkeitsplan herstellen lässt, kann mit Hülfe der Gesetze über die Struktur der bestimmten Fachwerke durch einen Schluss von n auf $n+1$ leicht gezeigt werden.

170a) Civiling. 33 (1887), p. 63.

171) Satz von *F. Schur*, Math. Ann. 48 (1897), p. 147. Ein Teil dieses Satzes ist schon von *Müller-Breslau* bemerkt.

172) Rig. Ind.-Zeitung 15 (1889), p. 73 u. 85.

38. Fortsetzung: Die allgemeine Verwendung der reziproken Fachwerke. Erst durch *Fr. Schur*[173]) erhielt die Theorie der reziproken Figuren eine Bedeutung für das allgemeine bestimmte Fachwerk. *Schur* zeigte, dass sich durch Einführung von *idealen Stäben* und *Knotenpunkten* jedes bestimmte Fachwerk auf ein *Maxwell*'sches Fachwerk zurückführen lässt, sodass das Spannungsproblem für ein beliebiges bestimmtes Fachwerk durch den reziproken Kräfteplan des betreffenden *Maxwell*'schen Fachwerkes gelöst ist. So ergiebt sich der Satz:

Für jedes bestimmte ebene Fachwerk lässt sich jedes Spannungsproblem mit Hülfe eines reziproken Kräfteplanes lösen, wenn das Fachwerk zuvor durch Einführung gewisser idealer Stäbe und Knotenpunkte erweitert ist.

In dem speziellen, wie in dem allgemeinen Falle eines bestimmten ebenen Fachwerkes (wo das Gesetz 3) (Nr. **34**) für den Aufbau der Fachwerke herangezogen werden muss) giebt *Fr. Schur* auf Grund dieser Methode die Konstruktion des Kräfteplanes an[174]).

39. Allgemeine Kriterien für das Auftreten der Grenzfälle. Handelt es sich um die Untersuchung eines Gelenksystemes von n Knotenpunkten und $m = 2n - 3$ Stäben, so ist es zweckmässig, wenn dieses auch nicht unbedingt notwendig ist, immer zuerst die Struktur desselben zu untersuchen. Ist die Struktur die für die bestimmten Fachwerke erforderliche (Nr. **34**), so ist das Gelenksystem entweder ein bestimmtes Fachwerk, oder es liegt der Grenzfall vor. Die Frage kann durch den Satz entschieden werden, nach welchem ein Gelenksystem von $m = 2n - 3$ Stäben statisch bestimmt ist, sobald sich die Spannungen für irgend ein Gleichgewichtssystem von Kräften eindeutig und endlich bestimmen lassen. Dieser Satz führt auf folgendes Verfahren:

Man nehme irgend ein Gleichgewichtssystem von Kräften auf die Knotenpunkte wirkend an und bestimme nach irgend einer der vorgeführten Methoden graphisch oder analytisch die Spannungen. Lassen sich die Spannungen endlich und eindeutig bestimmen, so ist das Stabsystem ein bestimmtes ebenes Fachwerk, im anderen Falle liegt der Grenzfall vor. Hierbei ist es zweckmässig, ein möglichst einfaches Kräftesystem zu wählen, wenn man nicht geradezu sämtliche Kräfte $= 0$ setzen will, so dass

173) Zeitschr. Math. Phys. 40 (1895), p. 48; Math. Ann. 48 (1897), p. 142.

174) Mit der Frage, welche Methode in einem vorliegenden Falle am besten zum Ziele führt, beschäftigt sich *H. Kayser*, Riga, Ind.-Zeitung 24 (1898), p. 61 u. 73 u. 85.

$$0 = \sum S_{ik} \frac{x_i - x_k}{l_{ik}},$$

$$0 = \sum S_{ik} \frac{y_i - y_k}{l_{ik}}.$$

Dann müssen im Falle des bestimmten Fachwerkes sämtliche Spannungen eindeutig $= 0$ werden[175]). Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so liegt der Grenzfall vor.

Ein anderes Kriterium für das Auftreten des Grenzfalles giebt *H. Müller-Breslau* mit Hülfe der kinematischen Methode. Es ist der Plan der normalen Geschwindigkeiten zu zeichnen, welcher sich nach Wegnahme des Stabes l_{1n} und Festhalten des Stabes l_{12} ergiebt (vgl. Nr. 37). Wenn dann der Geschwindigkeitspol n' des Punktes n auf l_{1n} liegt, so ist das Gelenksystem kinematisch unbestimmt, im anderen Falle kinematisch bestimmt, also ein bestimmtes Fachwerk.

Auf das Nämliche kommt es heraus, wenn gar kein Stab weggenommen wird und wenn, nach Fixierung der Geschwindigkeitsrichtungen zweier Knotenpunkte und der Grösse der einen, die Geschwindigkeitspole sämtlicher Knotenpunkte bestimmt werden. Ist Stabilität vorhanden, so muss bei Verbindung der Geschwindigkeitspole in derselben Weise, wie die Knotenpunkte durch Stäbe verbunden sind, sich eine dem Stabsystem ähnliche Figur ergeben[176]).

Auch die angeführten Untersuchungen von *M. Grübler,* in denen die Drehungscentren der einzelnen Stäbe bestimmt werden, haben zu einer Methode zur Untersuchung des Grenzfalles geführt[177]). Dieselbe läuft jedoch im wesentlichen auf die Methode von *H. Müller-Breslau* hinaus, insofern die Endpunkte der normalen Geschwindigkeiten auch als Drehungscentren angesehen werden können.

B. Räumliche Fachwerke.

40. Räumliche Gelenksysteme. „Bestimmte" räumliche freie Fachwerke. Unter einem *räumlichen Gelenksystem* sei ein System

---

175) Dass bei einem bestimmten Fachwerke alle Spannungen $= 0$ werden müssen, wenn keine Kräfte wirken, hat *Föppl* schon 1880 ausgesprochen; siehe Theorie des Fachwerks, p. 26.

176) Schweiz. Bauzeitung 9 (1887), p. 121; s. Fussn. 144 und Baukonstruktionen (1887), 2. Aufl., Bd. 1, p. 210.

177) Riga, Ind.-Zeitung 13 (1887), p. 49 u. f.; 14 (1888), p. 278 u. f. Siehe IV 3 (*A. Schönflies* und *M. Grübler*). — Die Arbeit von *M. Grübler* ist etwas vor derjenigen von *Müller-Breslau* erschienen. Bezüglich der Stabilität der Gelenksysteme siehe auch die Arbeit von *G. Lang,* Rig. Ind.-Zeitung 15 (1889), p. 73. Das von *G. Lang* eingeführte Paralleleck stimmt mit dem Plane der normalen

von Stäben verstanden, die in ihren Endpunkten durch *Kugelgelenke* (*Knotenpunkte*) miteinander verbunden sind. Wie bei den ebenen Gelenksystemen können dann *kinematisch bestimmte*, *kinematisch überbestimmte* und *kinematisch unbestimmte* räumliche Gelenksysteme unterschieden werden.

Die kinematisch bestimmten und die kinematisch überbestimmten räumlichen Gelenksysteme werden als *freie räumliche Fachwerke* oder abgekürzt als *räumliche Fachwerke*[178]) bezeichnet.

Jeder Stab von der Länge l_{ik}, welcher zwei Knotenpunkte mit den Koordinaten $x_i y_i z_i$ und $x_k y_k z_k$ verbindet, liefert eine Gleichung

$$(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 = l_{ik}^2,$$

aus welcher folgt

$$(x_i - x_k)(\delta x_i - \delta x_k) + (y_i - y_k)(\delta y_i - \delta y_k) + (z_i - z_k)(\delta z_i - \delta z_k) = 0.$$

Daraus, dass keine gegenseitigen Verschiebungen der Knotenpunkte möglich sein sollen, ergiebt sich, *dass die Zahl der Stäbe des räumlichen Fachwerkes wenigstens* $3n - 6$ *betragen muss, und dass man auf jeden Fall* $3n - 6$ *Gleichungen so muss aussuchen können, dass ihre Eliminationsdeterminante* D *einen von Null verschiedenen Wert hat.*

Der Fall, in welchem ein räumliches Gelenksystem die für die kinematisch bestimmten räumlichen Fachwerke erforderliche Struktur besitzt (vgl. Nr. 42), in welchem aber die Determinante den Wert Null erhält, möge, wie bei den ebenen Fachwerken, als der *Grenzfall* bezeichnet werden. In diesem Falle ist das Gelenksystem von $m = 3n - 6$ Stäben kinematisch unbestimmt und zwar sind im allgemeinen nur unendlich kleine Bewegungen möglich.

Sind $X_1 Y_1 Z_1$, $X_2 Y_2 Z_2$, ..., $X_i Y_i Z_i$, ... die Komponenten der Kräfte, welche auf die n Knotenpunkte $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, ..., $x_i y_i z_i$, ... eines räumlichen Gelenksystemes wirken, so ergeben sich für die m Spannungen S_{ik} in den m Stäben die $3n$ Gleichungen

$$X_i = \sum_k S_{ik} \frac{x_i - x_k}{l_{ik}},$$

$$Y_i = \sum_k S_{ik} \frac{y_i - y_k}{l_{ik}},$$

$$Z_i = \sum_k S_{ik} \frac{z_i - z_k}{l_{ik}},$$

Geschwindigkeiten überein. *G. Lang* führt die Untersuchung für eine Reihe von speziellen Fällen durch.

178) Das räumliche Fachwerk ist wesentlich von *A. Föppl* eingeführt. *A. Föppl*, Theorie des Fachwerks (1880).

welche sich infolge der Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte $X_i Y_i Z_i$ auf $3n - 6$ von einander unabhängige reduzieren. Die Summen auf der rechten Seite sind hierbei über diejenigen Knotenpunkte $x_k y_k z_k$ zu erstrecken, welche mit dem Punkte $x_i y_i z_i$ durch Stäbe verbunden sind.

Wird ein räumliches Gelenksystem als *statisch bestimmt* bezeichnet, wenn für jedes Gleichgewichtssystem von Kräften die Spannungen endlich und eindeutig bestimmt sind, so folgt, dass für die statische Bestimmtheit des Gelenksystemes die Zahl der voneinander unabhängigen $3n - 6$ Gleichungen übereinstimmen muss mit der Zahl der Unbekannten, und dass die Determinante der obigen Gleichungen einen von Null verschiedenen Wert haben muss.

Das statisch bestimmte räumliche Gelenksystem hat daher $3n - 6$ Stäbe, also ebenso viele Stäbe, wie das kinematisch bestimmte Fachwerk.

Wie für das ebene Fachwerk, hat nun *A. Föppl* für das räumliche Fachwerk nachgewiesen, dass die Determinante, von welcher die kinematische Bestimmtheit eines Gelenksystemes abhängt, übereinstimmt mit der Determinante, durch welche die statische Bestimmtheit bedingt ist[179]). Infolge davon ergiebt sich der Satz von *A. Föppl*:

Die kinematisch bestimmten räumlichen Fachwerke sind identisch mit den statisch bestimmten räumlichen Fachwerken.

In Rücksicht auf diese Übereinstimmung bezeichnet *Föppl* die kinematisch bestimmten räumlichen Fachwerke schlechtweg als *„bestimmte“ räumliche Fachwerke.*

Wie bei den ebenen Gelenksystemen lässt sich bei den räumlichen aus dem Satze von *Föppl* sofort der weitere Satz erkennen:

Wenn für ein räumliches Gelenksystem von $m = 3n - 6$ Stäben die Spannungen sich bei einem beliebig gewählten Gleichgewichtssystem äusserer Kräfte als endlich und eindeutig ergeben, so ist das Gelenksystem ein räumliches bestimmtes Fachwerk[180]).

Natürlich giebt es auch kinematisch überbestimmte, statisch unbestimmte, räumliche Gelenksysteme (mit mehr als $3n - 6$ Stäben);

---

179) Siehe Fussn. 129.

180) Im Folgenden wird die Untersuchung in analoger Weise, wie bei den ebenen Fachwerken durchgeführt. Zunächst sollen einige einfache räumliche Fachwerke und Diagramme untersucht werden. Dann wird die Untersuchung der Struktur des allgemeinen bestimmten räumlichen Fachwerkes folgen und die allgemeine Auflösung der obigen Gleichungen, von denen das Spannungsproblem abhängt. Den Schluss des Abschnittes wird die Untersuchung des Grenzfalles bilden.

dieselben treten sogar in praxi besonders häufig auf. Für dieselben gelten entsprechende Bemerkungen, wie sie am Schlusse von Nr. **31** über die statisch überbestimmten ebenen Fachwerke gegeben wurden.

41. Spezielle räumliche Fachwerksformen und Diagramme. Schon *A. Föppl* hat gezeigt, dass sich ein bestimmtes räumliches Fachwerk herstellen lässt, indem zwei bestimmte räumliche Fachwerke durch 6 Stäbe mit einander verbunden werden[181]). Die Spannungen in diesen 6 Stäben lassen sich durch die Schnittmethode finden, wobei jedoch der Schnitt durch eine Ebene bezw. eine Fläche zu erfolgen hat. Die Spannungsbestimmung kommt dann auf die Aufgabe hinaus, eine Kraft in das Gleichgewicht zu setzen durch sechs Kräfte, die in vorgeschriebenen geraden Linien liegen, bezw. auf die Aufgabe, sechs lineare Gleichungen mit sechs Unbekannten aufzulösen. Dass diese Aufgabe in ähnlicher Weise, wie die entsprechende Aufgabe des ebenen Kräftesystemes (s. Nr. **13**) mit Hülfe der Momentenmethode behandelt werden kann, hat *A. Föppl* gezeigt. Hierbei tritt an die Stelle eines Drehungspunktes eine Drehungsaxe[181a]).

Weitere einfache räumliche bestimmte Fachwerke sind die *Tetraederfachwerke*, die, wie die Dreiecksfachwerke aus Dreiecken, sich durch Zusammenlegen von Tetraedern herstellen lassen. Die Spannungen in den Tetraederfachwerken lassen sich finden durch wiederholtes Zerlegen einer Kraft in drei Komponenten mit demselben Angriffspunkt, bezw. durch Auflösen eines Systemes von je drei Gleichungen mit drei Unbekannten.

Zu *resiproken räumlichen* Figuren besonderer Art haben die Untersuchungen von *M. Rankine* und *Clerk Maxwell* geführt. Diesen Untersuchungen liegt ein Satz von *Rankine* zu Grunde[182]), nach welchem *Kräfte mit demselben Angriffspunkt im Gleichgewicht stehen, wenn dieselben senkrecht sind zu den Seiten eines geschlossenen Polyeders, und wenn ihre Grössen proportional sind zu den Inhalten der zu ihnen senkrechten Flächen.* Hierbei müssen sämtliche Kräfte entweder nach dem Äusseren oder nach dem Inneren des Polyeders gerichtet sein.

---

181) *Föppl*, Theorie des Fachwerks, p. 13.

181a) *A. Föppl*, Graphische Statik, Leipzig 1900, p. 172. Diese Momentenmethode wird in den Arbeiten von *H. Müller-Breslau*, *H. Zimmermann* und *Th. Landsberg* zur Bestimmung der Spannungen in speziellen räumlichen Fachwerken vielfach verwandt. Siehe insbesondere *Th. Landsberg*, Zentralbl. d. Bauverw. 23 (1903), p. 221.

182) *M. Rankine*, A manual of applied mechanics, 1. Aufl., London 1857, p. 137.

Von diesem Satze macht *Rankine* eine Anwendung[183]) auf die Bestimmung der Spannungen in einem bestimmten räumlichen Fachwerke von 5 Knotenpunkten, jedoch für eine spezielle Annahme bezüglich der auf die Knotenpunkte wirkenden Kräfte.

Es seien 5 Punkte im Raume beliebig gewählt und dieselben durch die 10 Geraden miteinander verbunden. Dann werden in jedem der 5 Punkte 4 Gerade zusammenstossen, und diese 5 Punkte werden als Ecken, bezw. die 10 Geraden als Kanten, 5 Tetraeder bestimmen, von denen je zwei eine Seite gemein haben. Es sei nun eine zweite derartige Figur gebildet und zwar für die fünf Punkte, welche durch die fünf Tetraeder der ersten Figur als Mittelpunkte der umschriebenen Kugeln bestimmt sind. Bei diesen beiden Figuren werden dann die Linien der einen Figur senkrecht stehen auf den Seitenflächen der anderen. Jeder Linie der einen Figur kann demgemäss eine Fläche der anderen zugeordnet werden, und jedem Punkte der einen Figur dasjenige Tetraeder der zweiten Figur, dessen Ebenen senkrecht stehen zu den vier Geraden, die in dem betreffenden Punkte zusammenkommen. Werden dann in jedem Punkte der einen Figur, als Angriffspunkt, vier Kräfte angenommen, die in den vier in diesem Punkte zusammenkommenden Linien liegen, wobei in jeder Linie die betreffenden beiden Kräfte dieselbe Grösse aber entgegengesetzte Richtung haben sollen, so besteht an jedem der fünf Punkte Gleichgewicht zwischen den vier Kräften, wenn die beiden Kräfte, die in einer Linie der ersten Figur liegen, proportional sind zu den Flächen der zweiten.

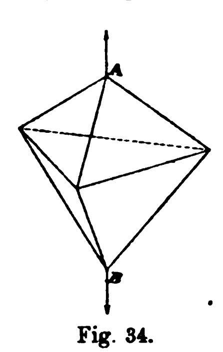


Fig. 34.

Ein räumliches bestimmtes Fachwerk von fünf Knotenpunkten hat 9 Stäbe, also einen Stab weniger als eine der hier konstruierten Figuren Linien besitzt. Diese fehlende Linie AB müsste daher (um die *Rankine*'sche Konstruktion anwenden zu können) ersetzt werden durch zwei gleich grosse und entgegengesetzte Kräfte, die in AB liegen und in den Endpunkten A und B derselben angreifen (Fig. 34). Durch die Flächen der reziproken Figur sind dann die Spannungen bestimmt, die sich in dem Fachwerke von fünf Knotenpunkten ergeben.

In Verallgemeinerung dieser *Rankine*'schen Untersuchungen bezeichnet *Maxwell*[184]) zwei räumliche Figuren, die aus einer Anzahl

183) Phil. Mag. (4) 27 (1864), p. 92.

184) Phil. Mag. (4) 27 (1864), p. 260 = Papers 1, p. 523. Es ist bemerkenswert, dass bei dieser Verallgemeinerung der reziproken Figuren das *Senkrechtstehen* entsprechender Elemente etwas wesentliches ist.

von geschlossenen Polyedern bestehen, als *reziprok*, sobald jede Linie der einen Figur senkrecht steht zu einer Ebene der anderen und dabei jedem Punkte der einen Figur, in dem mehrere Linien zusammenkommen, ein geschlossenes Polyeder der anderen Figur zugeordnet werden kann, das durch die Ebenen begrenzt ist, welche senkrecht sind zu den Linien, die in dem betreffenden Punkte zusammenkommen[185]).

Werden in den Punkten der einen Figur Kräfte angenommen, die in den in diesen Punkten zusammenkommenden Linien liegen, und zwar so, dass in jeder Linie sich zwei entgegengesetzt gerichtete Kräfte ergeben, so ist an jedem Punkte der einen Figur Gleichgewicht vorhanden, wenn die betreffenden Kräfte proportional sind zu den Flächen der reziproken Figur. Zwei solche räumliche Figuren repräsentieren somit reziproke Kräftediagramme, wobei die Linien der einen Figur die Aktionslinien der wirkenden Kräfte, die Flächen der anderen Figur deren Grösse darstellen.

Wendet man nun die Theorie dieser reziproken räumlichen Figur an auf die Bestimmung der Spannungen in einem bestimmten räumlichen Fachwerke, so ist es so einzurichten, dass die Stäbe des Fachwerkes in die Linien der einen Figur und die Knotenpunkte des Fachwerkes in die Punkte der betreffenden Figur hineinfallen. Die Aktionslinien der äusseren Kräfte müssten dann in den weiteren Linien der betreffenden Figur liegen. Da aber diese weiteren Linien an ganz bestimmte Bedingungen geknüpft sind, so wird durch diese reziproken Figuren das Spannungsproblem nur gelöst sein unter ganz bestimmten Voraussetzungen bezüglich der äusseren Kräfte. Die wesentliche Bedeutung der ebenen reziproken Figuren, nämlich die Allgemeinheit der durch dieselben abgeleiteten Resultate, geht dabei verloren.

42. Struktur des (allgemeinen) „bestimmten" räumlichen Fachwerkes. Wie bei den ebenen Fachwerken möge auch bei den räumlichen ein Knotenpunkt, in dem n Stäbe zusammentreffen, als ein $n-1$-facher Knotenpunkt bezeichnet werden. Ein einfacher Knotenpunkt, also ein Knotenpunkt, in welchem nur zwei Stäbe zusammentreffen, ist demgemäss bei einem räumlichen Fachwerke ausgeschlossen, da ein solcher Knotenpunkt A, von welchem nur zwei Stäbe nach zwei anderen Knotenpunkten B und C gehen, noch um

---

185) Diese Reziprozität räumlicher Gebilde wird von *Maxwell*, Trans. of the Roy. Soc. of Edinburgh 26 (1872), p. 1 = Papers 2, p. 182—187 analytisch weiter untersucht; er erhält Formeln, die eine genaue Verallgemeinerung der von ihm für ebene Figuren benutzten sind.

die Axe BC rotieren könnte und das Stabsystem somit kein stabiles wäre. In jedem Knotenpunkte eines räumlichen Fachwerkes müssen wenigstens drei Stäbe zusammentreffen.

Die allgemeinen Gesetze zur Herstellung von bestimmten räumlichen Fachwerken sind von *L. Henneberg* in derselben Weise wie für die bestimmten ebenen Fachwerke entwickelt[186]).

Aus der Gleichung für die Zahl m der Stäbe

$$m = 3n - 6$$

folgt, dass die Durchschnittszahl der in einem Knotenpunkte zusammenkommenden Stäbe kleiner als sechs sein muss. Daraus ergiebt sich, da ein bestimmtes räumliches Fachwerk keinen einfachen Knotenpunkt haben kann, der Satz:

Das bestimmte räumliche Fachwerk hat wenigstens **einen** *zweifachen, dreifachen oder vierfachen Knotenpunkt.*

Aus diesem Satze ergeben sich folgende Gesetze für die Herstellung von bestimmten räumlichen Fachwerken von n Knotenpunkten aus solchen von $n - 1$ Knotenpunkten.

1) Es werde ein zweifacher Knotenpunkt O hinzugefügt. Derselbe ist durch drei Stäbe mit drei Knotenpunkten des Fachwerkes zu verbinden. Die drei Knotenpunkte A, B, C müssen hierbei ein Dreieck bilden, dessen Ebene den Punkt O nicht enthält.

2) Es werde ein dreifacher Knotenpunkt O hinzugefügt. Derselbe ist durch vier Stäbe mit vier Knotenpunkten A, B, C, D zu verbinden, von denen zwei, z. B. A und B, durch einen Stab AB, der wegzunehmen ist, schon verbunden sind. Der Punkt O darf hierbei nicht auf einer gewissen Fläche zweiten Grades, der Grenzfläche, liegen, sonst würde der Grenzfall eintreten.

3) Es werde ein vierfacher Knotenpunkt hinzugefügt. Von demselben aus sind fünf Stäbe zu legen nach fünf Knotenpunkten A, B, C, D, E, von denen zwei Paare schon durch Stäbe verbunden sind, die wegzunehmen sind. Hierbei ist die Grenzfläche, auf welcher der Punkt O nicht liegen darf, wenn nicht der Grenzfall eintreten soll, von der vierten Ordnung.

Mit Hülfe dieser drei Gesetze lassen sich sämtliche bestimmten räumlichen Fachwerke aus dem einfachsten bestimmten räumlichen Fachwerke, welches durch die Kanten eines Tetraeders gebildet ist, durch successives Hinzufügen von weiteren Knotenpunkten herstellen. Umgekehrt können diese Gesetze, deren Inbegriff wir als *Struktur* des bestimmten räumlichen Fachwerks bezeichnen, zur Untersuchung eines

186) *Henneberg*, Statik (1886), p. 247 u. f.

vorliegenden Stabsystemes verwandt werden. Zu diesem Zwecke würde durch successives Wegnehmen der einzelnen Knotenpunkte und Einschaltung der Ersatzstäbe das vorliegende räumliche Gelenksystem zu reduzieren sein. Hierbei müssen unter Umständen bei der Wegnahme eines dreifachen oder vierfachen Knotenpunktes mehrere Möglichkeiten geprüft werden.

43. Bestimmung der Spannungen im (allgemeinen) „bestimmten“ räumlichen Fachwerk. Sowohl die Auflösung des Gleichungssystemes für die Spannungen, wie auch die graphische Bestimmung der Spannungen bereitet keine Schwierigkeiten, wenn das Fachwerk lediglich unter Anwendung des ersten Gesetzes aus dem einfachsten Fachwerk, dem Tetraeder, hergestellt ist, bezw. wenn sich Schnitte durch das Fachwerk legen lassen, welche nur sechs Stäbe treffen.

Ist beides nicht der Fall, so führt die Methode von *Henneberg*[187]) sowohl graphisch wie analytisch zum Ziele. Ist das bestimmte räumliche Fachwerk von n Knotenpunkten auf ein solches von $n - 1$ Knotenpunkten zurückgeführt, so ist die Bestimmung der Spannungen in dem letzteren zweimal durchzuführen, wenn der weggenommene Knotenpunkt ein dreifacher war und somit nur ein *Ersatzstab* erforderlich war; dagegen dreimal, wenn der weggenommene Knotenpunkt ein vierfacher ist und daher *zwei Ersatzstäbe* erforderlich sind. Besitzt das räumliche Fachwerk von $n - 1$ Knotenpunkten ebenfalls keinen zweifachen Knotenpunkt, so würde die Reduktion nochmals vorzunehmen sein.

Bei der analytischen Durchführung dieser Methode würde im Falle eines dreifachen Knotenpunktes das System von $3n - 6$ linearen Gleichungen mit $3n - 6$ Unbekannten zurückgeführt sein auf zwei Systeme von $3n - 9$ linearen Gleichungen mit $3n - 9$ Unbekannten. Im Falle eines vierfachen Knotenpunktes würden dagegen drei Systeme von $3n - 9$ Gleichungen mit $3n - 9$ Unbekannten aufzulösen sein.

Hat das um einen Knotenpunkt reduzierte Fachwerk abermals keinen zweifachen Knotenpunkt, so würde das Verfahren zu wiederholen sein.

Der Vorteil dieser Methode liegt, wie bei dem ebenen Fachwerke, wieder darin, dass die Gleichungssysteme die anfängliche einfache Form, bei der in jeder Gleichung immer nur einige wenige Unbekannte vorkommen, behalten.

In entsprechender Weise wie bei dem ebenen Fachwerke giebt

---

187) *L. Henneberg*, Statik, p. 259 u. f.

H. Müller-Breslau[188]) bezüglich der Reduktion des räumlichen Fachwerkes ohne zweifachen Knotenpunkt die allgemeine Regel, dass durch Beseitigung von Stäben und Hinzufügen von ebensoviel neuen Stäben das räumliche Fachwerk auf ein solches zurückzuführen sei, bei welchem sich die Spannungen durch wiederholte Lösung der Aufgabe, eine Kraft in drei Komponenten zu zerlegen, bestimmen lassen. Damit würde dann die Bestimmung der Spannungen in dem gegebenen Fachwerke auf diejenige in dem reduzierten Fachwerke zurückgeführt sein.

Dass bei der graphischen Bestimmung der Spannungen im bestimmten räumlichen Fachwerke auch die kinematische Methode zum Ziele führt, haben *H. Müller-Breslau* und *O. Hübner*[189]) durch Angabe des Verschiebungsplanes für das räumliche Fachwerk an Beispielen gezeigt[189a]).

44. Allgemeine Kriterien für das Auftreten der Grenzfälle. Auch die Untersuchung der Stabilität eines vorliegenden räumlichen Stabsystemes lässt sich wie bei den ebenen Systemen durchführen. Sind bei n Knotenpunkten $3n - 6$ Stäbe vorhanden, so genügt es, für ein einziges Gleichgewichtssystem von Kräften, die in den Knotenpunkten angreifen, die Bestimmung der Spannungen durchzuführen. Ergeben sich dieselben als endlich und eindeutig, so ist das Stabsystem statisch bestimmt, also ein bestimmtes räumliches Fachwerk. Am bequemsten ist es hierbei, sämtliche äusseren Kräfte $= 0$ anzunehmen. Werden dann sämtliche Spannungen eindeutig $= 0$, so ist das Gelenksystem ein bestimmtes räumliches Fachwerk, dagegen ist es kinematisch unbestimmt, wenn die Spannungen vieldeutig werden. Vor der Durchführung der Spannungsbestimmung ist es zweckmässig, zunächst die Struktur des Stabsystemes zu untersuchen. Ist die Struktur des Stabsystemes die für die bestimmten räumlichen Fachwerke erforderliche, so liegt, wenn die Spannungen vieldeutig werden, der Grenzfall vor.

Anstatt durch die Spannungsbestimmung lässt sich die Frage der Stabilität auch durch Konstruktion des Verschiebungsplanes entscheiden.

---

188) Zentralbl. d. Bauverw. 11 (1891), p. 437; vgl. Nr. 36, sowie Fussn. 169.

189) Zentralbl. d. Bauverw. 12 (1892), p. 225, 244; Civiling. 39 (1893), p. 377. Hierbei werden die allgemeinen Sätze von *O. Mohr*, Civiling. 34 (1898), p. 691 benutzt.

189a) Eine weitere Methode für die Spannungsbestimmung im räumlichen Fachwerke giebt *F. Steiner*, Handbuch der Ingenieurwissenschaften 2, 3. Aufl., Leipzig 1901, Kap. 8 (Theorie der eisernen Brücken von *F. Steiner*), p. 238. Bei dieser Methode wird nach Einführung der Spannungen einzelner Stäbe als vorläufig unbekannter Grössen die Spannungsbestimmung im räumlichen Fachwerke auf die der ebenen Fachwerke zurückgeführt.

III. Spezielle Fachwerksträger.

45. Vorbemerkung. In dem folgenden Abschnitte soll eine Reihe
n in der Praxis vorkommenden speziellen Fachwerksträgern be-
rochen werden; es sind auch einige kinematisch überbestimmte
chwerksträger in Betracht gezogen. Die Auswahl dieser zu be-
rechenden Träger erhebt auf Vollständigkeit keinen Anspruch. Bei
r Wahl eines speziellen Trägers zur Lösung irgend eines vorliegen-
n technischen Problemes wird zunächst der Zweck des Trägers in
tracht kommen. Dann werden die Spannweite, sowie eine Reihe
hnischer Forderungen, die sich auf Materialverbrauch u. s. w. be-
hen, bei der Wahl mit entscheidend sein.

46. Lagerpunkte der Fachwerke. Unter einem *Fachwerksträger*
rd ein Fachwerk verstanden, das gegenüber der Erde durch ge-
gnete Lagerungen festgelegt ist. Man unterscheidet *feste* und be-
gliche Lager. Unter einem festen Lager wird ein Lager verstanden,
s derartig mit der Erde verbunden ist, dass Bewegungen desselben
sgeschlossen sind. Ein bewegliches Lager ist dagegen ein Lager,
s sich noch in beschränkter Weise bewegen kann, somit bei dem
enen Fachwerke in einer Kurve. Ein festes Lager eines ebenen
chwerkes liefert zwei Lagerbedingungen, ein bewegliches Lager
ie. Da zur Festlegung eines ebenen starren Systems drei Be-
ngungen erforderlich sind, so werden, wenn eine Überbestimmtheit
rmieden werden soll, bezüglich der Lagerungen eines ebenen Fach-
rkes nur zwei Fälle möglich sein:

1) Das Fachwerk ist festgelegt durch ein festes und ein beweg-
hes Lager, oder

2) es ist festgelegt durch drei bewegliche Lager.

Ein festes Lager A liefert eine Lagerreaktion, welche durch A
ht, sonst aber jede Richtung besitzen kann. Ein bewegliches Lager
, das sich nur auf einer Kurve C bewegen kann, erfordert eine
gerreaktion, die in die Normale der Kurve C fällt. In beiden
llen sind durch die Art der Lagerungen die Lagerreaktionen voll-
indig bestimmt, die sich für ein vorgeschriebenes System von auf
e Knotenpunkte des Fachwerkes wirkenden Kräften ergeben. Sind
e Lagerreaktionen durch die Gleichgewichtsbedingungen sämtlicher
f die Knotenpunkte wirkenden Kräfte gefunden, so können die
ger durch diese Lagerreaktionen ersetzt werden. Die Lagerknoten-
nkte haben dadurch ihre Sonderstellung verloren und das System
; wie ein *freies* System (*freies Fachwerk*) zu behandeln, auf dessen
notenpunkte ein gegebenes Gleichgewichtssystem von Kräften wirkt.

Ein festes Lager A eines ebenen Fachwerkes kann man sich dadurch festgelegt denken, dass man den Punkt A durch zwei Stäbe (Fig. 35) mit zwei festen Punkten A_1 und A_2 der Erde verbindet. Bei einem beweglichen Lager B, das sich nur auf einer Kurve C bewegen kann, darf an die Stelle dieser Kurve C, da es sich nur um die Untersuchung der unendlich kleinen Bewegungen handelt, ein Stab treten, der in die Normale der Kurve C fällt und den Punkt B mit einem festen Punkt B_1 der Erde verbindet.

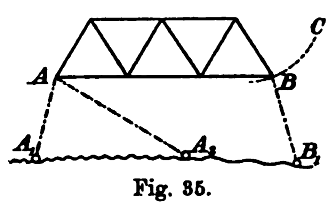


Fig. 35.

Für das räumliche Fachwerk ergeben sich ähnliche Betrachtungen, und zwar sind nach betreffender Ersetzung der Lager durch *Stützungsstäbe* 6 solche Stützungsstäbe zur Festlegung erforderlich.

47. Gestützte Fachwerke. In der Praxis kommen häufig Gelenksysteme zur Verwendung, welche durch eine grössere Anzahl von Lagern bezw. Stützungsstäben festgelegt sind.

Jedes ebene oder räumliche Gelenksystem, welches nach Ersetzung der Lager durch Stützungsstäbe durch mehr als drei bezw. sechs Stützungsstäbe mit der Erde verbunden ist, möge nebst diesen Stützungsstäben als ein gestütztes Gelenksystem bezeichnet werden. In ähnlicher Weise, wie bei den freien Gelenksystemen, lassen sich dann *kinematisch unbestimmte, kinematisch bestimmte* und *kinematisch überbestimmte* gestützte Gelenksysteme unterscheiden. Die kinematisch bestimmten und die kinematisch überbestimmten gestützten Gelenksysteme sollen als *gestützte Fachwerke* bezeichnet werden, bezw. die kinematisch bestimmten gestützten Gelenksysteme als bestimmte gestützte Fachwerke[190]). So ist das beigezeichnete System (Fig. 36) einschliesslich der vier an die Stelle der beweglichen Lager in A, B, C, D tretenden Stützungsstäbe

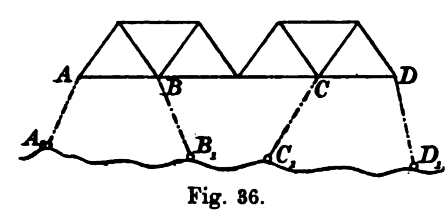


Fig. 36.

190) Siehe *Föppl*, Theorie des Fachwerks, p. 18. *Föppl* nennt derartige Systeme auch *unselbständige* Fachwerke, später *gestützte* Fachwerke. Für das ebene gestützte Fachwerk bestimmen *Mohr* und *Levy* die Zahl der Stäbe. Sind bei einem gestützten bestimmten Fachwerke n Knotenpunkte vorhanden, r feste und p bewegliche Lager, so beträgt die Zahl der Stäbe $m = 2n - 2r - p$. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 20 (1874), p. 509, sowie *Levy*, La statique graphique, Paris 1874, p. 50, 93—95. Eine ähnliche Gleichung folgt für das räumliche gestützte Fachwerk.

als ein bestimmtes gestütztes *Fachwerk* zu bezeichnen. Werden bei einem bestimmten gestützten Fachwerke sämtliche Lager bezw. Stützungsstäbe weggenommen, so entsteht aus demselben ein kinematisch unbestimmtes Gelenksystem mit $2n - s$ bezw. $3n - s$ Stäben, wenn s Stützungsstäbe vorhanden waren.

Bei dem gestützten Fachwerke sind die Lagerreaktionen durch die Bedingung, dass dieselben mit den auf die übrigen Knotenpunkte wirkenden und gegebenen Kräften ein Gleichgewichtssystem bilden sollen, noch nicht bestimmt. Die gestützten Fachwerke erfordern daher eine besondere Untersuchung.

Diese Untersuchung des gestützten Fachwerkes lässt sich auf die Untersuchung eines freien Fachwerkes zurückführen.

Bei einem gestützten Stabsystem K sollen in der angegebenen Weise die Lagerungen durch Stäbe ersetzt sein, welche nach festen Punkten der Erde gehen. Dann kann für die Zwecke der Untersuchung an die Stelle der Erde ein bestimmtes ebenes bezw. räumliches Fachwerk K' (das *Erdfachwerk*) gesetzt werden, welches nur der einen Bedingung genügen muss, dass dasselbe diejenigen Punkte der Erde, von denen die Stützungsstäbe ausgehen, zu Knotenpunkten hat. Dieses so erhaltene System $K + K'$ wird das *erweiterte System* bezw., wenn K stabil, also ein Fachwerk ist, das *erweiterte Fachwerk*, genannt[191]).

Nach Einführung des erweiterten Systemes ist die Untersuchung der Struktur, wie insbesondere diejenige der Stabilität, auf die betreffende Untersuchung eines freien erweiterten Systemes zurückgeführt.

Das Gleiche gilt von der Spannungsbestimmung, da, wie *Henneberg* gezeigt hat, *die Spannungen in den Stäben des gestützten Systemes nur abhängig sind von den Kräften P_i, die auf die Knotenpunkte des gestützten Systemes wirken*, bezw. unabhängig sind von den Kräften Q_i, die in den Knotenpunkten des Erdfachwerkes angreifend gedacht

191) *Henneberg*, Zeitschrift f. Arch. u. Ingenieurwesen 49 (neue Folge 8) (1903), p. 157. Dass man, wie dieses im Folgenden geschieht, die Erde durch ein Fachwerk ersetzen kann, ist längst bekannt. Vgl. *A. Föppl*, Graphische Statik, p. 245 u. 278. Von *Müller-Breslau* ist bemerkt, dass man sich nach Ersetzung der Erde durch ein Fachwerk gestützte Systeme herstellen kann mit Hülfe der von *Henneberg* für freie Systeme gefundenen Strukturgesetze, Zentralbl. der Bauverw. 11 (1891), p. 440. Vgl. ferner Handbuch der Ingenieurwissenschaften 2, 3. Aufl., Leipzig 1901, Kap. 8 (Theorie der eisernen Brücken von *F. Steiner*), p. 202—204, sowie *G. Lang*, Rig. Ind.-Zeitung 15 (1889), p. 86. *G. Lang* hat hier in speziellen Fällen die Stabilitätsuntersuchung durchgeführt.

werden, sobald nur die Kräfte Q_i mit den gegebenen Kräften P_i ein Gleichgewichtssystem bilden[192]).

48. Spezielle ebene Fachwerksträger[193]). Soweit freie Fachwerke als Fachwerksträger zur Verwendung kommen, sind dieselben grösstenteils in der Form Fig. 24 (Nr. 32) enthalten und laufen demgemässs auf Dreiecksfachwerke hinaus. Der äusseren Form nach hat man verschiedene Arten von *Balkenträgern* zu unterscheiden: so kommen solche mit geraden und solche mit gekrümmten Gurtungen vor. Bei letzteren kann die Bogenform durch äussere Rücksichten bestimmt sein, kann aber auch die Folge von gewissen statischen Anforderungen sein, wie dies beim *Parabel-*, *Pauli-* und *Schwedler-Träger* der Fall ist.

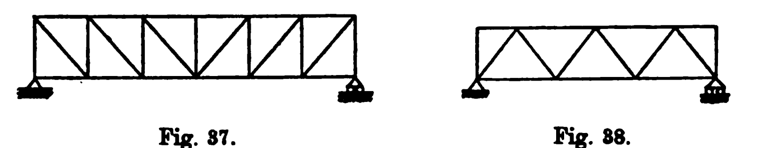


Fig. 37. Fig. 38.

Der Parallelträger. Beide Gurtungen sind parallel. Das Dreieckssystem besteht entweder aus rechtwinkligen Dreiecken (System *Mohnié*, 1854 (Fig. 37) in Bayern eingeführt) oder aus gleichschenkligen Dreiecken (Fig. 38) von *Neville* vorgeschlagen und 1846 in Belgien eingeführt, von *Warren* 1849 verbessert.

Bei Eigengewicht allein werden bei dem *Mohnié-Träger* alle nach

192) Zur Bestimmung der Spannungen in einem gestützten Fachwerke K, auf welches Kräfte P_i wirken, ist es nur erforderlich, nach Bestimmung des erweiterten Fachwerkes $K + K'$ in den Knotenpunkten des *Erdfachwerkes* K' irgend welche Kräfte Q_i anzunehmen (man begnügt sich hier am besten mit zwei Kräften), die mit den Kräften P_i im Gleichgewicht stehen, und dann die Spannungsbestimmung in dem freien Fachwerke $K + K'$ durchzuführen. Die Spannungen, die sich alsdann in dem Fachwerke K ergeben, sind die richtigen. Bisher wurde für jedes gestützte Fachwerk eine besondere Methode, die auf einen Kunstgriff hinauslief, gegeben. *W. Schlink* hat mit Hülfe dieser hier empfohlenen Methode die Spannungsbestimmung bei einer Reihe von speziellen gestützten Fachwerken durchgeführt, Zeitschrift f. Arch. u. Ingenieurwesen 49 (neue Folge 8) (1903), p. 165.

193) Die Zusammenstellung der speziellen Fachwerksträger, wie sie in den folgenden Nummern enthalten ist, verdankt der Verfasser Herrn *W. Schlink*, dem hierfür der schuldige Dank ausgesprochen wird. Zusammenstellungen der gebräuchlichen Fachwerksträger finden sich ausser in den Lehrbüchern für Baukonstruktion und graphische Statik beispielsweise in dem *Handbuch der Ingenieurwissenschaften* 2, 2. Aufl., Leipzig 1890, Kap. 8, dritte Auflage noch nicht vollständig erschienen, sowie in einigen Abhandlungen z. B. von *G. Lang*, Riga, Ind.-Zeitung 15 (1889), p. 229, 241, 265, 277; 16 (1890), p. 85, 97, 109, 133, 145.

der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, weshalb man alle Diagonalen der linken Trägerhälfte nach rechts, alle diejenigen der rechten Trägerhälfte nach links abfallen lässt (Fig. 37). Infolge der zufälligen Belastung (Verkehrslast) kann jede Diagonale Zug oder Druck bekommen, je nachdem die Felder auf der Seite des Fusspunktes oder die auf der Seite des Kopfpunktes belastet sind. Wirken Eigengewicht und Verkehrslast gleichzeitig, so wird in den Diagonalen eines gewissen links gelegenen Gebietes nur Zug, ebenso in denjenigen eines entsprechenden rechts gelegenen Gebietes (falls die Diagonalen nach der Mitte fallen) nur Zug auftreten, nämlich in allen Diagonalen, für welche die Zugbeanspruchung durch Eigengewicht die grösste Druckbeanspruchung infolge Verkehrslast überwiegt. In einem Gebiete zu beiden Seiten der Mitte werden die Diagonalen sowohl Zug wie Druck bekommen können. Um zu erreichen, dass auch in diesem Gebiete keine Diagonale Druck erhält, ordnet man schlaffe Gegendiagonalen[194]) an (Fig. 39). Würde z. B. in der Diagonale a des Feldes k bei einer bestimmten Belastung Druck entstehen, so knickt sie bei ihrer geringen Stärke aus, und es tritt die Diagonale b als Zugdiagonale in Wirkung. Das Genauere hierüber gehört in die Festigkeitslehre.

Werden die Gegendiagonalen als steife Diagonalen ausgebildet, so ist das Fachwerk ein statisch unbestimmtes. Die Ingenieure ermitteln dann die Spannungen in den Diagonalen gern so, dass sie den Träger in zwei Fachwerksträger zerlegen, von denen jeder die halbe Belastung trägt, und von denen der eine die Haupt-, der andere die Gegendiagonalen enthält[195]).

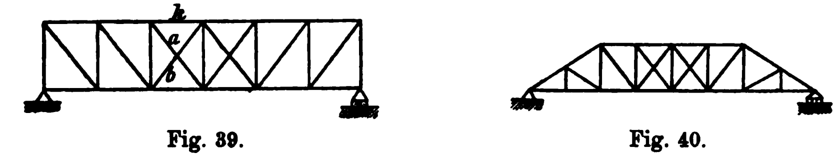


Fig. 39. Fig. 40.

Der *Trapezträger* (Fig. 40) bietet gegenüber dem Parallelträger den Vorteil der Materialersparnis.

Bei dem *Parabelträger*[196]) liegen die Knotenpunkte auf einer oder auf zwei Parabeln. Der Vorteil dieser Form liegt darin, dass bei voll-

194) Das Prinzip der schlaffen Diagonalen ist ein sehr wichtiges; die Untersuchung der schlaffen Diagonalen geht jedoch über den vorliegenden Artikel hinaus und kann erst in den Artikeln über Elastizität und Festigkeitslehre behandelt werden.

195) Handbuch der Ingenieurwissenschaften 2, 2. Aufl., Kap. 8, p. 346.

196) Zeitschr. f. Bauwesen 1 (1851), p. 268.

ständiger, gleichmässiger Belastung, z. B. durch Eigengewicht, die Diagonalen gar nicht beansprucht werden. Durch gleichzeitige Wirkung von Eigengewicht und Verkehrslast wird jede Diagonale Zug und Druck bekommen können. Um die Diagonalen von Druck frei zu halten, müssten also in jedem Felde schlaffe Gegendiagonalen angebracht werden. Bei gleichmässiger Belastung ist die maximale Spannung für alle Stäbe des geradlinigen Gurtes die gleiche, während für die Stäbe des gekrümmten Gurtes die Horizontalkomponenten der Spannung einander gleich sind.

Die wichtigsten Formen der *parabolischen Träger* sind ausser der Form Fig. 41, der *Fischbauchträger* und der *Halbparabelträger* (Fig. 42), ferner der *Sichelträger*, dessen beide Gurtungen nach oben gekrümmt

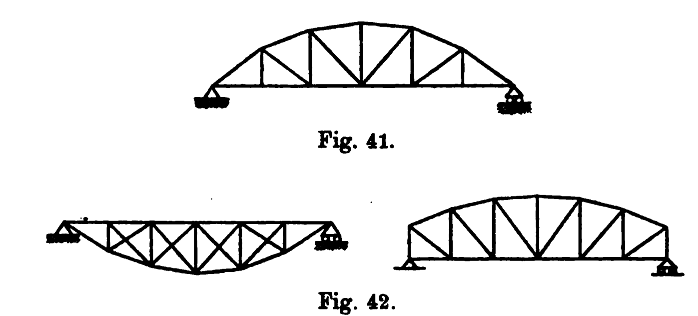


Fig. 41.

Fig. 42.

sind und in den Auflagerpunkten zusammenlaufen, sowie der *Linsenträger*, dessen obere Gurtung nach oben und dessen untere Gurtung nach unten gekrümmt ist.

Der *Paulirträger*[197]) ist aus der Forderung hervorgegangen, einen Träger zu konstruieren, dessen beide Gurtungen bei gleichförmiger Belastung konstante Spannungen haben. Thatsächlich weicht die Form von der theoretischen etwas ab, und obige Bedingung ist nur angenähert erfüllt (Fig. 43). Die Form bestimmt sich aus der Gleichung

$$h = \frac{4f}{l^2}(l - x) \cdot x \left\{1 + 2\frac{f^2}{l^2}\left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2\right\}$$

Der *Schwedlerträger*[198]) bezweckt den Obergurt derart zu krümmen, dass die Diagonalen überhaupt nur Zug erhalten. Es muss dann die grösste Druckbeanspruchung, die durch Verkehrslast ent-

197) Erste Ausführung (1857) für die Isarbrücke bei Grosshesselohe. Allg. Bauzeitung 24 (1859), p. 82.

198) Zeitschrift f. Bauwesen 18 (1868), p. 517. Erste Ausführung bei der Berlin-Lehrter Eisenbahn. Die graphische Ermittelung der Ordinaten des Schwedlerträgers findet sich Zeitschr. f. Bauwesen 23 (1873), p. 237.

stehen kann, aufgehoben werden durch die Zugbeanspruchung infolge des Eigengewichtes. Der ganze Träger würde die beigezeichnete Form (Fig. 44) erhalten, bei welcher die beiden Kurven Hyperbeln sind. Um die Einbuchtung zu vermeiden, nahm *Schwedler* für den

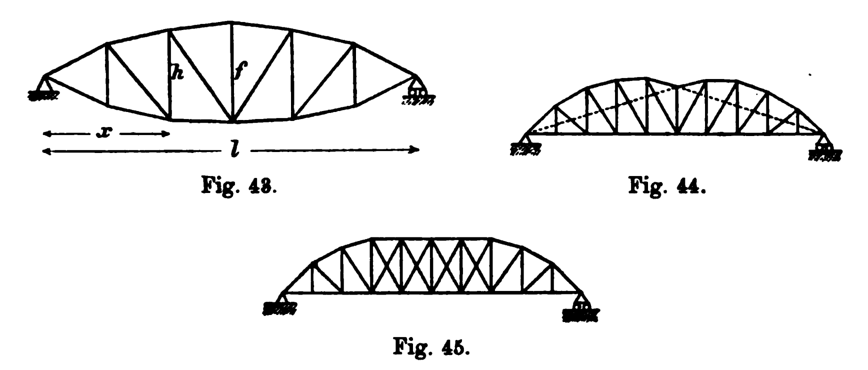


Fig. 43. Fig. 44.

Fig. 45.

mittleren Teil einen Parallelträger, in welchem aber dann, damit sich bei gewissen Belastungen nur Zug in den Diagonalen ergiebt, Gegendiagonalen (Fig. 45) angebracht sind.

Sowohl bei Trägern mit gekrümmten, wie bei denen mit geraden Gurtungen kommen die sogenannten *mehrfachen Fachwerke* (*Gitterwerke*) vor. Es sind dieses Fachwerke mit mehreren Diagonalzügen, und können sowohl statisch bestimmt, wie statisch unbestimmt sein. Die Zwischenstäbe sind so angeordnet, dass jeder Gitterstab von einem oder mehreren geschnitten wird (an der Kreuzungsstelle sind die Gitterstäbe indes nicht verbunden). Wird jeder Gitterstab durch die ihn kreuzenden in n Teile zerlegt, so spricht man von einem n-fachen Fachwerk. Die zweifachen Systeme wurden von *Linville* in Amerika eingeführt.

Das beigezeichnete Gitterwerk Fig. 46 ist statisch unbestimmt, kann also mit den Methoden des vorliegenden Artikels nicht behandelt werden. Zur Berechnung der Spannungen gehen dann, wie schon oben angedeutet, die Ingenieure gern so vor, dass sie das n-teilige Gitterwerk in n einzelne Fachwerke zerlegen, deren

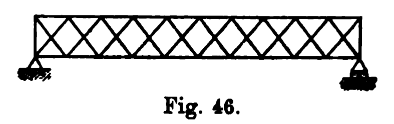


Fig. 46.

jedes bei gleichförmiger Belastung $\frac{1}{n}$ der Belastung aufnimmt. Jeder Gitterstab kommt nur in einem Teilsystem vor, jeder Gurtstab in jedem Teilsystem, und die n Spannungen, die sich für einen Gurtstab ergeben, sind zu addieren[199]).

199) Handbuch d. Ingenieurwissenschaften 2, 2. Aufl., Kap. 8, p. 346.

Der beistehend dargestellte Träger (Fig. 47) ist statisch bestimmt. Von den Punkten A und B ausgehend kann man einen reziproken Kräfteplan konstruieren bis zu den Stäben des Sechseckes $RSTUVW$ mit seinen drei Diagonalen. Man könnte glauben, dass zur Bestimmung der Spannungen in diesen 9 Stäben die allgemeinen Methoden der Nummern 35—38 erforderlich sein möchten, doch erweist sich dies als überflüssig, wenn man berücksichtigt, dass die Stäbe UV und VW in eine gerade Linie fallen.

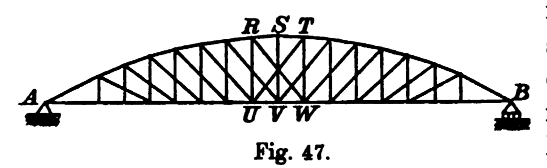
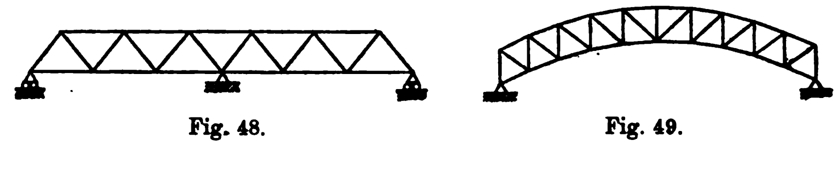


Fig. 47.

49. Fortsetzung: Gestützte ebene Fachwerke als Fachwerksträger. Wird ein freies Fachwerk durch mehr als drei Stäbe mit der Erde verbunden, so ist das erweiterte Fachwerk statisch unbestimmt. Die gebräuchlichsten statisch unbestimmten Fachwerksträger sind die *durchlaufenden* (*kontinuierlichen*) Träger (Fig. 48) und die *Bogenträger mit*


Fig. 48. Fig. 49.

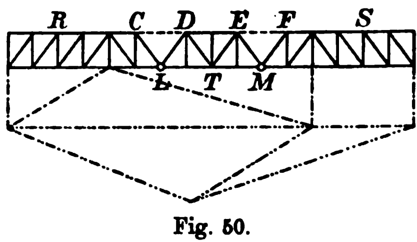


Fig. 50.

zwei Gelenken (Fig. 49). Liegt etwa ein Balkenträger mit einem festen und drei beweglichen Auflagern vor, so entsteht nach Ersatz der Auflager durch Stäbe und nach Konstruktion des Erdfachwerkes ein neues System (Fig. 50), welches zweifach statisch unbestimmt ist. Es kann zu einem statisch bestimmten gemacht werden durch Wegnahme zweier Stäbe, z. B. CD und EF. Auf diese Weise entsteht der *Gerber'sche Träger* mit den Gelenken in L und M. Ausser der angegebenen Form kommt häufig die folgende vor, bei welcher (Fig. 51) die Gelenke in den äusseren Gebieten liegen. Solche Gelenkträger

wurden zuerst von *A. Ritter*[200]) behandelt. Unabhängig von *A. Ritter* ist *Gerber* auf dieselben gekommen. Sie werden nach *Gerber* benannt, weil von demselben die Einführung in die Praxis herrührt[201]). Zur

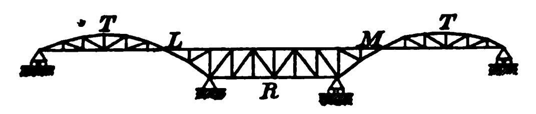


Fig. 51.

Ermittelung der Lagerreaktionen behandelt man zunächst die aufgelegten Träger T als einfache Balken auf zwei Stützen und führt die in den Gelenken auftretenden Auflagerdrücke als Kräfte für die Teile R und S (Fig. 50) bezw. für R (Fig. 51) ein.

Unter dem häufig angewendeten *Zweigelenkbogen* versteht man ein Fachwerk, dessen untere Gurtung oder dessen beide Gurtungen gekrümmt sind, und das durch zwei Gelenkauflager A und B, also durch vier Stäbe mit der Erde verbunden ist. In diesem Falle kann das erweiterte Fachwerk auch dadurch hergestellt werden, dass man die Auflagerknotenpunkte als Knotenpunkte des an die Stelle der Erde tretenden Fachwerkes ABC auffasst. Um das einfach statisch unbestimmte erweiterte Fachwerk statisch bestimmt zu machen (Fig. 52), muss an irgend einer Stelle ein Stab weggenommen werden. Wird der Stab DE weggenommen, so entsteht der *Bogenträger mit drei Gelenken*, der zuerst von *Köpcke* empfohlen wurde[202]). Da die beiden Stäbe AC und BC nur dazu dienen, den Knotenpunkt C des Erdfachwerks festzulegen, so können sie auch weggenommen werden. Das erweiterte Fachwerk wird dann Fig. 53, bei welchem sich das Erdfachwerk auf den einen Stab AB reduziert hat.

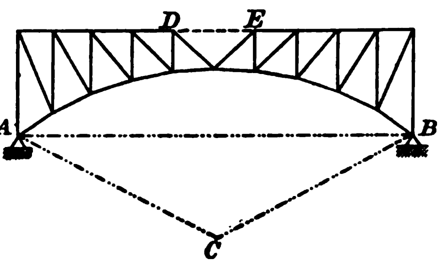


Fig. 52.

Wird dieser Stab AB thatsächlich ausgeführt und dafür das feste Lager B durch ein bewegliches ersetzt, so entsteht der *Bogen-*

200) *A. Ritter*, Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen, Hannover 1863, Abschn. IX.

201) Zeitschr. des bayrischen Arch.- u. Ing.-Ver. (1870).

202) Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 6 (1860), p. 346 und 7 (1861), p. 231. Erste Ausführung (1869): „Eiserner Steg“ bei Frankfurt a. M.

träger mit Durchzug. Nach Bestimmung der Lagerreaktion geschieht die Bestimmung der Spannungen am besten dadurch, dass zunächst ein Schnitt $t \ldots s$ (Fig. 54) geführt wird, welcher die Spannung in dem Stabe AB ergiebt. Wird der Stab AB nicht ausgeführt, dagegen

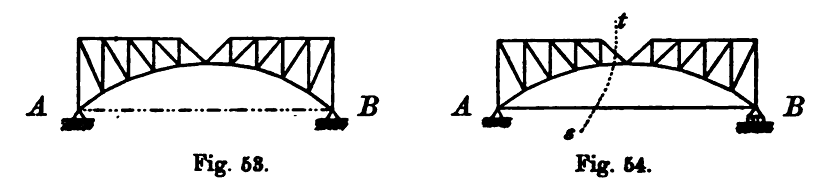


Fig. 53. Fig. 54.

das Lager B wie das Lager A als fest angenommen, so ist die Spannungsbestimmung schliesslich die nämliche; es ist nur zu berücksichtigen, dass die beiden Gelenkdrücke, welche sich durch die Spannung in dem Stabe AB in den Punkten A und B ergeben, nach Wegnahme dieses Stabes und Ersetzung des beweglichen Lagers B durch ein festes Beiträge zu den Lagerreaktionen in A und B liefern.

Eine ähnliche Konstruktion wie der statisch bestimmte Bogenträger mit Durchzug bietet der für Dachbinder vielfach verwendete

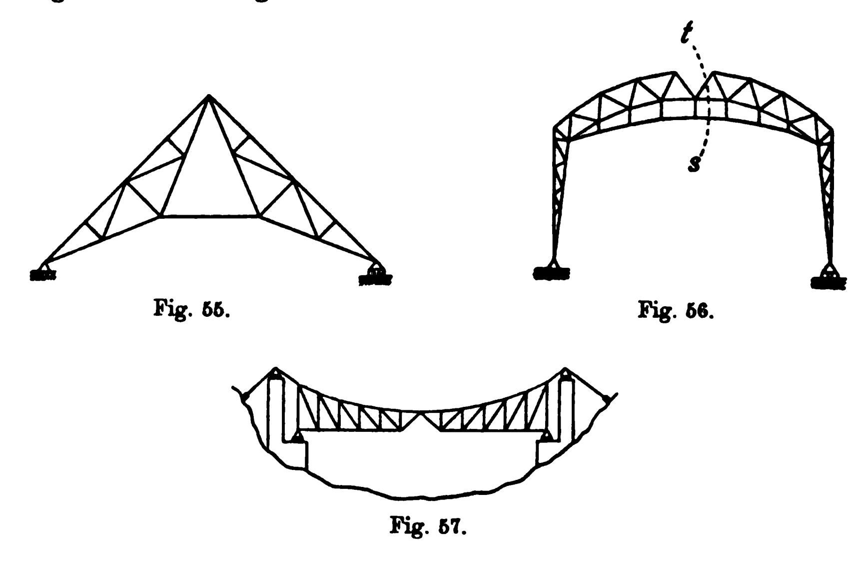


Fig. 55. Fig. 56.

Fig. 57.

Polonceau-Träger (Fig. 55), dessen Spannungsbestimmung in analoger Weise wie bei dem Bogenträger mit Durchzug auszuführen ist.

Für grössere Dachkonstruktionen wird wohl der *Bogenträger mit gesprengter Zugstange*[203]) (Fig. 56) verwendet, bei dem die Bestim-

203) Dieser Träger führt wie der statisch bestimmte Bogenträger mit Durch-

mung der Spannungen leicht durchzuführen ist, wenn man bemerkt, dass der Schnitt $t \ldots s$ nur drei Stäbe trifft.

Die *Hängebrücke mit Mittelgelenk*, vorgeschlagen von *Köpcke* (Fig. 57), kann als ein gestütztes Fachwerk mit vier beweglichen Lagern angesehen werden. Die Untersuchung derselben lässt sich leicht auf diejenige des Bogenträgers mit Mittelgelenk zurückführen.

50. Spezielle räumliche Fachwerksträger[204]. Unter den Raumfachwerken sind es wesentlich die *Flechtwerke*[205], welche bislang einer mathematischen Untersuchung unterzogen sind, und die Bedeutung für die Technik erlangt haben.

Unter einem Flechtwerk wird ein räumliches Fachwerk verstanden, dessen Knotenpunkte und Stäbe auf einem Mantel enthalten sind, der einen inneren Raum umschliesst.

Umgekehrt gilt der Satz:

Jede aus Dreiecken zusammengesetzte Mantelfläche, die einen einfach zusammenhängenden Raum umschliesst, liefert, wenn man die Kanten als Stäbe und die Ecken als Knotenpunkte auffasst, ein Flechtwerk[206].

Die Flechtwerke können dann wieder nach der Form der Mantelfläche, auf welcher die Knotenpunkte liegen, eingeteilt werden in *Kugelflechtwerke, Tonnenflechtwerke, Pyramidenflechtwerke* u.s.w. Einen speziellen Fall eines Kugelflechtwerkes bildet auch die *Schwedler'sche Kuppel* (vgl. unten Fig. 59).

Aus einem solchen Flechtwerk wird dann ein *Flechtwerkträger* hergeleitet, indem man dasselbe durch Stützungsstäbe mit der Erde verbindet, oder es durchschneidet, nur die eine Hälfte benutzt und dieselbe durch entsprechende Lagerung gegenüber der Erde festlegt.

Unter den Flechtwerken ist es wesentlich die *Zimmermann'sche*

---

zug und der Polonceau-Träger nicht auf ein gestütztes, sondern direkt auf ein freies Fachwerk, da derselbe nur ein festes und ein bewegliches Lager hat.

204) Mit der Untersuchung von speziellen räumlichen Fachwerken haben sich vorzugsweise beschäftigt: *A. Föppl,* Schweiz. Bauzeitung 11 (1888), p. 115; Das Fachwerk im Raum, Leipzig 1892; Graphische Statik, Leipzig 1900; *H. Müller-Breslau,* Zentralbl. d. Bauverw. 11 (1891), p. 437; 12 (1892), p. 201, 225, 244, 256; Baukonstruktionen, 3. Aufl., Berlin 1901; ferner *Th. Landsberg,* Zentralbl. d. Bauverw. 18 (1898), p. 297 und 23 (1903), p. 221; *Mehrtens,* Zeitschr. f. Arch. u. Ingenieurwesen, Wochenausgabe (1893), p. 323; siehe auch *Hacker,* Zeitschr. f. Bauwesen 38 (1888), p. 43 und Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 36 (1890), p. 25 und *W. Dietz,* Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 37 (1893), p. 1441.

205) Eine ausführliche Behandlung der Flechtwerke findet sich in der graphischen Statik von *A. Föppl.*

206) *A. Föppl,* Graphische Statik, p. 276.

Kuppel[207]), welche in letzter Zeit Aufsehen erregt hat. Dieselbe besteht aus mehreren eingeschossigen Flechtwerksteilen, die durch Stützengeschosse verbunden sind. Ein solcher Flechtwerksteil ist von zwei Ringen begrenzt, die gewöhnlich in parallelen Ebenen liegen, und die durch Rippen und Diagonalen miteinander verbunden werden. Die Form des oberen Ringes kann eine beliebige sein; der untere Ring hat doppelt soviel Stäbe ($2n$), indem von der dem oberen Ring entsprechenden Form die Ecken durch Stäbe E abgeschnitten werden, wobei die beiden Abschnitte zwischen den betreffenden Ecken und den benachbarten Knotenpunkten einander gleich genommen werden (vgl. Fig. 58, wo eine solche aus zwei derartigen Flechtwerksteilen, *Geschossen*, bestehende Kuppel im Grundriss gezeichnet ist). Der einzelne Flechtwerksteil besteht demnach aus n dreieckigen und n trapezförmigen, durch Diagonalen geteilten Feldern.

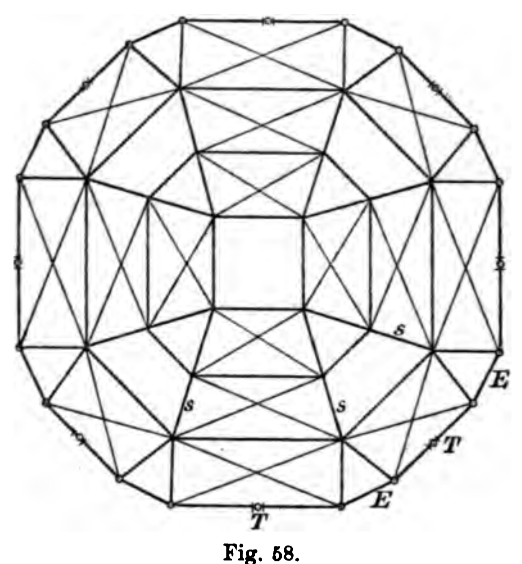


Fig. 58.

Sind mehrere derartige Flechtwerksteile aufeinanderzusetzen, so werden sie durch Stützen s verbunden und in die Hälfte der Trapezfelder des so entstehenden Stützungsgeschosses das Paar der Gegendiagonalen eingespannt (vgl. die Figur). Schliesslich wird die Kuppel in den Punkten des unteren Ringes des untersten Flechtwerkteiles so gelagert, dass jedes Lager in der Auflagerebene frei beweglich ist; ausserdem ist in jedem, zu einem Trapezfelde gehörigen Unterringstab T ein Lager angebracht, welches senkrecht zu dem betreffenden Stab in der Auflagerebene verschiebbar ist und zur Aufnahme der wagerechten Seitendrücke dient. Die wagerechten Auflagerdrücke beanspruchen die Umfassungsmauern nur in der Fluchtrichtung. Man hat im Ganzen $3n$ Auflagerunbekannte. Zur Bestimmung der Spannungen bei beliebiger Belastung gab *Zimmermann* Formeln, auf die hier nicht ein-

207) *Zimmermann*, Über Raumfachwerke. Neue Formeln und Berechnungsweisen für Kuppeln und sonstige Dachkanten, Berlin 1901, sowie Zentralbl. d. Bauverw. 21 (1901), p. 201.

gegangen werden soll, da es sich um ein statisch unbestimmtes Fachwerk handelt, falls nicht in den Trapezen je eine Diagonale weggelassen wird, bezw. als schlaffe Diagonale unberücksichtigt bleiben kann[208]).

Aus der eingeschossigen *Zimmermann*'schen Kuppel entsteht die *Schwedler*'sche, indem die Unterringstäbe zu Null werden, also die Dreiecksflächen in einen Grat übergehen; die Kuppel ist von mit Diagonalen versehenen Trapezen begrenzt (Fig. 59). Die Kuppel ist gelagert in den Knotenpunkten des unteren Randes und zwar in festen Lagern. Die Stäbe des unteren Randes können als Stäbe, welche feste Lagerpunkte verbinden, weggelassen werden. Die Kuppel ist statisch bestimmt, falls in jedem Trapez (wie es in der Figur geschehen ist) nur eine Diagonale eingezogen, bezw. berücksichtigt wird.

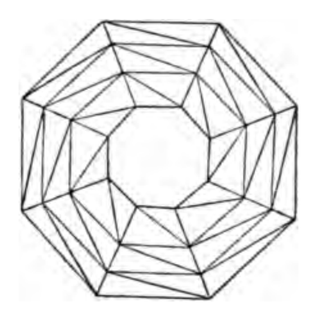


Fig. 59.

Schwedler[209]) selbst gab die Berechnung der Spannungen nur für den Fall der symmetrischen Belastung an[210]).

Lässt man bei der *Zimmermann*'schen Kuppel die Stäbe T zu Null werden, treffen sich also je zwei Stäbe in einem Punkt von T, so dass jeder Eckpunkt des unteren Ringes mit den nächstliegenden Punkten des oberen Ringes verbunden ist, so entsteht die *Netzwerkkuppel*. Die Ecken des oberen Ringes liegen verschoben gegen diejenigen des unteren Ringes. Die Kuppel ist von Dreiecken begrenzt die in verschiedenen Ebenen liegen[211]).

---

208) Graphisch hat *A. Föppl* die *Zimmermann*'sche Kuppel untersucht. Zentralbl. d. Bauverw. 21 (1901), p. 487. Siehe ferner *H. Müller-Breslau*, Zentralbl. d. Bauverw. 22 (1902), p. 49, 61, 429, 501, sowie 22 (1903), p. 65 und *O. Mohr*, Zentralbl. d. Bauverw. 22 (1902), p. 205, 634; ferner *Mehrtens*, Deutsche Bauzeitung 36 (1902), p. 325. Siehe auch die Beschreibung der Kuppel von *Th. Landsberg*, Zentralbl. d. Bauverw. 21 (1901), p. 550.

209) Zeitschr. f. Bauwesen 16 (1866), p. 7.

210) Die *Schwedler*'sche Kuppel ist ausführlich von *A. Föppl* behandelt in dessen Graphischer Statik, sowie in den früheren erschienenen und zitierten Abhandlungen. Bei symmetrischen Belastungen werden die Diagonalen der Trapeze spannungslos.

211) Näheres zu finden z. B. in *Föppl*, Graphische Statik. Von *A. Föppl* werden ausführlich die Tonnenflechtwerke untersucht; siehe auch Civiling. 40 (1894), p. 465. Weitere Litteraturangaben finden sich in Handbuch der Ingenieurwissenschaften 2, 3. Aufl. Kap. 8.

Schlusswort.

Zum Schluss möge ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Voraussetzungen, unter denen vorstehend die Fachwerke betrachtet sind, in praxi immer nur unvollkommen zutreffen. Insbesondere sind die Stäbe in den Knotenpunkten, in denen sie zusammenstossen, meist nicht frei drehbar (wo dann noch die Reibung in Betracht zu ziehen wäre), sondern in denselben vernietet. Eine genauere auf Elastizitätsbetrachtungen ruhende Theorie wird nicht nur die aus der longitudinalen Beanspruchung der Stäbe resultierende Längenänderung der Stäbe, sondern auch den Einfluss dieser Vernietungen zu berücksichtigen haben. Wie weit die in dem vorliegenden Artikel gegebenen Entwickelungen als erste Annäherung an die genaue Theorie zu betrachten sind, wird sich nur im einzelnen Falle entscheiden lassen. Hier ist u. a. für das kontrolierende Experiment ein weiter Spielraum gegeben. Es ist unmöglich diese Betrachtungen hier weiter fortzusetzen.

(Abgeschlossen im Juni 1903.)

IV 6. ELEMENTARE DYNAMIK DER PUNKTSYSTEME UND STARREN KÖRPER*).

Von

PAUL STÄCKEL

IN HANNOVER.

Inhaltsübersicht.

*) Bei der Abfassung dieses Artikels ist der Verfasser in dankenswerter Weise von verschiedenen Fachgenossen unterstützt worden. An erster Stelle hat er Herrn *Julius Petersen* (Kopenhagen) zu nennen, der ursprünglich den Artikel übernommen hatte und ihm dementsprechend eine erste Sammlung von Material mit einer Reihe von wichtigen Bemerkungen zur Verfügung stellen konnte. Über die Gestaltung des Artikels im allgemeinen hat sich der Verfasser in wiederholten Besprechungen mit Herrn *F. Klein* beraten, und für die Einzelheiten sind ihm besonders Bemerkungen der Herren *G. Hamel* (Brünn), *K. Heun* (Karlsruhe) und *E. Lampe* (Berlin) von Nutzen gewesen, die eine Korrektur zu lesen die Güte hatten. *P. Stäckel.*

C. Systeme starrer Körper.

Litteratur.

Vorbemerkung. Bei dem grossen Umfange der Litteratur konnte nur eine Auswahl gegeben werden; nicht berücksichtigt worden sind die Werke für den Unterricht an den Schulen sowie, bis auf einige wenige Ausnahmen, die Darstellungen der elementaren Dynamik, die sich in den Lehrbüchern der Physik und der Technik finden. Man vergleiche auch die Verzeichnisse in IV 1 (*A. Voss*), besonders für die Werke historisch-kritischen Inhalts.

I. Grundlegende Werke und Lehrbücher.

A) Ältere Werke (bis 1800).

J. le Rond d'Alembert, Traité de *dynamique**), Paris 1743. Deutsch von *A. Korn:* Abhandlung über Dynamik, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Heft 106.

L. Euler, Mechanica sive motus scientia analytice exposita, 2 Bde., Petersburg 1736, deutsch von *J. Ph. Wolfers:* Mechanik oder analytische Darstellung der Wissenschaft von der Bewegung, 2 Tle., Greifswald 1848/50.

— *Theoria motus* corporum solidorum seu rigidorum, Rostock und Greifswald, 1765, 2. Auflage 1790, deutsch von *J. Ph. Wolfers:* Theorie der Bewegung fester oder starrer Körper (3. Teil der Mechanik), Greifswald 1853.

G. Galilei, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Leiden 1638. Deutsch von *A. v. Öttingen*: Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Heft 11, 24, 25.

Chr. Huygens, Horologium oscillatorium, Paris 1673, — Tractatus de motu corporum et percussione, Tractatus de vi centrifuga. Opuscula postuma, Leyden 1703, deutsch von *F. Hausdorff:* Ueber die Bewegung der Körper durch den Stoss. Ueber die Zentrifugalkraft, Ostwalds Klassiker, Heft 138.

J. L. Lagrange, De la Grange, Méchanique analitique, Paris 1788; *Mécanique* analytique, 2. éd., 2 Bde., 1811/15, 3. éd. 1853 (*J. Bertrand*), 4. éd. = Oeuvres complètes 11, 12, Paris 1888/89 (*G. Darboux*); deutsch von *F. W. A. Murhard:* Analytische Mechanik, Göttingen 1797; *H. Servus:* Analytische Mechanik, Berlin 1887.

---

*) Mit der durch *kursiven* Druck hervorgehobenen Abkürzung ist das betreffende Werk im folgenden und in den Artikeln 11—13 (*P. Stäckel*) angeführt.

P. S. Laplace, Traité de *mécanique celeste* 1, 2, Paris 1799 = Oeuvres complètes 1, 2.
G. Monge, Traité élémentaire de statique, Paris 1786.
I. Newton, Philosophiae naturalis *principia* mathematica, London 1687; deutsch von *J. Ph. Wolfers:* Mathematische Prinzipien, Berlin 1872.
S. Stevin, De Beghinselen der Weegkonst, Leyden 1586. Oeuvres mathématiques, éd. par *A. Girard,* Leyden 1634.
P. Varignon, Projet d'une nouvelle mécanique, Paris 1687.
— Nouvelle mécanique ou statique, 2 Bde., Paris 1725 (posthum).

B) Neuere Litteratur.

a) Darstellungen der gesamten Mechanik.

P. Appell, Traité de *mécanique* rationnelle. Tome I: Statique. Dynamique du point, Paris 1893, 2. éd. 1902. Tome II: Dynamique des systèmes. Mécanique analytique, Paris 1896, 2. éd. 1904. Tome III: Equilibre et mouvement des milieux continus, Paris 1903. (Anführungen nach der zweiten Auflage.)
N. Asbeleff, Grundlagen der *Mechanik* (russisch), Petersburg 1892.
W. H. C. Bartlett, Elements of analytical mechanics, 7. ed. New-York 1860.
D. Bobylew, Analytische *Mechanik* (russisch), 3 Bde., St. Petersburg 1885/1888, Supplement Petersburg 1903.
L. Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipe der *Mechanik.* Teil I, Leipzig 1897; Teil II, Leipzig 1904.
E. Bour, Cours de mécanique et machines, fasc. 1—3, Paris 1865/74.
J. Boussinesq, Leçons synthétiques de *mécanique* générale; publiées par *Legay* et *Vigneron,* Paris 1889.
O. J. Broch, Lehrbuch der *Mechanik,* Berlin und Christiania 1849.
— *Forelaesninger* over rationel mekanik, Christiania 1857.
E. Budde, Allgemeine *Mechanik* der Punkte und starren Systeme, 2 Bde., Berlin 1890/91.
F. Castellano, Lezioni di *meccanica* razionale, Torino 1894.
Ch. Cellérier, Cours de mécanique, Paris 1892.
O. D. Chwolson, Lehrbuch der *Physik* (russisch), Bd. I, Petersburg 1897, 2. Aufl. 1902; deutsch von *H. Pflaum;* Lehrbuch der Physik, Braunschweig 1902.
W. K. Clifford, The elements of *dynamic,* Part I und II (posthum), London 1878/87.
E. Collignon, Traité de *mécanique,* 4 Bde., Paris 1873/74.
G. Coriolis, Traité de la *mécanique* des corps solides et du calcul de l'effet des machines, Paris 1829, 2. éd. 1844; deutsch von *H. Schnuse:* Lehrbuch der Mechanik der festen Körper und der Berechnung des Effects der Maschinen. Braunschweig 1846.
J. Cox, Mechanics, Cambridge 1904.
G. Decher, Handbuch der rationellen *Mechanik,* 4 Bde., Augsburg 1851/61.
Ch. E. Delaunay, Traité de *mécanique* rationnelle, Paris 1856, 7. Aufl. 1883; deutsch von *G. Krebs:* Lehrbuch der analytischen *Mechanik,* Wiesbaden 1868.
Ch. Despeyrous, Cours de *mécanique,* avec des notes par *G. Darboux,* 2 Bde., Paris 1884/86.
J. M. C. Duhamel, Cours de *mécanique* de l'école polytechnique. 2 Bde., Paris 1845/46, deutsch von *H. Eggers* mit Zusätzen von *O. Schlömilch:* Lehrbuch der analytischen Mechanik, 2 Bde., Leipzig 1853, 2. Aufl. Leipzig 1858, 3. Aufl. Leipzig 1861; *H. Wagner:* Lehrbuch der reinen Mechanik, Braunschweig 1853.

J. Finger, Elemente der reinen Mechanik, Wien 1886, 2. Aufl. 1900.
A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. I: *Einführung* in die Mechanik, Leipzig 1898; 3. Aufl. 1905.
— Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. IV: *Dynamik,* Leipzig 1899; 2. Aufl. 1901.
J. N. Franke, Theoretische *Mechanik* (polnisch), Warschau 1889.
Ph. Gilbert, Cours de *mécanique* analytique, Louvain 1877, 3. Aufl., Paris 1891.
A. Gray, Treatise on *physics,* Part I, London 1901; deutsch von *F. Auerbach:* Lehrbuch der *Physik,* 1. Band, Braunschweig 1904.
H. v. Helmholtz, Einleitung zu den Vorlesungen über theoretische Physik. Herausgegeben von *A. König* und *C. Runge,* Leipzig 1903.
— Vorlesungen über die *Dynamik* diskreter Massenpunkte, herausgegeben von *O. Krigar-Menzel,* Leipzig 1898.
H. Hertz, Die Prinzipien der *Mechanik* in neuem Zusammenhange dargestellt, Leipzig 1894.
K. Heun, Formeln und Lehrsätze der allgemeinen *Mechanik,* Leipzig 1902.
C. G. J. Jacobi, Vorlesungen über *Dynamik,* gehalten 1845/46, herausgegeben von *A. Clebsch,* Berlin 1866, 2. Ausgabe (Supplementband zu den gesammelten Werken) von *E. Lottner,* Berlin 1884.
G. Jaumann, Die Grundlagen der Bewegungslehre von einem modernen Standpunkte aus dargestellt, Leipzig 1905.
W. Keck, Vorträge über *Mechanik* als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen, 3 Bde., Hannover 1896/98.
G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, 1. Bd.: *Mechanik,* Leipzig 1876; 4. Aufl., besorgt von *W. Wien,* Leipzig 1897.
H. Laurent, Traité de *mécanique* rationnelle, Paris 1870, 2. éd., 3 Bde., Paris 1884.
T. Levi-Civita, Lezioni di *meccanica* razionale, Padua 1900 (lithographiert).
H. Lorenz, Technische *Mechanik* starrer Systeme, München und Berlin 1902.
W. J. Loudon, An elementary treatise on rigid dynamics, New-York und London 1896.
A. Love, Theoretical *mechanics,* an introductory treatise on the principles of dynamics, Cambridge 1897.
H. B. Lübsen, Einleitung in die *Mechanik,* 2 Bde, Leipzig 1858/59.
J. Lüroth, Grundriss der *Mechanik,* München 1881.
G. Macgregor, Elementary treatise on kinematics and *dynamics,* London 1887.
G. A. Maggi, Principii della teoria matematica del movimento dei corpi, corso di *meccanica* razionale, Milano 1896.
— Principii di *stereodinamica,* Milano 1903.
R. Marcolongo, Meccanica razionale, 2 Teile, Milano 1905.
É. Mathieu, Cours de *physique mathématique,* Paris 1873.
— Dynamique analytique, Paris 1878.
F. Minding, Handbuch der theoretischen *Mechanik* (zugleich zweiter Teil des Handbuches der Differential- und Integralrechnung), Berlin 1838.
H. Navier, Résumé des leçons de mécanique, Paris 1841, deutsch von *L. Mejer:* Lehrbuch der höheren Mechanik, Hannover 1858.
F. Neumann, Einleitung in die theoretische *Physik,* herausgegeben von *C. Pape,* Leipzig 1883.
G. H. Niewenglowsky, Rationelle *Mechanik* (polnisch), 2 Bde., Paris 1873/75.
B. Peirce, Physical and celestial *mechanics,* Boston 1855.

J. Petersen, Lehrbuch der *Statik* fester Körper, deutsche Ausgabe von *R. von Fischer-Benzon*, Kopenhagen 1882.
— Lehrbuch der Kinematik, deutsche Ausgabe von *R. von Fischer-Benzon*, Kopenhagen 1884.
— Lehrbuch der *Dynamik* fester Körper, deutsche Ausgabe von *R. von Fischer-Benzon*, Kopenhagen 1887.
S. D. Poisson, Traité de mécanique, 2 Bde., Paris 1811, 2. éd. 1833, 3. éd. Brüssel 1838; deutsch von *J. C. Schmidt:* Lehrbuch der Mechanik, Stuttgart und Tübingen 1825/26, *M. A. Stern:* Lehrbuch der Mechanik, Berlin 1835/36.
J. V. Poncelet, Cours de mécanique appliquée aux machines, Metz 1826, 2. éd. 1836; publié par *X. Kretz*, 2 Bde., Paris 1874/6; deutsch von *C. H. Schnuse;* 2 Bde., Darmstadt 1845/48.
R. de Prony, Leçons de *mécanique* analytique, Paris 1815.
O. Rausenberger, Lehrbuch der analytischen *Mechanik*, 2 Bde., Leipzig 1888.
F. Reech, Cours de *mécanique* d'après la nature généralement flexible et élastique des corps, Paris 1852.
H. Resal, Traité de *mécanique* générale, 7 Bde., Paris 1873—1889; 2. éd. (Bd. 1, 2) Paris 1895.
A. Ritter, Lehrbuch der technischen Mechanik, Hannover 1865, 7. Aufl. 1890.
— Lehrbuch der analytischen *Mechanik*, Hannover 1873, 3. Aufl. Leipzig 1898.
H. A. Roberts, A treatise on elementary *dynamics*, London 1900.
E. J. Routh, Dynamics of a system of rigid bodies, Cambridge 1860; 7. ed. des 1. Bandes, London 1905, 6. ed. des 2. Bandes, London 1905; deutsch von *A. Schepp*: Die *Dynamik* der Systeme starrer Körper, Leipzig 1898.
W. Schell, Theorie der *Bewegung* und der Kräfte, Leipzig 1870, 2. Aufl. in 2 Bänden, Leipzig 1879/80.
K. H. Schellbach, Neue Elemente der *Mechanik*, dargestellt und bearbeitet von *G. Arendt*, Berlin 1860.
N. Schiller, Grundlagen der *Physik* (russisch), Kijew 1884.
F. Slate, The Principles of *mechanics*, Part I, New York 1900.
T. Sludsky, Theoretische *Mechanik* (russisch), Moskau 1881.
O. Somoff, Theoretische *Mechanik* (russisch), 2 Bde., St. Petersburg 1872/74, deutsch von *A. Ziwet*, 2 Bde., Leipzig 1878/79.
Ch. Sturm, Cours de mécanique de l'école polytechnique, publié par *J. Prouhet*. 2 Bde., Paris 1861, 5. éd. 1883, deutsch von *Th. Gross:* Lehrbuch der Mechanik, Berlin 1899/1900.
Hj. Tallqvist, Lehrbuch der technischen Mechanik, Bd. 1: Geometrische Bewegungslehre, Mechanik des materiellen Punktes, Statik des starren Körpers. Zürich 1903.
W. Thomson and *P. G. Tait*, *Treatise* on natural philosophy, 1. ed., Oxford 1867; deutsch von *H. Helmholtz* und *G. Wertheim: Handbuch* der theoretischen Physik, 2 Teile, Braunschweig 1871/74; 2. ed. in 2 Bänden, Cambridge 1879/83.
P. van der Vliet, Einleitung in die *Mechanik* (russisch), St. Petersburg 1886.
W. Voigt, *Kompendium* der theoretischen Physik, 2 Bde., Leipzig 1895/96.
— Elementare *Mechanik*, Leipzig 1889, 2. Auflage Leipzig 1901.
A. G. Webster, The *dynamics* of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies, being lectures on mathematical physics, Leipzig 1904.
W. Williamson und *F. A. Tarleton*, A treatise on *dynamics*, London 1885, 3. ed. 1900.

E. T. Whittaker, A treatise of the analytical *dynamics* of particles and rigid bodies, Cambridge 1904.

A. Ziwet, Elementary treatise on theoretical *mechanics*, 3 Bde., New York 1893/94, 2. ed. 1904.

b) Werke monographischen Charakters.

J. Andrade, Leçons de *mécanique* physique, Paris 1897.

P. Appell, Les mouvements de *roulement* en dynamique, Paris 1899.

R. S. Ball, The theory of screws. A study in the dynamics of a rigid body, Dublin 1876; deutsch bearbeitet von *H. Gravelius*: Theoretische Mechanik starrer Systeme, auf Grund der Arbeiten und mit einen Vorworte von Sir *Robert S. Ball*, Berlin 1889.

— A treatise on the *theory of screws*, Cambridge 1900.

L. Henneberg, Statik der starren Körper, Darmstadt 1886.

K. Heun, Die *kinetischen Probleme* der wissenschaftlichen Technik. Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver. 9, Heft 2, Leipzig 1900.

J. H. Jellett, Treatise on the theory of friction, Dublin 1872; deutsch von *J. Lüroth* und *A. Schepp*: Die Theorie der *Reibung*, Leipzig 1890.

F. Klein und *A. Sommerfeld*, Über die *Theorie des Kreisels*, Heft 1, Leipzig 1897, Heft 2, 1898, Heft 3, 1903 (ein viertes Heft in Vorbereitung).

J. Cl. Maxwell, Matter and motion, London 1876, deutsch von *E. v. Fleischl*: Substanz und Bewegung, Braunschweig 1879.

G. M. Minchin, A treatise on *statics* with applications to physics, Oxford 1877, I. 5. ed. London 1896; II. 3. ed. 1886.

A. F. Möbius, Lehrbuch der *Statik*, 2 Bde., Leipzig 1837 = Werke Bd. 3, Leipzig 1885.

F. Moigno, Leçons de mécanique analytique: *Statique*, Paris 1868.

J. Perry, Applied *mechanics*, London 1897.

L. Poinsot, Élémens de *statique*, Paris an XII (1803), 12. éd. 1877, deutsch von *J. W. Lambert*: Anfangsgründe der Statik, Giessen 1828, *J. G. Hartmann*: Elemente der Statik, Berlin 1831 und *H. Servus*: Elemente der Statik, Berlin 1887.

— *Théorie nouvelle* de la rotation des corps, Paris 1834, deutsch bearbeitet von *K. H. Schellbach*: Neue Theorie der Drehung der Körper, Berlin 1851.

E. J. Routh, Analytical *statics*, 2 Bde., Cambridge 1892, I, 2. ed. 1896, II, 2. ed. 1902.

— A treatise on *dynamics* of a particle, Cambridge 1898.

P. G. Tait and *W. J. Steele*, *Dynamics* of a particle, Cambridge 1856, 7. ed. London 1901.

J. J. Thomson, *Application* of dynamics to physics and chemistry, London 1886, deutsch: Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie, Leipzig 1890.

J. Todhunter, A treatise on analytical *statics*, London 1853, 5. ed. 1887.

II. Aufgabensammlungen.

X. Antomari und *Ch. A. Laisant*, *Questions* de mécanique, Paris 1895.

A. Fuhrmann, *Aufgaben* aus der analytischen Mechanik, 2 Bde., Leipzig 1867/70. I. 3. Aufl. 1904, II. 2. Aufl. 1882.

M. Jullien, *Problèmes* de mécanique rationnelle, 2 Bde., Paris 1855, 2. éd. 1866.

F. Kraft, *Sammlung* von Problemen der analytischen Mechanik, 2 Bde.. Stuttgart 1884/85.

A. de Saint-Germain, Recueil d'exercices sur la mécanique rationnelle, Paris 1877, 2. éd. 1889.

J. Vieille, Cours complémentaire d'analyse et de mécanique rationnelle, Paris 1851.

E. Villié, Compositions d'analyse, cinématique, mécanique et astronomie données (depuis 1869, 1885, 1889) à la Sorbonne pour la Licence ès sciences mathématiques, 3 Bde., Paris 1885, 1890, 1898.

W. Walton, A collection of *problems* in illustration of the principles of theoretical mechanics, Cambridge 1842, 3. ed. 1876.

P. Zech, Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Mechanik, Stuttgart 1864, 3. Aufl. (besorgt von *C. Cranz*), 1906.

Viele Aufgaben finden sich auch in den Lehrbüchern und in den mathematischen und physikalischen Zeitschriften, besonders in folgenden:

Mathematical questions and solutions from the „*Educational Times*", with many papers nnd solutions in addition to those published in the „Educational Times", London, jährlich 2 Bände. Erste Serie 75 Bände bis 1901; zweite Serie 8 Bände bis 1905.

Nouvelles annales de mathématiques, Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, Paris seit 1841.

Wiskundige opgaven met de oplossingen, door leden van het wiskundige genootschap, ter spreuke voerende: „Een onvermoide arbeid komt alles te boven", Amsterdam, seit 1875; z. T. unter anderem Titel schon frühere Serien; alle 3 bis 4 Jahre ein Band, heftweise erscheinend.

Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, herausgegeben von F. Poske, Berlin seit 1887.

III. Historisch-kritische Werke.

H. Burkhardt, Bericht über Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen, Jahresber. d. D. M.-V. 10, Heft 2; bis jetzt erschienen Lieferung 1 bis 4, Leipzig 1901 bis 1904.

P. Duhem, Les origines de la statique t. 1, Paris 1905.

E. Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen *Principien* der Mechanik. Leipzig 1872, 2. Aufl. 1887.

H. Klein, Die Prinzipien der Mechanik, historisch und kritisch dargestellt, Leipzig 1872.

E. Mach, Die *Mechanik* in ihrer Entwicklung historisch und kritisch dargestellt, Leipzig 1883, 5. Aufl. 1904; angeführt ist die 4. Aufl. 1901; englische Uebersetzung von *T. J. Mc. Cormack:* The science of mechanics, Chicago 1893, 2. ed. 1902; französische Übersetzung von *E. Bertrand:* La Mécanique, Paris 1903.

J. F. Montucla, Histoire des mathématiques, 2 Bde., Paris 1758, 2. éd. 4 Bde. 1798/1902; die beiden letzten Bände bearbeitet von *J. Lalande.*

P. Volkmann, Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik, Leipzig 1900.

W. Whewell, History of the inductive sciences, 3 Bde., London 1837/38; 3. ed. London 1857; deutsch von *J. J. v. Littrow:* Geschichte der induktiven Wissenschaften. Stuttgart 1840/41.

R. Wolf, Handbuch der Astronomie, 2 Bde., Zürich 1891/93.

Bezeichnungen.

Die rechtwinkligen cartesischen Koordinaten eines Punktes P seien x, y, z; sind mehrere Punkte vorhanden, so sollen ihre Koordinaten durch Indices unterschieden werden. Die Zeichen $q_1, q_2, \dots, q_r$ bedeuten *Lagrange*sche Positionskoordinaten eines Systems. Die Masse des Punktes P heisse m; bei mehreren Punkten treten unterscheidende Indices ein. In Übereinstimmung mit IV 1 (*A. Voss*) soll für die Ableitungen nach der Zeit t die *Newton*sche Schreibart

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

angewandt werden, während der *Lagrange*sche Strich für Ableitungen nach Koordinaten vorbehalten wird. Die Geschwindigkeit des Punktes P als Skalar werde mit v, als Vektor mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet; für Vektoren sollen überhaupt immer deutsche Buchstaben verwendet werden. Die Komponenten der auf den materiellen Punkt P wirkenden Kraft nach den Axen der x, y, z seien X, Y, Z; als Vektor aufgefasst werde diese Kraft $\mathfrak{F}$ genannt. Die Koordinaten (Komponenten) der Kraft bei den allgemeinen *Lagrange*schen Gleichungen seien $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$. Die lebendige Kraft eines materiellen Punktes oder eines Systems solcher Punkte sei T, die Arbeit W (work). U möge die Kräftefunktion, V die potentielle Energie bedeuten, sodass $U = -V$ ist.

Bei der Bewegung eines starren Körpers sei in dem Körper fest das rechtwinklige Koordinatensystem der x, y, z, im Raume fest das System der ξ, η, ζ. Die Komponenten der Translationsgeschwindigkeit des Körpers in bezug auf die Axen der x, y, z heissen u, v, w, die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit p, q, r. Wählt man als Axen der x, y, z die zum Anfangspunkte gehörigen Hauptträgheitsaxen, so sollen die bezüglichen Hauptträgheitsmomente mit A, B, C bezeichnet werden. Handelt es sich um mehrere starre Körper, so werden unterscheidende Indices angewandt.

---

1. Geschichtliche Bemerkungen. Begriff und Aufgabe der elementaren Dynamik. Nachdem die Dynamik[1]) im 17. Jahrhundert von *G. Galilei*, *Chr. Huygens* und *I. Newton* begründet worden war, sind während des 18. Jahrhunderts nicht nur viele einzelne Probleme

1) Nach dem Vorgange von *W. Thomson* und *P. G. Tait* (Handbuch 1, p. VI) wird hier mit *Dynamik* die Wissenschaft von der *Kraft* bezeichnet, mag diese nun relative Ruhe unterhalten oder eine Beschleunigung der relativen Bewegung hervorbringen; die diesen beiden Fällen entsprechenden Teile des Dynamik heissen *Statik* und *Kinetik*.

behandelt, sondern auch die Methoden zur Lösung dynamischer Aufgaben soweit ausgebildet worden, dass prinzipiell nichts mehr zu wünschen übrig schien. Für diese Entwicklung sind besonders die *Bernoulli*, *G. F. de l'Hospital*, *L. Euler*, *J. d'Alembert* und *J. L. Lagrange* zu nennen, mit dem diese Periode abschliesst[1a]). In der Vorrede zur ersten Ausgabe seiner Mécanique analytique vom Jahre 1788 erklärt *Lagrange*, dass er diese Wissenschaft „auf allgemeine Formeln zurückgeführt habe, deren einfache Anwendung diejenigen Gleichungen liefert, die zur Lösung einer jeden Aufgabe erforderlich sind". Dieser „reguläre und gleichförmige Gang der Untersuchung" wird dadurch bewirkt, dass die von ihm „auseinandergesetzte Methode weder Konstruktionen noch geometrische oder mechanische Überlegungen verlangt", dass vielmehr von vornherein der analytische Ansatz massgebend wird.

Den Charakter analytischer Allgemeinheit haben auch die Untersuchungen über die Transformation und die Integration der Differentialgleichungen der Dynamik, die als Weiterführung der *Lagrange*schen Methode in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts zuerst *S. D. Poisson* und dann besonders *R. W. Hamilton* und *C. G. J. Jacobi* angestellt haben. Während aber *Poisson* von der astronomischen Störungstheorie, *Hamilton* von der Optik ausging und beide den Zusammenhang mit der Natur aufrecht erhielten, kam bei *Jacobi* die abstrakt-mathematische Richtung zu bewusster und ausschliesslicher Herrschaft[2]). Mit *L. Poinsot* in Frankreich beginnend, alsdann nach England hinübergreifend, wo man an den geometrischen Methoden der Principia von *I. Newton* stets festgehalten hatte, allmählich überall zur Geltung gelangend ist später eine Reaktion gegen diese einseitige Behandlung der Dynamik eingetreten, bei der man nicht selten an die naive Auffassung der Probleme anknüpfte, die im 18. Jahrhundert üblich gewesen war[3]). Den Nachdruck legte man dabei auf die erschöpfende

---

1a) Leider fehlt es an einer ausreichenden geschichtlichen Darstellung; *W. Whewell*, *E. Dühring*, *E. Mach* versagen, sobald man tiefer ins 18. Jahrhundert hineinkommt, und dasselbe gilt auch für das 19. Jahrhundert. Am wertvollsten sind noch die historischen Bemerkungen, die *J. L. Lagrange* seiner Mécanique eingefügt hat, und die Reports von *A. Cayley*, British Assoc. 1857, p. 1—42 = Papers 3, p. 156—204, British Assoc. 1862, p. 184—252 = Papers 4, p. 513—593.

2) Vgl. *Jacobis* Antrittsrede in Königsberg, 1832, die *W. v. Dyck* veröffentlicht hat, München Ber. 31 (1901), p. 203 = Math. Ann. 56 (1902), p. 252.

3) Bei *L. Poinsot* ist zum Beispiel eine Anknüpfung an *P. Varignon* zu vermuten; man vergleiche etwa für die Lehre von den Momenten die Nouvelle Mécanique, section 1, Lemma 16.

:ledigung einzelner, der physikalisch-technischen Wirklichkeit ent-
mmener oder ihr doch nahe stehender Aufgaben. Es genügt keines-
gs, so etwa lässt sich *Poinsots* Ansicht formulieren, ein Problem
r Dynamik auf ein System von Gleichungen zurückzuführen, in
nen ausser endlichen Ausdrücken höchstens Quadraturen vorkommen,
elmehr kommt alles darauf an, die zu untersuchende Bewegung
schaulich darzustellen, sodass man ihren Verlauf in Zeit und
um deutlich vor Augen hat. Ebenso haben *W. Thomson* und
G. Tait, wie *H. v. Helmholtz* sich ausdrückt[4]), „sich bemüht, Be-
iffe einzuführen, welche einer Anschauung fähig sind; eine solche
h herauszuarbeiten ist im Anfange allerdings oft schwerer, als den
gebenen analytischen Methoden in der Rechnung einfach zu folgen,
er es bleibt durch die dabei gewonnene grössere Übersichtlichkeit
s Verfahrens auch ein dauernder Gewinn bestehen". Noch schärfer
ssern sich *P. Appell* und *J. Chappuis:* „L'abus des méthodes de la
ométrie analytique détruit l'intuition et l'esprit d'invention"[5]).

Unterstützt wurden diese Bestrebungen durch die Bedürfnisse
s Unterrichts; allerdings nur teilweise, denn nicht wenige der vielen
ispiele, die sich in den Lehrbüchern und den Aufgabensammlungen
den, sind schematischer Art oder „nicht der Erfahrung entnommen,
ndern zum Zwecke der Einübung gewisser allgemeiner und strenger
tegrationsmethoden mit nur geringer Rücksichtnahme auf die wirk-
hen Verhältnisse erfunden"[6]). In demselben Sinne wirkten ferner
e Forderungen der Physik und der Technik, die sich im 19. Jahr-
ndert neben den früher fast ausschliesslich von der Astronomie
sgehenden Anregungen immer stärker geltend machten und allmäh-
h zu der Ausbildung selbständiger Disziplinen, einer *physikalischen*
d einer *technischen Mechanik*, geführt haben; diese Disziplinen
hen zu der rationellen[7]) oder theoretischen Mechanik nicht in dem
rhältnisse eines Gegensatzes, sondern in demselben Verhältnisse, in
m überall die angewandten Disziplinen zu ihren theoretischen Grund-
gen stehen.

Die Hilfsmittel, deren man sich im Sinne einer konkreten Auf-

---

4) Handbuch 1 (1871), p. XII.

5) Leçons de mécanique élémentaire, Paris 1903, p. VII; vgl. auch *R. S. Ball*, dynamical parable (Brit. Assoc. 1887, wieder abgedruckt Theory of screws, 496—509).

6) *W. Voigt*, Mechanik, 2. Aufl., p. 1.

7) Rationell bedeutet ursprünglich soviel wie apriorisch; noch *J. d'Alembert* ; eine apriorische Begründung der Mechanik zu geben versucht; vgl. auch 1, Nr. 4 und 28 (*A. Voss*).

fassung bei der Diskussion dynamischer Probleme bedient hat, sind verschiedener Art. Erstens wurden *geometrische Vorstellungen* herangezogen, zunächst im Anschluss an das Aufblühen der neueren Geometrie und an die Schule von *G. Monge;* später sind auch die von *R. W. Hamilton, A. F. Möbius, H. Grassmann, J. W. Gibbs* u. s. w. ausgebildeten Methoden der geometrischen Analyse (Vektoranalysis, baryzentrischer Calcul, Ausdehnungslehre) für die Mechanik nutzbar gemacht worden und haben wohl gerade hier die natürlichste und fruchtbarste Verwendung gefunden[8]). Das Extrem bildet eine von *W. Schell* vertretene Betrachtungsweise, bei der die Kausalität ganz aus der Mechanik ausgeschaltet wird und nur noch die geometrische Untersuchung scheinbar willkürlich ersonnener Bewegungen übrig bleibt. Zweitens wurden auch die *mechanischen Vorstellungen* weiter ausgebildet. Vor allem ist hier der von *G. Coriolis* scharf definierte Begriff der Arbeit zu nennen, der sich unter dem Einflusse von *J. V. Poncelet* allgemein eingebürgert hat. In engem Zusammenhange damit steht der Begriff der Energie und die überaus fruchtbare Vorstellung von der beständigen Verwandlung kinetischer und potentieller Energie in einander; vergl. IV 1, No. **46** (*A. Voss*). Nicht weniger wichtig war es, dass *L. Poinsot* als methodisches Hilfsmittel den Begriff des Impulses eingeführt hat, d. h. derjenigen Stosskraft, die die augenblicklich stattfindende Bewegung momentan aus der Ruhe erzeugen könnte[8a]). Weiter ausgebildet wurde die Methode des Impulses in England durch *J. Cl. Maxwell*, sowie durch *W. Thomson* und *P. G. Tait*, und in Deutschland ist sie in neuerer Zeit durch *F. Klein* und *A. Sommerfeld* zur Geltung gebracht worden. Man hat ferner ausgezeichnete Sonderfälle der betrachteten Bewegungen zu finden getrachtet, die sich verhältnissmässig einfach erledigen lassen und von denen aus man eine Einsicht in die Natur des allgemeinen Falles gewinnen kann, Sonderfälle, die, wie *H. Poincaré* von den periodischen Lösungen des Dreikörperproblems sagt, als Bresche dienen können,

8) Genaueres hierüber findet man in IV 2 (*E. H. Timerding*) und IV 11 (*M. Abraham*); Darstellungen der elementaren Mechanik mit starker Verwendung solcher Hilfsmittel gaben *J. Lüroth*, Mechanik, 1881 und Zeitschr. f. Math. u. Phys. 43 (1898), p. 243; *F. Castellano*, Meccanica, 1894, *A. Föppl*, Einführung, 1898, Dynamik, 1899; *K. Heun*, Mechanik, Leipzig 1902; *C. J. Joly*, A manual of quaternions, London 1905.

8a) Der Begriff des Impulses tritt im Grunde schon bei *G. Galilei* als der einem bewegten Körper innewohnende *impetus* auf, und er findet sich deutlich formuliert bei *J. L. Lagrange*, der dafür das Wort *impulsion* gebraucht, *Poinsot* aber bleibt das Verdienst, aus ihm ein elementares methodisches Hilfsmittel für dynamische Untersuchungen gemacht zu haben.

urch die man in das zu erobernde Gebiet eindringt. Endlich hat nan die bei den geometrischen Untersuchungen bewährten *Modelle* enutzt und auch gelegentlich direkt das *Experiment* herangezogen.

Auf diese Weise ist es häufig gelungen, eine befriedigende Erenntnis von der qualitativen Beschaffenheit der Bewegungsvorgänge u gewinnen, und zwar auch bei Problemen, bei denen die Durchührung der Rechnungen in analytischer Strenge wegen der Verwickung der Formeln auf unüberwindliche Hindernisse stösst. Daneben leibt jedoch die Forderung einer quantitativen Diskussion bestehen; enn die Analysis ist und bleibt das schärfste und zuverlässigste Verkzeug zur Prüfung der Ergebnisse der Anschauung und des Exerimentes, und „die Formel liefert schliesslich doch die einfachste nd prägnanteste Beschreibung des Bewegungsvorganges; ausserdem st sie als Grundlage der wirklichen numerischen Ausrechnung unentehrlich"[9]). Bei dem geschilderten Verfahren aber ergiebt sich die 'ormel als die letzte Konsequenz eines gründlichen Verständnisses der nechanischen Vorgänge, das es erst ermöglicht, den der Individualität es Problems entsprechenden analytischen Ansatz aufzufinden. Dabei 'ird man, je nach den Umständen, Formeln entwickeln, die eine nbeschränkte Genauigkeit der numerischen Rechnung gestatten, oder olche, die nur eine beschränkte Genauigkeit gewähren. Unverkennbar st hierbei der Zusammenhang mit der modernen Auffassung des 'roblems der Integration der Differentialgleichungen, die nicht mehr as höchste Ziel darin sieht, die Integration mittels geschlossener usdrücke oder auch durch Quadraturen zu bewerkstelligen, sondern ie durch die Differentialgleichungen definierten Funktionen zu errschen und zu bemeistern.

Ein erheblicher Teil der ausserordentlich zahlreichen, in Lehrüchern und Monographien niedergelegten, in Zeitschriften und Akaemieberichten zerstreuten Untersuchungen aus der Dynamik der unktsysteme und starren Körper, die das 19. Jahrhundert hervorebracht hat, ist von den im Vorhergehenden dargelegten Gedanken eherrscht oder doch beeinflusst. In ihrer Gesamtheit konstituieren iese Untersuchungen eine Disziplin, die man als *elementare Dynamik* ezeichnen kann. Kennzeichnend für die Zugehörigkeit zu ihr ist *ethodisch* die geometrisch-mechanische Anschaulichkeit der Betrachungen und der elementare Charakter des analytischen Apparates, bei

9) *F. Klein* und *A. Sommerfeld,* Theorie des Kreisels, p. 5; vgl. auch 375.

dem man nicht über den Bereich der elementaren Funktionen und der Elemente der Differential- und Integralrechnung hinausgeht, *materiell* aber der Wille zur Vertiefung in einzelne Probleme, die mit der mechanischen Wirklichkeit in Beziehung stehen[9a]). Den Gegensatz dazu bilden diejenigen Untersuchungen aus der Mechanik, die sich im Gebiete von beliebig vielen Veränderlichen ohne bestimmte konkrete Bedeutung bewegen und bei denen alle Hilfsmittel der modernen Analysis zur Verwendung gelangen; in dieser „höheren Dynamik" überwiegt nicht selten das mathematische Interesse. Auf der anderen Seite giebt es eine „elementarste Dynamik", bei der unter Verzicht auf die Benutzung der Infinitesimalrechnung eine Einführung in die Bewegungserscheinungen gesucht wird, wie das zum Beispiel vielfach bei dem Unterrichte in der Physik an den Gymnasien und an den technischen Mittelschulen der Fall ist; hierauf einzugehen, ist an dieser Stelle nicht möglich[10]).

Eine gewisse Schwierigkeit liegt darin, dass sich zwischen elementarer und höherer Dynamik keine scharfe Grenze ziehen läßt; denn schon die strenge Behandlung des Kreispendels führt auf elliptische Funktionen, und dasselbe gilt von den einfachsten Problemen aus der Kinetik des starren Körpers. So kommt es, dass ein Teil der in diesem Artikel behandelten Gegenstände in den Artikeln 11—13 (*P. Stäckel*) dieses Bandes noch einmal zur Besprechung gelangen wird. Bei den Litteraturangaben sind deshalb gelegentlich auch Abhandlungen angeführt worden, in denen höhere mathematische Hilfsmittel benutzt werden; sind doch mittels solcher Hilfsmittel manche Eigenschaften von Bewegungen gefunden worden, die man später auf elementare Art bewiesen hat.

Es würde keinen Zweck haben, im Folgenden die einzelnen Probleme der elementaren Dynamik aufzuzählen, die während des 19. Jahrhunderts behandelt worden sind, vielmehr kann es sich nur darum handeln, charakteristische Beispiele herauszugreifen. Bei der unübersehbaren Fülle der Litteratur und bei dem Mangel an histo-

---

9a) Es lässt sich freilich nicht leugnen, dass diese Beziehung manchmal recht locker ist, denn nicht wenige der sogenannten Anwendungen der elementaren Dynamik sind nichts weiter als Diskussionen idealisierter Probleme, bei denen man nicht einmal von einer *ersten* Annäherung an die Erscheinungen sprechen darf, die in Wirklichkeit stattfinden. Vgl. auch IV 10 (*K. Heun*).

10) Die Ausbildung sogenannter „elementarer Methoden" ist zum Beispiel von *G. Holzmüller* im Interesse des Unterrichtes an den technischen Mittelschulen gepflegt worden (Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung, 2 Bände, Leipzig 1897/98). Für die pädagogischen Fragen siehe Bd. VII.

rischen Vorarbeiten bot diese Auswahl grosse Schwierigkeiten. Wenn sie nicht immer richtig getroffen, wenn so manches Schöne und Wichtige übersehen worden ist, so möge das bei diesem ersten Versuche einer zusammenfassenden Darstellung der elementaren Dynamik Entschuldigung finden.

I. Punktdynamik.

2. Bedeutung der Punktdynamik für die gesamte Mechanik und Physik. Eine aus dem 18. Jahrhundert stammende Auffassung, die für die Mathematiker ihren klassischen Ausdruck in der Mécanique céleste von *P. S. Laplace* findet, stellt der Physik im weitesten Sinne des Wortes die Aufgabe, die Naturerscheinungen zurückzuführen auf unveränderliche, anziehende oder abstossende Kräfte, deren Intensität allein von den Entfernungen der punktförmig gedachten Moleküle abhängt. Diese Auffassung hat bis weit ins 19. Jahrhundert hinein die Physik beherrscht; sie dominiert noch bei *S. D. Poisson*, *G. Lamé*, *B. de Saint-Venant* und hat auch in *H. v. Helmholtz* (Einleitung zu der Schrift über die Erhaltung der Kraft, Berlin 1847) ihren Vertreter gefunden[10a]). Aber schon im 18. Jahrhundert ist man über die *Mechanik der Zentralkräfte* hinausgegangen; einerseits, indem man Systeme mit *kinematischen Bedingungen* betrachtete und die Wirkung der Bedingungen nach dem Vorgange von *J. d'Alembert* durch Reaktionen ersetzte, andrerseits, indem man auch mit solchen Kräften rechnete, die ausser von den Koordinaten der bewegten Punkte von deren Geschwindigkeiten sowie von der Zeit abhängen. Wie die genauere Untersuchung gezeigt hat, sind die Vorgänge, die man mittels dieser verallgemeinerten Kräfte nach den Regeln der Dynamik behandelt, keine reinen Bewegungserscheinungen, vielmehr gehen bei ihnen neben den Ortsveränderungen ponderabler Massen noch andere Veränderungen vor sich: es wird Wärme entwickelt, es treten elektrische und magnetische Induktionserscheinungen auf, es finden chemische Umsetzungen statt. Ob man diese physikalischen Vorgänge durch die Hypothese *verborgener Bewegungen* der Dynamik einordnen kann, möge dahingestellt bleiben, jedenfalls tritt man bei ihnen aus der üblichen Dynamik ponderabler Massen heraus.

10a) In späteren Vorlesungen (Dynamik, p. 24) hat *Helmholtz* seinen Standpunkt etwas verändert; er verlangt, dass die Mechanik die Bewegungen auf immer bestehende, nach unveränderlichen Gesetzen wirkende Ursachen zurückführe, und will als solche nur *reine Bewegungskräfte*, d. h. Kräfte angesehen wissen, die allein von den Koordinaten der bewegten Punkte abhängen.

Beobachtet man zum Beispiel die Bewegung eines physikalischen Pendels, so zeigt sich eine Dämpfung der Schwingungen, die durch sehr verschiedenartige Umstände verursacht wird: die Reibung de Schneide in der Pfanne, die von dem Pendel erregten Luftwellen, das Mitschwingen des Pendelstativs und seiner Unterlage u. s. w.; Genaueres in IV 7 *(Ph. Furtwängler)*. Man erhält jedoch eine Beschreibung des Vorganges, die die Beobachtungen mit befriedigender Genauigkeit darstellt, wenn man neben der reinen Bewegungskraft der Schwere eine Dämpfungskraft einführt, die eine lineare oder noch besser eine quadratische Funktion der Geschwindigkeit ist. Auf diese Weise wird eine Erscheinung, deren verwickelte Ursachen sich der Berechnung entziehen, der mathematischen Behandlung zugänglich gemacht, und es lassen sich so die wirklichen Vorgänge mit grosser Annäherung darstellen. Ebenso hat die Lehre von den erzwungenen Schwingungen auf Probleme Anwendung gefunden, die eigentlich der Elastizitätslehre, der Akustik und der Optik zuzurechnen sind; hier hat man störende Kräfte eingeführt, die in vorgeschriebener Weise von der Zeit abhängen[11]).

Die Kräfte, die man einführt, um Erscheinungen, die sich vom Standpunkte der reinen Dynamik aus nicht in ausreichender Weise erklären lassen, dennoch der dynamischen Betrachtung zu unterwerfen, gehören nach der Terminologie *I. Newtons* zu den sogenannten äusseren oder eingeprägten Kräften. Man unterscheidet nämlich *innere Kräfte*, die aus der Beschaffenheit des Systems selbst hervorgehen, und *äussere Kräfte*, die von aussen hinzugefügt oder eingeprägt worden sind und in keinem notwendigen Zusammenhange mit dem Systeme stehen[11a]). Innere Kräfte sind zum Beispiel die Spannungen bei einem elastischen Körper, die unter sich und mit den Deformationen in einem gesetzmässigen Zusammenhange stehen, während die äusseren Kräfte in ganz willkürlicher Weise hinzutreten können. Solche äusseren Kräfte treten immer auf, wenn man ein unvollständiges System untersucht, das heisst, einen Teil eines Systems für sich betrachtet; die inneren Kräfte des vollständigen Systems werden dann zum Teil äussere Kräfte des unvoll-

11) Vgl. *H. v. Helmholtz,* Dynamik, p. 1, 24, 30, 120.

11a) Vgl. etwa *Ch. E. Delaunay,* Mechanik, p. 198. Im Grunde gehen hier zwei Einteilungen der Kräfte durch einander, die ganz verschiedener Art sind. *Innere Kräfte* nennt man häufig nur die gegenseitigen Wirkungen der Punkte des Systems, die nach dem Gesetze der Aktion und Reaktion erfolgen, und alle anderen Kräfte heissen *äussere Kräfte.* Dagegen stehen den *Reaktionskräften,* die aus der kinematischen Konstitution des Systems hervorgehen, die *eingeprägten* Kräfte gegenüber.

ständigen Systems[12]). Äussere Kräfte dienen aber auch dazu, die Wirkungen physikalischer und chemischer Kräfte zu ersetzen, teils, weil wir diese Kräfte noch nicht genügend durch die Rechnung beherrschen, teils weil es sich um sehr verwickelte Vorgänge handelt, für die man auf diese Art wenigstens eine erste Annäherung zu erhalten hofft[13]). Hierauf beruht es, dass in der erweiterten Dynamik das Gesetz von der Erhaltung der Energie nicht immer gilt; der bei einem unvollständigen Systeme eintretende Gewinn oder Verlust an Energie erklärt sich daraus, dass ausserhalb des Systems Veränderungen vor sich gehen, die diesen Gewinn oder Verlust wieder ausgleichen. Eine ähnliche Aufklärung findet die Tatsache, dass man bei den Problemen der erweiterten Dynamik nicht selten zu Ergebnissen kommt, die als solche keinen physikalischen Sinn haben, dass zum Beispiel bei Schwingungen unendlich grosse Amplituden oder unendlich grosse Geschwindigkeiten auftreten. Hierin liegt immer ein Zeichen, dass man das betrachtete System in geeigneter Weise zu erweitern hat, und der Widerspruch hebt sich, weil man mit der vereinfachten Annahme nur bis in die Nähe der kritischen Stelle, aber nicht bis zu ihr selbst gehen darf[13a]).

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts hat der Anwendungsbereich der Dynamik eine neue Ausdehnung erfahren durch die *mechanischen Analogien physikalischer Erscheinungen*. Die Benutzung

12) Schon *L. Poinsot*, J. de math. (2) 4 (1859), p. 171, hat hervorgehoben, dass es in Wirklichkeit keine festen Punkte, festen Axen, festen Ebenen u.s.w. gebe, dass man es vielmehr in solchen Fällen immer mit unvollständigen Systemen zu tun habe. Zum Beispiel bleibt ein grosser Körper bei Einwirkung einer kleinen Kraft praktisch unbewegt, und bei der Bewegung eines Punktes auf einer festen krummen Fläche hat man es dem entsprechend mit einem kleinen Körper zu tun, der auf der Oberfläche eines grossen Körpers gleitet, und auf den eine so kleine Kraft wirkt, dass sie trotz der Reaktion den grossen Körper praktisch unbewegt lässt. Es möge auch darauf hingewiesen werden, dass die *Hertz*sche Mechanik nur Kräfte kennt, die von den Bedingungen der Systeme herrühren; die eingeprägten Kräfte werden bei *H. Hertz* durch die Einführung verborgener Bewegungen eliminiert.

13) Vgl. *A. Föppl*, Einführung in die *Maxwell*sche Theorie der Elektrizität, 2. Aufl., bearbeitet von *M. Abraham*, Leipzig 1905, p. 196, und *E. Mach*, Mechanik, 5. Kapitel. *Mach* betont hier, dass es keine rein mechanischen Vorgänge gebe, jeder Vorgang gehöre genau genommen allen Gebieten der Physik an, die nur durch eine teils konventionelle, teils physiologische, teils historisch begründete Einteilung getrennt seien.

13a) Deshalb darf man zum Beispiel nicht fragen, was geschehen würde, wenn ein Atom in ein Anziehungszentrum gerät, wie das *L. Euler* und *P. S. Laplace* getan haben; vergl. *A. Hall*, Messenger of math. (2) 3 (1874), p. 144 und *A. Cayley*, ebenda p. 149.

solcher Analogien war bereits in der Dynamik selbst vorbereitet worden. So hat man statt der verwickelten Bewegung eines fallenden schweren Körpers zunächst die einfachere Bewegung seines Schwerpunktes betrachtet, und in ähnlicher Weise bei der Bewegung der Planeten um die Sonne zunächst die Bahnen ihrer Schwerpunkte untersucht. Ebenso wurden die Schwingungen eines schweren starren Körpers um eine horizontale Axe ersetzt durch die Bewegung eines einzigen Punktes, des Schwingungsmittelpunktes, und später allgemeiner die Bewegung eines starren Körpers unter der Einwirkung beliebiger Kräfte durch die Bewegung eines Systems von vier starr verbundenen Massenpunkten (Massenreduktion)[14]. Um die Bewegungen von Systemen mit einem oder mit zwei Graden der Freiheit zu beschreiben, hat man sich eines *repräsentierenden Punktes* bedient, der auf einer Kurve oder einer Fläche bleibt, und bei drei Graden der Freiheit leistet unter Umständen ein im Raume frei beweglicher Punkt dieselben Dienste. Man kann sogar die Bewegung irgend eines Systemes mit einer endlichen Anzahl n von Graden der Freiheit auf die Bewegung eines einzigen Punktes zurückführen, wenn man sich der Sprache der n-dimensionalen Geometrie bedient, die ein System von n Grössen als Punkt einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit bezeichnet (*Lagrange*sche Räume)[15]. Es ist bemerkenswert, dass diese Auffassung jetzt sogar in die Lehrbücher der elementaren Dynamik übergeht[16]. Von anderer Art, aber nicht minder wichtig, sind die Analogien zwischen Problemen der Statik und der Kinetik, zum Beispiel die Beziehungen zwischen den Gleichgewichtsgestalten von Fäden und den Bahnkurven eines Punktes auf einer Fläche (vgl. Nr. 11 dieses Artikels), zwischen der Gleichgewichtsgestalt eines elastischen Stabes und der Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt, zwischen der Biegung von Stäben und hydrodynamischen Problemen. Auch in der Physik selbst ist man auf zahlreiche Analogien zwischen den Erscheinungen in den verschiedenen Gebieten aufmerksam geworden; es hat sich als sehr nützlich erwiesen, die Begriffe der verschiedenen Gebiete mit einander zu vergleichen und diese gewissermassen auf einander abzubilden, indem man für jeden Begriff des einen den entsprechenden des anderen suchte. Man kann dann aus den Lösungen von Aufgaben des einen Gebietes

14) Vgl. IV 4, Nr. 29 (*G. Jung*), dazu *C. Chelini*, Giorn. di mat. 12 (1874), p. 201; *G. Bardelli*, Ist. Lomb. Rend. (2) 7 (1874), p. 249, sowie neuerdings *R. Skutsch*, Berlin Math. Ges. Ber. 4 (1905), p. 54.

15) Ausführliche Darstellung bei *P. Stäckel*, Bericht über die Mechanik mehrfacher Mannigfaltigkeiten, Jahresber. d. D. M.-V. 12 (1903), p. 469.

16) So bei *A. G. Webster*, Dynamics, Leipzig 1904.

die Lösungen von Aufgaben des anderen ableiten. Zusammenstellungen solcher Analogien haben zum Beispiel *J. Larmor* und *L. Boltzmann* gegeben[17]).

Der Gedanke, *mechanische Analogien* zur Erforschung physikalischer Erscheinungen zu benutzen, stammt von *J. Cl. Maxwell*, der im besonderen auf diesem Wege zu seinen Fundamentalgleichungen des Elektromagnetismus gelangt ist[18]). *Maxwell* verzichtet auf die genaue Erkenntnis des wirklichen Vorganges und ersetzt diesen durch einen Mechanismus, der in gewisser Beziehung dasselbe leistet. So konstruierte er, in Gedanken, aus Flüssigkeitswirbeln und Friktionsrollen, die sich im Innern von Zellen mit elastischen Wänden bewegen, ein mechanisches Modell für die elektromagnetischen Erscheinungen; er hat aber auch für einzelne Phänomene die Modelle wirklich hergestellt, und *L. Boltzmann* und andere sind ihm darin gefolgt[19]). Man kann aber auch, wie es *Maxwell* und besonders *J. J. Thomson*[20]) nach ihm taten, davon absehen, die „dynamische Illustration" ins Detail auszumalen, und sich damit begnügen, die kinetische Energiefunktion so zu konstruieren, dass man dieselben Differentialgleichungen erhält, die das mechanische Modell liefert, also allgemeine *Lagrange*sche Gleichungen. Die Positionskoordinaten in diesen Gleichungen bekommen dann eine physikalische Bedeutung und werden dementsprechend als elastische, thermische, elektrische, magnetische, chemische Parameter bezeichnet. So gewinnen die allgemeinen *Lagrange*schen Gleichungen eine universelle Bedeutung für die ganze Physik. Dabei ist zu beachten, dass es für einen Vorgang, wenn überhaupt ein mechanisches Bild existiert, unzählig viele mechanische Bilder giebt[20a]). Die Punktdynamik erhält so die neue Aufgabe, der Physik brauchbare Bilder zur Verfügung zu stellen, und es erscheint die Hoffnung berechtigt,

---

17) *J. Larmor*, London Math. Soc. Proc. 15 (1884), p. 158 und *L. Boltzmann*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Heft 69, Leipzig 1895, p. 101—102.

18) Cambridge Phil. Trans. 10 (1855) = Scientif. papers 1, p. 157; Phil. Mag. (4) 21 (1861) u. 23 (1862) = Scientif. papers 1, p. 451.

19) Katalog mathematischer .... Instrumente, herausgegeben von *W. v. Dyck*, München 1892, p. 89; *H. Ebert*, Magnetische Kraftfelder, Leipzig 1897, 2. Aufl. 1905.

20) *J. Cl. Maxwell*, London Phil. Trans. 155 (1865) = Scientif. papers 1, p. 526; London Math. Soc. Proc. 3 (1871) = Sc. papers 2, p. 257; London Math. Soc. Proc. 4 (1893), p. 334 = Sc. papers 2, p. 600; Treatise on electricity and magnetism, Oxford 1873; *J. J. Thomson*, Application, London 1886.

20a) *H. Poincaré*, Électricité et optique, 1, Paris 1890, deutsch von *W. Jäger* und *E. Gumlich*, 1, Berlin 1891; *L. Boltzmann*, Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes, 1, Leipzig 1891.

dass, ebenso wie einst die ganz abstrakt entwickelte Lehre von den Kegelschnitten in der Astronomie Verwendung gefunden hat, in Zukunft einmal manche scheinbar rein theoretische Untersuchungen der Punktdynamik zur Darstellung physikalischer Erscheinungen dienen werden.

Freilich darf man die Wichtigkeit der mechanischen Analogien nicht überschätzen. Es lässt sich nicht leugnen, dass sie nur einen Teil des Zusammenhanges zwischen den Tatsachen wiedergeben, gewissermassen nur die gröberen Züge, während die Feinheiten fehlen. Das zeigt sich schon in der Dynamik selbst, denn die *Lagrange*schen Gleichungen zwischen den n Parametern, durch die die Lage eines Systems mit n Graden der Freiheit festgelegt wird, sind nur ein Ausdruck für die Eigenschaften, die grossen Klassen „dynamisch äquivalenter Probleme“ gemeinsam sind, man abstrahiert aber von den Erscheinungen, die für die einzelnen Probleme charakteristisch sind, zum Beispiel treten dabei gar nicht die Drucke auf, die aus den Bedingungen eines Systems hervorgehen. Mit der Integration jener Gleichungen zwischen den n Parametern oder mit der Ermittlung der Bewegung des „darstellenden Punktes“ ist daher auch in der Dynamik die Lösung einer Aufgabe keineswegs erschöpft[20b]).

A. Allgemeine Theorie.

a) Der einzelne Punkt.

3. Fundamentale Begriffe. Die *Lage* eines materiellen Punktes P von der Masse m zur Zeit t werde durch seine cartesischen Koordinaten x, y, z in Bezug auf ein im Raume festes Koordinatensystem bestimmt[21]). Werden x, y, z als Funktionen der Zeit aufgefasst, so erhält man in Parameterdarstellung die *Bahn* (Bahnkurve, Trajectorie) des Punktes. Die Ableitungen $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ von x, y, z nach t sind die Komponenten eines Vektors, dessen Richtung mit der Tangente der Bahn im Punkte P übereinstimmt. Unter der *Geschwindigkeit* des Punktes zur Zeit t versteht man teils diesen Vektor $\mathfrak{v}$ selbst, teils dessen

20b) Vgl. auch für diese ganze Nummer *P. Duhem,* L'évolution de la mécanique, Paris 1905.

21) Vgl. IV 1, Nr. **11**, **13**, **14**, **22**, **23** (*A. Voss*) sowie die inzwischen erschienene Abhandlung: Der Begriff des materiellen Punktes in der Mechanik des 18. Jahrhunderts von *Th. Körner,* Bibl. math. (3) 5 (1904), p. 15. Noch *L. Euler* (Mechanica, Petersburg 1736) und *J. d'Alembert* (Dynamique, Paris 1743) haben überall „natürliche Koordinaten“ gebraucht; die prinzipielle Einführung der cartesischen Koordinaten x, y, z stammt von *C. Maclaurin,* A complete system of fluxions, Edinburgh 1742, art. 465, 469, 884.

Länge v[22]). Verlegt man die Anfangspunkte von $\mathfrak{v}$ in den Anfangspunkt der Koordinaten, so beschreiben die Endpunkte eine Kurve, die schon *A. F. Möbius*[23]) betrachtet und die dann *W. R. Hamilton*[24]) als *Hodographen*[25]) bezeichnet hat. Der *Bewegungszustand* des Punktes zur Zeit t[26]) wird charakterisiert durch die Angabe seines Ortes P und des zugehörigen Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$. Der betrachteten Bewegung wird so eine „tangierende Bewegung" mit gleichförmiger Geschwindigkeit zugeordnet; eine weitere Annäherung würde eine „Schmiegungsbewegung" sein, die mit gleichförmiger Beschleunigung vor sich geht[27]); die Astronomen gebrauchen den Ausdruck „oskulierende Bewegung" in einer anderen Bedeutung, siehe Bd. VI, Teil 2.

Würde man den materiellen Punkt zur Zeit t sich selbst überlassen, so würde er von P aus in der Tangente der Bahn mit der Geschwindigkeit v weiter gehen; dagegen ändert sich der Vektor $\mathfrak{v}$, wenn der Punkt einer Einwirkung von aussen her unterworfen ist, die entweder ein *momentaner Stoss* $\mathfrak{S}$ oder eine *kontinuierlich wirkende Kraft* $\mathfrak{F}$ sein kann[28]). Ein momentaner Stoss wird, als Vektor-

22) *Fr. Slate,* Mechanics, 1900, hat vorgeschlagen, dem entsprechend zwischen velocity (Geschwindigkeit) und speed (Schnelligkeit) zu unterscheiden.

23) Mechanik des Himmels, Leipzig 1843 = Werke 4, Leipzig 1887, p. 36 und 47. *Möbius* hat den Hodographen mit Erfolg bei der Untersuchung der Bewegung der Planeten verwendet.

24) Dublin Irish Trans. 3 (1846), p. 345; Elements of Quaternions, London 1866, p. 100, 118.

25) Über den Hodographen siehe auch: *R. Pröll,* Versuch einer graphischen Dynamik, Leipzig 1874; *G. Helm,* Zeitschr. Math. Phys. 25 (1880), p. 217; *O. Gerlach,* Diss. Rostock 1888; *A. Laisant,* Jorn. de sc. mat. e astr. 10 (1891), p. 97; *R. Mehmke,* Jahresber. d. D. M.-V. 12 (1903), p. 561.

26) Dieser Ausdruck scheint von *F. Redtenbacher* zu stammen, Prinzipien der Mechanik und der Maschinenlehre, Mannheim 1852, 2. Aufl. 1859, p. 8 und: Das Dynamidensystem, Mannheim 1857, p. 10. Er ist vielleicht eine Verdeutschung des französischen Wortes *régime.*

27) *O. Staude,* Math. Ann. 41 (1893), p. 219.

28) Während *R. Descartes* keine anderen Kräfte als *Stosskräfte* zulassen wollte, die bewegten Körpern eigentümlich sind, hatte die Schule *I. Newtons* alles auf *Fernkräfte* zurückzuführen versucht. Dieser Gegensatz, der für die ganze neuere Physik von fundamentaler Bedeutung ist, tritt auch bei der Mechanik des 19. Jahrhunderts in die Erscheinung. So haben *S. D. Poisson* und *J. V. Poncelet* die Benutzung von Stosskräften gänzlich verworfen, da es in Wirklichkeit keine momentanen Kräfte gebe, und auch *E. Mach,* Mechanik, p. 360 erklärt: Es gibt keine Momentankräfte. Dem gegenüber machten *W. Clifford* und *L. Boltzmann* geltend, dass diskontinuierliche Vorgänge mit der Erfahrung sehr wohl vereinbar seien. Diese Streitigkeiten werden hinfällig, wenn man alle Kräfte nur als „Bilder" ansieht, für deren Wahl Gründe der Zweckmässigkeit massgebend sind. In dem Sinne der Präzisionsmathematik giebt es, wie es schon

grösse, gemessen durch das Produkt aus der Masse m des Punktes und der durch ihn verursachten Änderung $\Delta\mathfrak{v}$ des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$:

$$\mathfrak{S} = m \cdot \Delta\mathfrak{v}.$$

Eine kontinuierlich wirkende Kraft $\mathfrak{F}$ wird als Vektorgrösse gemessen durch das Produkt der Masse m und der durch sie verursachten Beschleunigung $d\mathfrak{v}/dt$, die wie $\mathfrak{v}$ ein Vektor ist:

$$\mathfrak{F} = m \cdot \frac{d\mathfrak{v}}{dt}.$$

In demselben Sinne, in dem die Differentialrechnung als die Grenze der Differenzenrechnung erscheint, lässt sich die Wirkung einer kontinuierlich wirkenden Kraft $\mathfrak{F}$ auffassen als die Grenze der Wirkung einer Reihe von Stössen der Grösse $\mathfrak{F}\Delta t$, die in den Zeitintervallen Δt erfolgen; umgekehrt erscheint die Stosskraft $\mathfrak{S}$ als die Grenze der Gesamtwirkung einer sehr grossen, in dem sehr kleinen Zeitraume $\Delta t = (t_0 \ldots t_1)$ wirkenden kontinuierlichen Kraft $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{S} = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}\, dt;$$

vgl. IV 1, Nr. 24 (*A. Voss*).

Damit der in P ruhende Punkt momentan die zur Zeit t herrschende Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ erhält, muss auf ihn eine vektorielle Stosskraft $m\mathfrak{v}$ ausgeübt werden, deren Komponenten $m\dot{x}$, $m\dot{y}$, $m\dot{z}$ sind. Die skalare Grösse (der Betrag) dieser Stosskraft wird nach *R. Descartes*[29]) *Bewegungsgrösse* (quantité de mouvement) genannt, während die vektorielle Stosskraft $m\mathfrak{v} = \mathfrak{J}$ als *Impuls*[30]) bezeichnet wird. Der

---

I. Kant (Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaften, Riga 1786) formuliert hat, keinen Uebergang vom Kontinuierlichen zum Diskontinuierlichen, zwischen Stössen und stetig wirkenden Kräften ist also keine Vermittlung möglich. Stellt man sich dagegen auf den Standpunkt der Approximationsmathematik, so verschwindet der prinzipielle Unterschied zwischen stetig und unstetig; vergl *F. Klein*, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Leipzig 1902.

29) *R. Descartes*, Lettres, 1. p. 332; 2. p. 413; Principia philosophiae, 1643, 2, art. 36; vgl. auch *I. Newton*, Principia, Lib. I, definitio 2. Vgl. auch IV 1, Nr. 24 (*A. Voss*) und *T. Levi-Civita*, Meccanica, p. 410—420.

30) Freilich giebt es noch keinen festen Gebrauch dieser Ausdrücke. *A. Föppl*, Einführung, 1. Aufl. S. 15, nennt den *Vektor* $m\mathfrak{v}$ „Bewegungsgrösse". Die englischen Mathematiker sagen, wohl nach dem Vorgange von *W. Thomson* und *P. G. Tait* (Treatise, 2. ed. 1, p. 221), vielfach statt Impuls: momentum (= movimentum, das Bewegung Hervorrufende); die Komponenten des Impulses heissen dem entsprechend the moments of momentum. *H. Hertz* sagt statt Impuls: Moment. Es ist störend, dass das Wort Impuls in zwei Bedeutungen gebraucht

Bewegungszustand zur Zeit t lässt sich daher auch durch die Angabe der Lage und des Impulses $\mathfrak{J}$ charakterisieren. Wenn auf den Punkt äussere Kräfte wirken, ändert sich der Impuls so, dass seine Änderung gleich ist dem von den äusseren Kräften hervorgerufenen endlichen oder unendlich kleinen Stosse, oder der Impuls $\mathfrak{S}$ oder $\mathfrak{F}dt$ setzt sich mit dem Impulse des Bewegungszustandes $\mathfrak{J}$ nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammen.

Bei Aufgaben aus der physikalischen und der technischen Praxis ist es unerlässlich, die vorhergehenden Betrachtungen durch die Angabe der *Einheiten* zu ergänzen, deren Theorie *C. Runge* in V 1 entwickelt hat[31]). Hier genüge es zu bemerken, dass man als Einheit der Länge das Zentimeter, als Einheit der Zeit die Sekunde zu wählen pflegt. Als Einheit der Kraft wird in dem technischen Masssystem das Gewicht einer bestimmten Masse, etwa des Normalkilogramms unter der Normalschwere gewählt, wodurch dann die Einheit der Masse festgelegt ist[31a]). Dagegen wird in dem sogenannten absoluten Masssystem als dritte Einheit die Einheit der Masse genommen. Gegenwärtig nimmt man dafür das Gramm[32]); damit ist dann die Einheit der Kraft, *Dyne*, festgelegt, und es ist z. B. das Gewicht von 1 kg Masse eine Kraft von etwa 981 000 Dynen.

4. Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung. Für die freie Bewegung eines materiellen Punktes P (x, y, z) der Masse m, auf den die kontinuierliche Kraft $\mathfrak{F}$ mit den Komponenten

---

wird, nämlich auch noch in der allgemeineren Bedeutung einer Stosskraft, sodass es sich vielleicht empfehlen würde, *Impuls des Bewegungszustandes* zu sagen. Endlich möge noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass die in dem Texte dargelegte Auffassung eine mathematische und psychologische, aber keine physikalische oder metaphysische ist, vgl. *J. Petersen,* Nyt Tidsskrift 12 (1901), p. 25. Ebensowenig hat mit dem Begriffe des Impulses die Frage etwas zu tun, ob die in Wirklichkeit stattfindenden Bewegungen einmal durch einen „Anfangsstoss" entstanden sind, wie das *I. Newton* für die Planetenbewegung postuliert hat.

31) Vergl. auch Z. d. Vereins deutscher Ingenieure 49 (1905), p. 1299.

31a) Wenn auch schon *S. Stevin* (1586) und *P. Varignon* (1687) über den alten Pondusbegriff hinausgegangen waren, so ersetzten doch noch die Mathematiker des 18. Jahrhunderts, wie *L. Euler* und *J. d'Alembert,* die Kräfte ohne weiteres durch Gewichte. Ebenso verfahren auch *H. B. Lübsen,* Mechanik, 1, Leipzig 1858, p. 5: „Die Annahme abstrakter Kräfte hat für den Anfänger etwas Anstössiges", und *A. Clebsch,* Vorträge über Elementarmechanik, Karlsruhe 1858/59: „Ist die angewandte Kraft gleich P Kilogramm".

32) *C. F. Gauss,* Intensitas vis magneticae ad mensuram absolutam revocata, Gött. Abh. 1832 = Werke 5, p. 81 = Ostwalds Klassiker, Heft 53; bei *Gauss* findet sich aber auch das technische Mass.

X, Y, Z wirkt, gelten die Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z;$$

X, Y, Z können dabei Funktionen von x, y, z; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$; t sein[32a]). Die Gleichungen (1) lassen sich auch in die eine vektorielle Gleichung

$$(1') \qquad m\ddot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{F}$$

zusammenfassen, in der $\mathfrak{r}$ den von einem festen Punkte nach P gezogenen Vektor und $\mathfrak{F}$ die als Vektor aufgefasste Kraft bedeutet.

Ist der Punkt an eine krumme Fläche $f(x, y, z) = 0$ gebunden, so liefert das *d'Alembert*sche Prinzip die Gleichungen:

$$(2) \qquad m\ddot{x} = X + R\alpha, \quad m\ddot{y} = Y + R\beta, \quad m\ddot{z} = Z + R\gamma,$$

in denen α, β, γ die Richtungscosinus der Flächennormale im Punkte P bezeichnen, während R die Grösse des Druckes angiebt, den der Punkt auf die Fläche senkrecht zu dieser ausübt; diesem Drucke entspricht eine gleich grosse entgegengesetzt gerichtete Reaktion der Fläche. Die Gleichungen (2) gelten nur unter der Voraussetzung, dass die Wirkung der Fläche mit dieser Reaktion erschöpft ist, sonst kommen noch Reibungskräfte hinzu, vgl. Nr. 6 dieses Artikels.

Ist der Punkt an eine Kurve gebunden, die durch die Gleichungen $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$ dargestellt wird, so findet man unter denselben Voraussetzungen wie bei (2) die Differentialgleichungen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + R_1\alpha_1 + R_2\alpha_2, \quad m\ddot{y} = Y + R_1\beta_1 + R_2\beta_2, \\ m\ddot{z} &= Z + R_1\gamma_1 + R_2\gamma_2; \end{aligned}$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ bedeuten die Richtungscosinus der Normalen der Flächen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, während R_1 und R_2 Drucke in der Richtung der betreffenden Normalen, also senkrecht zur Kurve sind.

32a) Die Masse m wird im allgemeinen als konstant angesehen, es giebt aber auch Fälle, in denen man m als bekannte Funktion der Zeit ansieht. Beispiele hierfür sind die Bewegung eines Wagens, bei dem Personen auf- und abspringen oder aus dem beständig Sand herausfällt, die Bewegung eines Planeten, dessen Masse durch das Auftreffen von Meteoriten eine beständige Vergrösserung erfährt, vergl. *C. G. J. Jacobi*, Dynamik 1842/43, p. 57; *W. Thomson*, Phil. Mag. (4) 31 (1866), p. 533; *H. A. Newton*, Am. J. of Science 30 (1885), p. 409; *H. Gyldén*, Astr. Nachr. 109 (1884), p. 1, *J. Meschtscherskij*, Dynamik des Punktes mit veränderlicher Masse (russisch), 1897 (F. d. M. 28 (1897), p. 645, wo sich auch weitere Litteraturangaben finden) sowie Astr. Nachr. 132 (1893), p. 129, 159 (1902), p. 229; *R. Lehmann-Filhés*, Astr. Nachr. 145 (1898), p. 353; *E. Strömgreen*, Astr. Nachr. 163 (1903), p. 129. In der modernen elektromagnetischen Mechanik wird zwischen longitudinaler und transversaler Masse unterschieden und die Masse als Funktion der Geschwindigkeit angesehen, vergl. etwa *M. Abraham*, Ann. der Phys. (4) 10 (1903), p. 105.

Nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammengesetzt ergeben sie den Druck des Punktes auf die Kurve und damit die gleich grosse, aber entgegengesetzt gerichtete Reaktion der Kurve.

Auf eine wesentlich andere Art gebundener Bewegungen eines Punktes ist man durch die Mechanik der starren Körper geführt worden. Bei dem Rollen starrer Körper auf einander (vergl. den zweiten Abschnitt dieses Artikels) ergeben sich nämlich zwischen den Koordinaten eines repräsentierenden Punktes Bedingungsgleichungen der Form:

$$(4) \qquad p(x, y, z)dx + q(x, y, z)dy + r(x, y, z)dz = 0,$$

bei denen die linke Seite nicht auf die Gestalt

$$g(x, y, z)df(x, y, z)$$

gebracht werden kann. Derartige Fälle waren schon früher vereinzelt aufgetreten[33]), aber erst *A. Voss* hat sie systematisch behandelt[34]). Später hat *H. Hertz* die physikalische Bedeutung dieses Ansatzes hervorgehoben und vorgeschlagen, diejenigen Probleme, bei denen die Bedingungsgleichungen auf die Form $df(x, y, z) = 0$ gebracht werden können, als *holonome*, zu bezeichnen, während er die Bedingungsgleichung (4) *nichtholonom* nennt[35]). Als Differentialgleichungen der Bewegung ergeben sich bei dem nichtholonomen Probleme:

$$(5) \qquad m\ddot{x} = X + \lambda p, \quad m\ddot{y} = Y + \lambda q, \quad m\ddot{z} = Z + \lambda r,$$

wo λ einen Multiplikator bedeutet; aus den Gleichungen (4) und (5) hat man x, y, z und λ als Funktionen der Zeit zu bestimmen.

---

33) Probleme des Rollens sind schon im 18. Jahrhundert von *L. Euler*, Petersburg Comment. 7 ad annos 1734/35, p. 99; *J. d'Alembert*, Dynamique, 1743; *Joh. Bernoulli*, Opera 4, 1752, p. 296 behandelt worden, allein bei ihnen enthielt die Bedingungsgleichung des Rollens nur eine oder zwei Veränderliche, sodass die in der Gleichung (4) liegende Schwierigkeit wegfiel. Auch bei den später, zum Beispiel von *S. D. Poisson*, Mécanique 2, untersuchten Fällen ergab sich nichts Neues, da man sich auf kleine Schwingungen beschränkte; vergl. *F. Klein*, Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 260. Andrerseits treten nichtintegrable Bedingungsgleichungen schon bei *J. L. Lagrange* auf, in dessen Mécanique, 1, Partie I, Sektion 4 es ausdrücklich heisst: il n'est pas nécessaire, que $L, M, \ldots$ soient les variations exactes de $x, y, z, dx, dy, dz \ldots$, während *Lagrange* freilich an anderen Stellen, wo von Bedingungen die Rede ist, stillschweigend annimmt, dass sie sich in Form endlicher Gleichungen darstellen lassen. Vergl. ferner *M. Ostrogradskij*, St Pétersbourg, Mém. de l'acad. (6) 1 (1834), p. 565; *N. M. Ferrers*, Quart. J. of math. 12 (1873), p. 1.

34) Math. Ann. 25 (1885), p. 258, dazu *J. König*, Math. Ann. 41 (1888), p. 42; vgl. auch Nr. 16 dieses Artikels.

35) Mechanik, p. 91. Hiernach sind Probleme mit einer oder mit zwei Veränderlichen stets holonom.

Gleichungen der Form (2), (3), (5) gelten auch, wenn in den Bedingungsgleichungen die Zeit vorkommt; diese ist bei den nach dem *d'Alembert*schen Prinzipe auszuführenden Differentiationen als konstant anzusehen.

Statt holonomer oder nicht holonomer Bedingungsgleichungen können auch Bedingungsungleichheiten auftreten; auch können Bedingungen plötzlich fortfallen oder plötzlich durch andere ersetzt werden. Nachdem bereits früher solche Fälle behandelt worden waren, hat, durch *E. Study* angeregt, *A. Mayer*, vom *Gauss*schen Prinzipe des kleinsten Zwanges ausgehend, dargelegt, wie man hier die Bewegung des Punktes in allen Fällen bestimmen kann[36]).

Es gewährt nicht selten Vorteil, die cartesischen Koordinaten x, y, z durch drei unabhängige Veränderliche (Parameter) q_1, q_2, q_3 auszudrücken, die auch Positionskoordinaten oder verallgemeinerte (generalisierte) Koordinaten heissen; vgl. IV 1, Nr. 37 (*A. Voss*)[37]).

Die Gleichungen (1), (2), (3), (5) gehen dabei in Differentialgleichungen zweiter Ordnung für q_1, q_2, q_3 über, die man als *allgemeine Lagrangesche Gleichungen* bezeichnet. Bei der Bewegung auf einer Kurve oder einer Fläche gelingt es vielfach, die Parameter so zu wählen, dass die Bedingungsgleichungen identisch erfüllt sind, wenn zwei bez. ein Parameter einen konstanten Wert erhalten. Von den *Lagrange*schen Gleichungen dienen alsdann zwei bezw. eine zur Bestimmung der Reaktionen, während die übrigen in Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die variablen Parameter übergehen. Es ist ein weit verbreitetes Missverständnis, dass man ausschliesslich

36) *J. Fourier*, J. éc. pol. 5 (1798) = Oeuvres 2, p. 488; *A. Cournot*, Bull. de Férussac 8 (1827), p. 165; *C. F. Gauss*, J. f. Math. 4 (1829), p. 234 = Werke 5, p. 27; *M. Ostrogradskij*, St. Pétersbourg Mém. (6) 1 (1834), p. 565, Mém. Classe math. phys. 1 (1838), p. 129; *C. G. J. Jacobi*, Vorlesungen über Dynamik, 1847/48, Heft von *W. Scheibner*, p. 83; *A. Ritter*, Dissertation Göttingen 1853; *N. Bugajeff*, Mechanik (russisch), 1, Petersburg 1871; *J. W. Gibbs*, Am. J. of. math. 2 (1879), p. 49; *D. Bobylew*, Mechanik (russisch), 1885; *L. Henneberg*, J. f. Math. 113 (1894), p. 179; *J. Farkas*, Ungar. Ber. 12 (1894), p. 263, 15 (1898), p. 25; *L. Boltzmann*, Mechanik 1 (1897), p. 223, 230; *A. Mayer*, Leipzig Ber. 51 (1899), p. 224, 245; *E. Zermelo*, Gött. Nachr. 1899, p. 306; *P. Appell*, Mécanique 1, p. 269; *O. Schütt*, Diss. Kiel 1905; *G. K. Sousloff*, Moskau, Math. Samml. 25 (1905), p. 375. Vergl. auch IV 1 (*A. Voss*) und die Anmerkungen 167 und 179.

37) Vgl. dazu *H. W. Watson* und *H. S. Burbury*, A treatise on the application of generalized coordinates to the kinetics of a material system, Oxford 1879, und *P. Appell*, Mécanique, 1, chap. XVI; *L. Boltzmann* (Prinzipe, 2, p. 16) nennt die Koordinaten q_α skleronom oder rheonom, je nachdem die Bedingungsgleichungen zwischen den cartesischen Koordinaten die Zeit nicht enthalten oder enthalten.

die letzteren Gleichungen betrachtet, die von der *Jacobi*schen Schule auch als *Lagrange*sche Gleichungen zweiter Art bezeichnet werden.

Die Differentialgleichungen für die Parameter q_α kann man nach *Lagrange* sofort herstellen, wenn man die Ausdrücke für die lebendige Kraft und die virtuelle Arbeit kennt, sie haben nämlich die Gestalt:

$$\text{(L)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha;$$

hierin bedeutet T die lebendige Kraft des materiellen Punktes:

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \tfrac{1}{2}\sum a_{\alpha\beta}\,\dot{q}_\alpha\,\dot{q}_\beta,$$

während die Q_α als die Koeffizienten der δq_α in dem Ausdrucke der virtuellen Arbeit

$$\delta W = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \sum Q_\alpha \delta q_\alpha$$

definiert sind. Die Q_α werden auch als die *Komponenten* oder *Koordinaten der verallgemeinerten Kraft* bezeichnet. Die Koordinaten Q_α der verallgemeinerten Kraft haben nicht immer die Dimensionen einer Kraft im gewöhnlichen Sinne des Wortes, wohl aber die $Q_\alpha \delta q_\alpha$ immer die Dimensionen der Arbeit; ist z. B. q_α ein Winkel, so hat Q_α die Dimension eines Drehmomentes[37a]). Die Ausdrücke

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

heissen die *Koordinaten des verallgemeinerten Impulses.*

Bei dieser Auffassung besagen die Gleichungen (L), dass die Änderung des Impulses sich zusammensetzt aus der während des Zeitelementes dt wirkenden Stosskraft mit den Koordinaten $Q_\alpha dt$ und einer Kraft mit den Koordinaten $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}dt$, die von der Änderung des instantanen Axenkreuzes während des Zeitelementes dt herrührt. Hat man zum Beispiel Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

37a) Schon *J. L. Lagrange* bezeichnet die Q_α als Kraftkomponenten oder auch unmittelbar als Kräfte, was gelegentlich zu Missverständnissen Anlass gegeben hat. Das Wort „Koordinate" wird hier, wohl nach dem Vorgange von *F. Klein,* in dem Sinne *A. Plückers* gebraucht, der unter Koordinate jegliche Grösse versteht, die dazu verhilft, ein Objekt mathematischer Betrachtung festzulegen. Dieses Objekt, das System der Grössen Q_α, *Vektor* zu nennen, wie es *H. Hertz,* Mechanik, p. 137 vorgeschlagen hat, erscheint nicht als zweckmässig. Vielmehr wird man, hier wie bei den Koordinaten der verallgemeinerten Geschwindigkeit und des verallgemeinerten Impulses, zwischen den *Elementargrössen,* die bei einem materiellen Punkte und gewöhnlichen cartesischen Koordinaten auftreten, und den *Systemgrössen,* die sich bei beliebigen Positionskoordinaten ergeben, scharf zu unterscheiden haben.

so wird

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2), \quad \delta W = R\delta r + \Phi\delta\varphi,$$

und die *Lagrange*schen Gleichungen lauten:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = R, \quad mr^2\ddot{\varphi} = \Phi.$$

Das Glied $mr\dot{\varphi}^2$ bedeutet hier die Zentrifugalkraft, die den wirkenden Kräften hinzuzufügen ist, wenn man die Bewegung des Punktes auf dem beweglichen Radiusvector betrachten will; vergl. *Fr. Slate*, Mechanics 1, p. 42 und *A. G. Webster*, Dynamics, p. 119.

5. Diskussion der Differentialgleichungen der Bewegung. Die Integration der Differentialgleichungen (1) ergiebt x, y, z als Funktionen der Zeit, die sechs Integrationskonstanten enthalten. Diese Konstanten können durch Anfangsbedingungen bestimmt werden, indem der Bewegungszustand des Punktes zu einer Anfangszeit t_0 gegeben wird; vgl. auch IV 1, Nr. 21 (*A. Voss*)[38]. *Erste Integrale* der Differentialgleichungen (1) heissen Gleichungen der Form

$$F(x, y, z;\ \dot{x}, \dot{y}, \dot{z};\ t) = \text{const.}$$

von der Beschaffenheit, dass $\frac{dF}{dt}$ vermöge der Gleichungen (1) identisch verschwindet. Hat man sechs von einander unabhängige erste Integrale ermittelt, so ergeben sich daraus x, y, z als Funktionen von t und sechs willkürlichen Konstanten, und die Integration ist vollendet.

Theoretisch ist es stets möglich, sechs erste Integrale zu ermitteln, indem man zum Beispiel Reihenentwicklungen zu Hilfe nimmt. Wenn man aber sagt, dass es bei den Gleichungen (1) ein erstes Integral gebe, so meint man damit meistens, dass sich eine Funktion $F(x, y, z;\ \dot{x}, \dot{y}, \dot{z};\ t)$ angeben lässt, die in einfacher Weise aus elementaren Funktionen ihrer Argumente aufgebaut ist, wobei häufig auch noch die Operation der Quadratur zugelassen wird, und in weiten Kreisen, besonders unter den Physikern, ist das Vorurteil verbreitet, als ob bei Problemen, die sich nicht in einer solchen „geschlossenen Form“ integrieren lassen, die Hilfe der Mathematik versage[38a]); dass in Wahrheit die Mittel der modernen Mathematik erheblich weiter reichen, ist schon in Nr. 1 dieses Artikels auseinandergesetzt worden. Freilich wird man es mit Freude begrüssen, wenn es bei einem Problem

38) Nicht immer wird der Bewegungszustand zu einer Anfangszeit gegeben. Bei der Bestimmung der Planeten- und Kometenbahnen ist zum Beispiel der scheinbare Ort zu verschiedenen Zeiten bekannt; vgl. VI 2 9 (*G. Herglotz*). — Ebenso ist beim Zielen der Anfangs- und der Endpunkt der Bahn gegeben.

38a) So sagt *A. Gray*, Physik 1, p. 266: „Es ist nicht immer möglich, die Bewegungsgleichungen zu lösen“; vgl. auch *E. Mach*, Mechanik, p. 294.

ein erstes Integral giebt oder einige erste Integrale in dem engeren Sinne des Wortes vorhanden sind, denn schon daraus lassen sich häufig wichtige Schlüsse auf den Verlauf der Bewegung ziehen. Ähnliche Betrachtungen gelten für die Gleichungen (2), (3) und (4).

Um erste Integrale zu finden, bedient man sich mit Vorteil folgender Methoden.

1) Wird die Bogenlänge der Bahn bis zum Punkte $P(x, y, z)$ mit s, der Krümmungsradius der Bahn in P mit ϱ bezeichnet und sind F_T, F_N, F_B die Komponenten der wirkenden Kraft $\mathfrak{F}$ nach der Tangente, Hauptnormale und Binormale der Bahn, so gelten die von *L. Euler*[39]) herrührenden „natürlichen" Gleichungen der Bewegung[40]):

$$m\ddot{s} = F_T, \quad m\frac{v^2}{\varrho} = F_N, \quad 0 = F_B.$$

Im Allgemeinen kann man diese Gleichungen nur aufstellen, wenn man die Bahn des Punktes schon kennt, in manchen Fällen gelingt es aber, sie unmittelbar zu finden und für die Ermittlung von ersten Integralen zu verwerten; besonders *P. Serret* hat von ihnen schöne Anwendungen gemacht[41]).

2) Sind $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Komponenten des Impulsvektors $\mathfrak{J}$ nach den Axen der x, y, z, so lassen sich die Gleichungen (1) auf die Form bringen:

$$(1^*) \qquad \frac{d\mathfrak{X}}{dt} = X, \quad \frac{d\mathfrak{Y}}{dt} = Y, \quad \frac{d\mathfrak{Z}}{dt} = Z;$$

der Endpunkt des von einem festen Punkte abgetragenen Vektors $\mathfrak{J}$ bewegt sich also mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{F}$. Verschwindet bei geeigneter Wahl der Koordinatenaxen etwa X, so folgt aus der ersten Gleichung (1*) die erste Integralgleichung $\mathfrak{X} = C$ (*Satz von der Erhaltung der Projektion der Bewegungsgrösse*), und hieraus durch eine neue Integration $mx = Ct + C'$, wo C und C' Konstanten bedeuten.

3) *J. Keplers* Gesetz, dass der von dem Planeten nach der Sonne gezogene Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreibt,

39) Mechanica, 1736, sowie St. Pétersbourg Nova Acta 3 ad ann. 1785, p. 111.

40) *P. Appell,* Mécanique 1, p. 304. Sehr einfach und durchsichtig gestaltet sich die Herleitung der natürlichen Gleichungen bei Anwendung der Vektorrechnung; vgl. *R. Marcolongo,* Meccanica 1, p. 84. Bei englischen, französischen, italienischen Autoren heissen diese Gleichungen *intrinsic* equations, équations *intrinsèques*, equazioni *intrinseche*. Der Terminus *intrinsic* scheint von *W. Whewell* herzurühren, Cambridge Phil. Soc. Trans. 9 (1851), p. 150; vgl. *E. Wölffing,* Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 143.

41) Théorie nouvelle mécanique et géométrique des lignes de double courbure, Paris 1860.

war von *I. Newton* auf beliebige Zentralkräfte verallgemeinert worden[42]). Dass ein entsprechender Satz auch bei anderen Kräften gelten kann, haben ziemlich gleichzeitig *L. Euler*[43]), *Daniel Bernoulli*[44]) und *P. d'Arcy*[45]) erkannt. Besteht nämlich die Gleichung

$$xY - yX = 0,$$

so folgt aus den Gleichungen (1), dass die Projektion des von dem Anfangspunkte nach dem bewegten Punkte gezogenen Radiusvektors auf die xy-Ebene in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibt (*Flächensatz*).

Eine neue Auffassung dieses Satzes verdankt man *L. Poinsot*[46]). Hat das Drehmoment $\mathfrak{K}$ der wirkenden Kraft $\mathfrak{F}$ in Bezug auf den Anfangspunkt der Koordinaten die Komponenten nach den Axen der x, y, z:

$$L = yZ - zY, \quad M = zX - xZ, \quad N = xY - yX,$$

und sind

$$\mathfrak{L} = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \quad \mathfrak{M} = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \quad \mathfrak{N} = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

die Komponenten des Drehmomentes $\mathfrak{U}$ des Impulses $\mathfrak{J}$ in bezug auf dieselben Axen, so gelten vermöge (1) die Gleichungen:

$$(1^{**}) \qquad \frac{d\mathfrak{L}}{dt} = L, \quad \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = M, \quad \frac{d\mathfrak{N}}{dt} = N;$$

der Endpunkt des von einem festen Punkte aus abgetragenen Vektors $\mathfrak{U}$ bewegt sich also mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{K}$. Ist $\mathfrak{K} = 0$, so bleibt der Endpunkt von $\mathfrak{U}$ fest; der materielle Punkt bleibt dann in einer auf diesem Vektor senkrechten Ebene, und für seine Bewegung in dieser Ebene gilt der Flächensatz. Verschwindet aber nur eine der Komponenten L, M, N, so gilt in Bezug auf eine der drei Koordinatenebenen der Flächensatz, der daher auch als *Satz von der Erhaltung des Drehmomentes* bezeichnet wird. Verschwinden zwei der Komponenten L, M, N, so verschwindet auch die dritte, und der Flächensatz gilt dann für jede beliebige, durch den Anfangspunkt gehende Ebene[46a]).

---

42) Principia, lib. 1, sectio 2, prop. 1.

43) Opuscula varii argumenti 1, 1746, p. 1.

44) Berlin, Mém. année 1745 (1746), p. 54.

45) Paris, Mém. année 1747 (1752), p. 348.

46) J. éc. polyt. cah. 13 (1806), wieder abgedruckt als Anhang zu den späteren Auflagen seiner Élémens de statique. In der Sprache der Vektorenrechnung bedeutet die Auffassung von *Poinsot* den Übergang von der Plangrösse zum ergänzenden Vektor; vgl. IV 2, Nr. 8 (*H. E. Timerding*).

46a) *S. D. Poisson*, J. de l'éc. polyt. cah. 15 (1809), p. 266; vergl. *R. Marcolongo*, Napoli Rend. (2) 2 (1888), p. 419.

4) Der Ausdruck $T = \frac{1}{2}mv^2$ wird als die *lebendige Kraft* oder die kinetische Energie des bewegten Punktes bezeichnet[47]). Aus den Gleichungen (1) bis (4) von Nr. 4 folgt:

$$dT = Xdx + Ydy + Zdz,$$

das heisst der Zuwachs, den die lebendige Kraft während des Zeitelementes dt erfährt, ist gleich der elementaren Arbeit dW, die während dieses Zeitelementes von der Kraft $\mathfrak{F}$ geleistet wird. Gleichzeitig ergiebt sich, dass die elementare Arbeit der Reaktionskräfte verschwindet. Über den Fall der Reibung vgl. Nr. 6.

Wenn X, Y, Z Funktionen von x, y, z; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$; t sind, so muss man, um die gesamte Arbeit W für den Zeitraum $(t_0 \ldots t)$ zu berechnen, x, y, z als Funktionen der Zeit, d. h. die Bewegung des Punktes kennen. Wenn X, Y, Z Funktionen von x, y, z allein sind, also $\mathfrak{F}$ eine reine Bewegungskraft ist, genügt es, die Bahn des Punktes zu kennen. Wenn endlich $Xdx + Ydy + Zdz$ das vollständige Differential einer *eindeutigen Funktion* $U(x, y, z)$ ist, so genügt zur Berechnung von W die Kenntnis der Anfangs- und Endlage des Punktes. Die Funktion U heisst nach *W. R. Hamilton*[48]) *Kräftefunktion*. Existiert eine Kräftefunktion U, so wird

$$T = U + h.$$

Die Konstante h heisst die Konstante der lebendigen Kraft; die Bahnen, bei denen h denselben Wert hat, vereinigt man häufig zu einer *Familie von Bahnen*[48a]). Die Funktion $V = -U$ heisst die *potentielle Energie des Punktes* und die Gleichung $T + V = h$ giebt für ihn den Satz von der Erhaltung der Energie.

Aus der Gleichung der lebendigen Kraft lassen sich nicht selten

47) Vgl. IV 1, Nr. 46 (*A. Voss*). Es sei noch ausdrücklich hervorgehoben, dass *G. W. Leibniz* (Acta erud. Lips. 1695) als vis viva das Produkt mv^2 bezeichnete. Erst *G. Coriolis* (Traité de mécanique, 1829) hat wegen der Beziehung zur Arbeit $\frac{1}{2}mv^2$ als lebendige Kraft bezeichnet und *H. v. Helmholtz* (Erhaltung der Kraft, Berlin 1847) diese Bezeichnung in Deutschland eingeführt; vgl. IV 1 (*A. Voss*), Anmerkung 297. Die neuerdings vorgeschlagene, an sich gute Bezeichnung „Wucht" für $\frac{1}{2}mv^2$ zum Unterschiede von mv^2 (*A. Föppl*, Einleitung, p. 29) scheint sich nicht einbürgern zu wollen.

48) London Phil. Trans. 1834, p. 249 (force function, bei *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 17 (1838), p. 97 Kräftefunktion). Der Sache nach findet sich die Kräftefunktion schon bei *J. L. Lagrange* (Mécanique analytique). Dass $U(x, y, z)$ eindeutig sein muss, wenn man die Arbeit berechnen will, scheint zuerst *J. Bertrand*, J. éc. polyt. cah. 28 (1841), p. 249 bemerkt zu haben. Vergl. auch *E. Lemni*, J. de math. (3) 2 (1876), p. 233.

48a) *G. Darboux*, Leçons sur la théorie des surfaces 2, Paris 1889, p. 482.

wichtige Schlüsse auf den Verlauf der Bewegung ziehen. Da nämlich $T = \frac{1}{2}mv^2$ niemals negativ ist, so kann der bewegte Punkt im Laufe der Zeit nur solche Punkte des Raumes passieren, in denen $U + h$ positiv oder gleich Null ist, und man erhält, falls $U + h$ bei einem gegebenen Werte von h mit Zeichenwechsel verschwindet, bei der Bewegung im Raume eine „Grenzfläche“ und bei der Bewegung in der Ebene eine „Grenzkurve“, die der bewegte Punkt nicht überschreiten kann. *G. W. Hill* (1878) hat hieraus wichtige Folgerungen für die Bewegung des Erdmondes gezogen[49]), und die Grenzkurve ist dann auch bei anderen astronomischen Untersuchungen verwertet[50]) worden. *P. Stäckel* hat dasselbe Prinzip für die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer krummen Fläche verwertet[51]). Hat die Kräftefunktion U an einer Stelle A^* ein Maximum M und legt man der Konstanten h einen Wert bei, der wenig von $-M$ verschieden, sonst aber beliebig ist, so erhält man als Grenzfläche eine kleine, geschlossene, den Punkt A^* umgebende Fläche und schliesst hieraus, dass der bewegte Punkt, wenn er von einer in der Nähe von A^* gelegenen Stelle mit geringer Anfangsgeschwindigkeit ausgeht, immer in der Nähe von A^* bleiben muss, und dass auch seine Geschwindigkeit stets gering bleibt. Da der Punkt, wenn er in A^* ruht, immer in Ruhe bleibt, so ist eine solche Stelle, wo U ein Maximum hat, eine *Stelle stabilen Gleichgewichtes*[52]). Dieser Satz von der Stabilität rührt von *J. L. Lagrange* her. Den Beweis dafür gründete dieser jedoch auf Reihenentwicklungen, bei denen er nur die Glieder bis zur zweiten Ordnung berück-

---

49) Am. J. of math. 1 (1878), p. 5, 129, 245 (Abdruck einer 1877 in Boston erschienenen Monographie); Acta math. 8 (1886), p. 1. *Hill* zeigte auf diesem Wege, dass in dem System Sonne, Erde, Mond, wenn man annimmt, dass die Erdbahn kreisförmig ist, der Mond sich von der Erde niemals weiter als um den vierfachen Betrag seines jetzigen Abstandes entfernen kann.

50) *K. Bohlin*, Acta math. 10 (1887), p. 109; *G. H. Darwin*, Acta math. 21 (1897), p. 99; Math. Ann. 51 (1899), p. 523; *C. V. L. Charlier*, Die Mechanik des Himmels, 2, Leipzig 1905, p. 111, 290. Genaueres in VI 2 12 (*E. T. Whittaker*).

51) Diss. Berlin 1885.

52) Instabil heisst das Gleichgewicht an einer Stelle P, wenn der Punkt von einer Stelle in der Nähe von P mit kleiner Geschwindigkeit ausgehend sich im Laufe der Zeit beträchtlich von P entfernt. Die Astronomen (vgl. *H. Poincaré*, Mécanique céleste 3, p. 140) sprechen auch von der *Stabilität der Bewegung* eines Punktes und meinen damit, dass der Punkt sich im Laufe der Zeit von einem festen Punkte niemals mehr als um eine bestimmte endliche Strecke entfernt, wie etwa der Mond von der Erde (vgl. Anmerkung 49); *R. Clausius* nennt solche Bewegungen *stationär*, vgl. *E. J. Routh*, Dynamik 1, p. 333. Das Wort *Stabilität der Bewegung* wird jedoch auch in einem anderen Sinne gebraucht, siehe Nr. 9 dieses Artikels.

sichtigte[53]). Auf dem hier angegebenen Wege, den übrigens *Lagrange* selbst schon angedeutet hatte[54]), haben dann *F. Minding* und *P. Lejeune-Dirichlet* den strengen Beweis durchgeführt[55]).

Hat die Kräftefunktion U für eine Gleichgewichtslage B^* kein Maximum, sondern entweder ein Minimum oder eine Stelle stationären Verhaltens, so lässt sich unter sehr allgemeinen Voraussetzungen beweisen, dass kein stabiles Gleichgewicht stattfindet[55a]). Man hatte daher vielfach angenommen, dass nur bei einem Maximum von U stabiles Gleichgewicht möglich sei. Dass diese Annahme falsch ist, hat *P. Painlevé* gezeigt[55b]). Bewegt sich nämlich ein freier Punkt der Masse m unter dem Einflusse von Kräften, die von der Kräftefunktion

$$U(x, y, z) = \tfrac{1}{2}m\left(x^5 \sin\frac{1}{x} - y^2 - z^2\right)$$

herrühren, so ist die Stelle $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ eine reguläre Gleichgewichtsstelle (regulär, weil U mit seinen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in der Nähe der Stelle $0, 0, 0$ stetig ist), für die U kein Maximum hat, und dennoch findet stabiles Gleichgewicht statt.

Auch für quantitative Untersuchungen erweist sich der Satz von der lebendigen Kraft als nützlich; in vielen Fällen gelingt es nämlich, aus ihm, durch Verbindung mit den anderen Gleichungen der Bewegung, eine Gleichung der Form

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = f(q)$$

herzuleiten, in der q irgend eine Koordinate bedeutet. Bei der älteren Auffassung begnügt man sich zu sagen, dass t als Funktion von q durch eine Quadratur bestimmt sei; nach der neueren sucht man aus jener Gleichung Schlüsse auf den Charakter der Funktion q

---

53) Mécanique 1, Section 3. Auch *S. D. Poisson*, Mécanique 2, p. 492 benutzt Reihenentwicklungen.

54) Mécanique 2, Section 6, § 8.

55) *F. Minding*, Mechanik, Berlin 1838, p. 268; *P. Lejeune-Dirichlet*, Berlin Monatsber. 1846, p. 34; J. f Math. 32 (1846), p. 85 = Werke 2, p. 5. Vgl. auch *P. Stäckel*, Jahresber. d. D. M.-V. 14 (1905), p. 504.

55a) *A. Kneser*, J. f. Math. 115 (1895), p. 308; 117 (1897), p. 186; *A. M. Ljapunoff*, J. de math. (5) 3 (1897), p. 81; *J. Hadamard*, J. de math. (5) 3 (1897), p. 331; *P. Painlevé*, Paris C. R. 125 (1897), p. 1021; *G. Hamel*, Math. Ann. 57 (1903), p. 541; *P. Bohl*, J. f. Math. 127 (1904), p. 179; Genaueres in IV 12 (*P. Stäckel*).

55b) Paris C. R. 138 (1904), p. 1555; allerdings ist hier die Stelle B^* eine Häufungsstelle von Gleichgewichtsstellen; für eine *isolierte* Gleichgewichtsstelle scheint stabiles Gleichgewicht nur bei einem Maximum von U möglich zu sein.

von t zu ziehen. Lässt sich $f(q)$ auf die Form bringen:

$$f(q) = (b - q)(q - a) g(q),$$

wo a und b ($> a$) Konstanten sind und $g(q)$ eine stetige, im Intervalle $q = (a \dots b)$ wesentlich positive Funktion bedeutet, so wird nach *K. Weierstrass* q eine eindeutige, stetige Funktion der reellen Veränderlichen t mit der Periode

$$2\omega = 2\int_a^b \frac{dq}{\sqrt{f(q)}},$$

die sich durch eine trigonometrische Reihe

$$q = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin \frac{n\pi t}{\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi t}{\omega}$$

darstellen lässt[56]; nicht selten genügen schon die ersten Glieder dieser Reihe, um eine für praktische Zwecke ausreichende Annäherung zu geben. Da die Veränderliche q zwischen den Grenzen a und b hin- und hergeht, hat *C. V. L. Charlier* die Bewegung eine *Librationsbewegung* genannt[57]. Ist die Wurzel b der Gleichung $f(q) = 0$ nicht einfach, sondern mehrfach, so geht q asymptotisch von a nach b; die Bewegung heisst dann nach *Charlier* eine *Limitationsbewegung*[58].

Zur genaueren Diskussion der Bewegung wird man in den meisten Fällen numerische[59] und graphische[60] und mechanische[61]

---

56) Berlin Monatsber. 1866, p. 97, 185 = Werke 2, p. 1; vgl. jedoch schon *N. H. Abel*, Oeuvres, nouv. éd. 2, p. 40 und *F. Minding*, Mechanik, p. 222 und 317; eine interessante Anwendung auf die Störungen von Jupiter und Saturn machte *G. W. Hill*, Annals of math. 5 (1890), p. 177.

57) St. Pétersbourg Mélanges math. 7 (1889), p. 1; St. Pétersbourg Acad. Bull. 33 (1890), p. 9; Mechanik des Himmels 1, Leipzig 1902, p. 85.

58) Den allgemeinen Fall $f(q) = (b - q)^{\beta} (q - a)^{\alpha} g(q)$, wo α und β konstante Exponenten bedeuten und $g(q)$ für q gleich a und q gleich b endlich und von Null verschieden ist, untersuchten *P. Stäckel*, Diss. Berlin 1885 und *C. V. L. Charlier*; vgl. auch *G. Dillner*, Bordeaux Mém. (2) 5 (1883), p. 29.

59) Die numerischen Methoden der Astronomen werden hier vielfach mit Nutzen angewandt werden können; vgl. VI 2.

60) Ueber die Litteratur bezüglich graphischer Methoden zur Lösung mechanischer Probleme findet man einen ausführlichen Bericht in den Brit. Ass. Rep. 1889, p. 322, 1892, p. 373, 1893, p. 573; vgl. auch *Lord Kelvin*, Phil. Mag. (5) 34 (1892), p. 443: Konstruktion der Bahn, wenn man aus den Differentialgleichungen der Bewegung ihren Krümmungsradius entnehmen kann; ferner *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, Kapitel VII, § 4: graphische Integration von Differentialgleichungen der Form $\frac{d^2 u}{d v^2} = f(u, v)$.

61) *W. Thomson* und *P. G. Tait*, Treatise, 2. ed. 1, Appendix B'; *A. Kriloff*, St. Pétersbourg Acad. Bull. (5) 20 (1904), Nr. 1.

Methoden zu Hilfe nehmen müssen. Auch werden sich die neueren Untersuchungen über die approximative Integration von Differentialgleichungen (vgl. III D 11, *K. Heun*) hierfür fruchtbar machen lassen; in der Dynamik muss man jedoch mit Vorsicht verfahren, da Realitäts- und Stetigkeitsbedingungen hinzutreten[61a]).

6. Reibung. Die Annahme von konservativen Kräften, bei denen der Satz von der Erhaltung der Energie gilt, oder doch von reinen Bewegungskräften, die allein von den Koordinaten der bewegten Punkte abhängen, genügt nicht immer zur Lösung der Aufgaben der Dynamik. Man hat sich vielmehr häufig genötigt gesehen, zu diesem Zwecke den äusseren Kräften noch Kräfte hinzuzufügen, die von den Geschwindigkeiten der bewegten Punkte abhängen und als *Reibungskräfte* bezeichnet werden[62]). Solche Kräfte treten auf, wenn die Bewegung eines Körpers in einem widerstehenden Medium vor sich geht, oder wenn sich feste Körper bei ihrer Bewegung in Punkten, Linien oder Flächen unter Druck berühren; auch die viel behandelte Steifigkeit der Seile ist hier zu nennen. Für die in Wirklichkeit bei der Bewegung in einem widerstehenden Medium stattfindenden Vorgänge vergleiche man die Artikel IV 17 *Aerodynamik* (*S. Finsterwalder*), IV 18 *Ballistik* (*C. Cranz*) und IV 22 *Schiffsbewegung* (*A. Kriloff*), für die physikalisch-technische Theorie der Reibung fester Körper und die Steifigkeit der Seile den Artikel IV 10 *Dynamische Probleme der Maschinentechnik* (*K. Heun*). Neben die Lehre von den Erscheinungen bei der Reibung ist aber eine umfangreiche mathematische Theorie der Reibung getreten, man hat zum Beispiel bei der Bewegung eines materiellen Punktes in einem widerstehenden Medium den Widerstand gleich einer solchen Funktion der Geschwindigkeit v gesetzt, dass sich die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung in eleganter Form durchführen liess[63]), oder bei der unter Druck erfolgenden Berührung fester

---

61a) *E. B. Christoffel*, J. f. Math. 66 (1866), p. 1; *G. Koenigs*, Bull. soc. math. de France 22 (1894), p. 25; *L. Lecornu*, ebenda p. 81.

62) Für die Einführung der Reibungskräfte vgl. auch Nr. 2 dieses Artikels sowie *H. v. Helmholtz*, Dynamik, p. 31. Welche Rolle die Reibungskräfte bei den wirklichen Bewegungen spielen, zeigt etwa das Beispiel des deutschen Infanteriegewehrs, Modell 88, bei dem das Geschoss eine Anfangsgeschwindigkeit von ungefähr 620 m in der Sekunde erhält. Nach den Gesetzen der parabolischen Wurfbewegung würde sich die grösste Schussweite bei einem Abgangswinkel von 45 Grad ergeben und ungefähr 40 km betragen in Wirklichkeit wird nach der „Schiessvorschrift für die Infanterie" die grösste Schussweite bei einem Abgangswinkel von etwa 32 Grad erreicht und beträgt etwa 4 km.

63) Solche Gesetze stellten auf und behandelten: *I. Newton*, Principia, Lib. II, wo das Widerstandsgesetz $f(v) = av + bv^2$ ist; *Joh. Bernoulli*, Paris

Körper für die Reibung einfache Gesetze angenommen[64]). In manchen Fällen gelingt es, auf diese Weise ein Bild der Vorgänge zu gewinnen, das als erste Annäherung brauchbar ist, und das ist um so wertvoller, als es sich bei der Reibung um ausserordentlich verwickelte Vorgänge handelt, die bereits ausserhalb des Gebietes der Mechanik liegen: denn bei der Reibung werden thermische, elektrische und magnetische Kräfte ausgelöst, die einen Teil der kinetischen Energie absorbieren (Zerstreuung der Energie)[65]). In anderen Fällen aber, zum Beispiel bei dem Bremsen der Eisenbahnzüge[66]), ergiebt sich auf diesem Wege nicht einmal eine erste Annäherung an die wirklichen Vorgänge, und man ist, wo es auf den genauen Wert der in einem gegebenen Falle zu erwartenden Reibung ankommt, darauf angewiesen, Versuchsergebnisse heranzuziehen, die unter ähnlich liegenden Verhältnissen erhalten wurden, oder, wenn solche nicht vorliegen, selbst Versuche anzustellen[67]).

Die Reibung zweier festen Körper, die aneinander vorbeigleiten,

---

Mém. année 1711, p. 47 = Opera 1, p. 502, $f(v) = av^n$: dasselbe Gesetz hat *L. Euler*, Mechanica, 1736, 1, p. 444; *J. d'Alembert*, Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, Paris 1744, p. 359: $f(v) = a + bv^n$; *A. M. Legendre*, Berlin Mém. 1782, p. 59 für $n = 2$; weitere ältere Litteratur bei *M. Jullien*, Problèmes 1, p. 281, 350. Aus neuerer Zeit sei hier nur genannt: *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 24 (1842), p. 5 = Werke 4, p. 286; *P. Appell*, Mécanique 1, p. 332, 351 und im übrigen auf IV 18 (*C. Cranz*) verwiesen.

64) Monographie von *G. H. Jellett*, Reibung, London 1872, mit sehr vielen Aufgaben aus der Statik und Kinetik.

65) Wenn neben den von einer Kräftefunktion $U(x, y, z)$ herrührenden äusseren Kräften noch Reibungswiderstände auftreten, so lassen sich die *Lagrange*schen Gleichungen in manchen Fällen auf die Form bringen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\alpha},$$

wo F eine von den q_α und $\dot{q}_\alpha$ abhängende Funktion bedeutet, die in den $\dot{q}_\alpha$ homogen und von der zweiten Dimension ist. *Lord Rayleigh* hat die Funktion F die *Dissipationsfunktion* genannt (London Math. Soc. Proc. 1873; Theory of sound, 2. ed. London 1894, 1, p. 136); aus den *Lagrange*schen Gleichungen folgt nämlich durch das Verfahren, das bei konservativen Kräften die Gleichung von der Erhaltung der lebendigen Kraft liefert, hier die Relation:

$$\frac{d}{dt}(T - U) = -2F,$$

sodass F die halbe Geschwindigkeit darstellt, mit der die Energie das System verlässt. Für die Dissipationsvorgänge vgl. auch V 4 (*E. W. Hobson* und *H. Diesselhorst*).

66) *A. Föppl*, Einführung, 1. Aufl., p. 225.

67) Ebendaselbst, p. 221.

(gleitende Reibung)[68]) ist bereits im 18. Jahrhundert vielfach theoretisch und experimentell untersucht worden[69]). *G. Amontons* (1699) kam zu dem Ergebnis, dass die aus der Reibung hervorgehende, in der Berührungsebene der beiden Körper liegende, der Richtung der Bewegung entgegengesetzte Kraft R dem Normaldrucke N proportional, aber unabhängig von der Grösse der Berührungsfläche sei[70]). Es ist also

$$R = fN;$$

f heisst der *Reibungscoefficient*; er ist zum Beispiel bei Eisen auf Eisen etwa 0,1, bei Holz auf Holz schwankt er zwischen 0,3 und 0,5. *A. Parent* (1700, 1704) bestätigte diese Sätze und fügte hinzu, dass die Grösse des Reibungswiderstandes auch von der Geschwindigkeit der relativen Bewegung der beiden Körper gegeneinander unabhängig sei[71]); er hat auch den Reibungswinkel eingeführt, dessen Tangente das Verhältnis zwischen der Grösse der Reibung und der Grösse des Druckes ist[72]). Endlich entdeckte *F. J. des Camus* (1722) den Unterschied zwischen der Reibung in der Ruhe (statische Reibung) und der Reibung in der Bewegung (kinetische Reibung)[73]). Diese Ergebnisse, die man zum Beispiel in *L. Eulers Mechanik der festen Körper* (1765) ausführlich dargestellt und auf eine Reihe besonderer Bewegungserscheinungen angewandt findet[74]), werden gewöhnlich *Ch. A. Coulomb*

68) Bei beliebiger Bewegung eines festen Körpers auf einer Unterlage tritt zu der gleitenden Reibung noch die rollende und die bohrende Reibung hinzu, für die auf den zweiten Abschnitt dieses Artikels verwiesen werden muss.

69) Diese Untersuchungen haben noch keine ausreichende historisch-kritische Darstellung erfahren. Einige Angaben, die jedoch der Nachprüfung bedürfen, findet man in *J. Gehlers* physikalischem Wörterbuch 4, Leipzig 1795, Artikel Reibung, bei *A. Brix*, Verh. d. Ver. z. Förderung des Gewerbefleisses in Preussen 16 (1837), p. 130 und bei *M. Rühlmann*, Vorträge zur Geschichte der technischen Mechanik, Leipzig 1885, p. 498.

70) Paris Mem. année 1699, p. 206.

71) Paris Mém. année 1700, p. 145; année 1704, p. 195.

72) Wenn die Bewegungen nach allen möglichen Richtungen betrachtet werden, ergiebt sich daraus der zu einem Punkte gehörige Reibungskegel, der in der Statik reibender Körper nützliche Verwendung gefunden hat; vgl. *G. Herrmann*, Der Reibungswinkel, Festschrift zum Universitätsjubiläum von Würzburg 1882.

73) Traité des forces mouvantes, Paris 1722; vgl. auch *J. A. Segner*, De affrictu solidorum, Halle 1758.

74) Von der Reibung handelt das ganze Supplementum der ersten Ausgabe, p. 449—513. *Euler* betrachtet hier zuerst die Reibung im allgemeinen, dann die gleitende Bewegung eines schweren Körpers auf rauher Unterlage, die drehende Bewegung eines schweren Körpers um ein reibendes Lager, die Bewegung der Kreiselspitze auf rauher Unterlage und zum Schluss die Bewegung

(1781) zugeschrieben, dessen grosses Verdienst in Wahrheit darin besteht, dass er mit einer bis dahin unbekannten Präzision experimentiert und durch seine Versuche die von *Amontons*, *Parent* und *Camus* aufgestellten Reibungsgesetze wiedergefunden hat[75]).

Um so auffallender ist es, dass *J. L. Lagrange* in seiner *Mécanique analytique*, die auch aus den achtziger Jahren des 18. Jahrhunderts stammt, die Bewegung eines Punktes in einem widerstehenden Medium nur flüchtig gestreift, die Reibung fester Körper gegen einander aber ganz unberücksichtigt gelassen hat[76]). Seinem Beispiel sind dann in der mathematischen Behandlung *C. G. J. Jacobi* und *G. Kirchhoff* gefolgt; aber auch die Physiker haben während des 19. Jahrhunderts den Reibungserscheinungen nur geringes Interesse zugewandt. Bei den Mathematikern lag dies teils daran, dass für die Entwicklung der rationellen Mechanik die Mechanik des Himmels vorbildlich wirkte, teils daran, dass auch schon bei einfachen Ansätzen

---

homogener Kugeln auf einer rauhen horizontalen Ebene. Auch zahlreiche Abhandlungen *Eulers* beziehen sich auf die Reibung; siehe *J. Hagen*, Index operum Leonhardi Euleri, Berlin 1896, p. 43—45.

75) Paris Mém. de math. et de phys. prés. par div. sav. 10 (1785), p. 161; Preisaufgabe für 1781, auch selbständig erschienen: Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages, Paris 1809, 2. éd. 1820. — In neuester Zeit ist *P. Painlevé* zu dem überraschenden Ergebnis gekommen, dass das Coulombsche und sogar allgemeiner jedes Reibungsgesetz der Form

$$R = Nf(N, v)$$

zu logischen Widersprüchen führt. Es lassen sich nämlich Fälle angeben, bei denen mit dieser Annahme keine Bewegung verträglich ist oder wo zwei verschiedene Bewegungen in gleicher Weise stattfinden könnten; letzteres tritt zum Beispiel ein, wenn eine kreisförmige Scheibe, deren Schwerpunkt nicht in ihrem Mittelpunkte liegt, auf einer stark reibenden Unterlage rollt. Versuche von *H. Chaumat*, Paris C. R. 136 (1903), p. 1634, haben diese Schlüsse bestätigt und gezeigt, dass *Painlevés* Vorschlag Annahme verdient, die Reibung als die geometrische Differenz der wirklichen Reaktion und der Reaktion zu definieren, die stattfindet, wenn die Körper vollkommen glatt sind; bei dieser Annahme hängt die Reibung nicht nur von der Natur der Flächen ab, die sich berühren, sondern auch von der Verteilung der Drucke in den berührenden Körpern in der Nähe des Berührungspunktes. Vergl. *P. Painlevé*, Paris C. R. 80 (1895), p. 596, 81 (1895), p. 112; Leçons sur le frottement, Paris 1895; Paris C. R. 140 (1905), p. 702; 141 (1905), p. 401, 546; *A. Mayer*, Leipzig Ber. 1901, p. 235; *L. Lecornu*, Paris C. R. 140 (1905), p. 635, 847; *M. de Sparre*, Paris C. R. 141 (1905), p. 310; *E. Daniele*, Nuovo Cimento (5) 7 (1904), p. 109; (5) 9 (1905), p. 174, 266, 289; *G. A. Maggi*, Nuovo Cimento (5) 10 (1905), p. 240.

76) Mécanique 2, p. 4, 154; einen Beitrag zur Ballistik enthält die aus dem Nachlass von *S. D. Poisson* herausgegebene Abhandlung J. éc. polyt. cah. 21 (1832) = Oeuvres 7, p. 603.

für die Reibungskräfte die Durchführung der Integration in geschlossener Form, die man bis gegen das Ende des 19. Jahrhunderts immer anstrebte, sich als undurchführbar erwies; die Physiker aber verhielten sich, trotzdem *Coulomb* einen vielversprechenden Anfang gemacht hatte, ablehnend, weil es sich bei der Reibung nicht um „reine" Versuche handelt[76a]). So ist die genauere Erforschung der Erscheinungen bei der Reibung schliesslich den Technikern zugefallen[77]). Erst als die Erforschung der Reibungserscheinungen in der technischen Mechanik unumgänglich geworden war, hat man angefangen, die Reibung auch bei den mathematisch-physikalischen Untersuchungen in gebührender Weise zu berücksichtigen. Wie die Theorie des Kreisels von *F. Klein* und *A. Sommerfeld* zeigt[78]), eröffnet sich hier für die Anwendung der Methoden der neueren Approximationsmathematik, die sich von der ausschliesslichen Herrschaft der „Integration in geschlossener Form" frei gemacht hat und alle Hilfsmittel der Geometrie und Analysis heranzieht, ein höchst fruchtbares Gebiet, dessen Bearbeitung freilich nicht nur mathematische Geschicklichkeit, sondern ebenso Sinn für die physikalisch-technische Wirklichkeit verlangt; für diese Methoden vergl. III D 11 (*K. Heun*).

b) Systeme diskreter Punkte.

7. Die Differentialgleichungen der Bewegung. Bei Systemen von materiellen Punkten wiederholen sich die Betrachtungen der Nummern 3, 4, 5. Die Punkte des Systems können erstens im Raume frei beweglich sein und Kräfte auf einander ausüben, die von ihrer gegenseitigen Lage, ihren Geschwindigkeiten und der Zeit abhängen. Zweitens können zwischen den Punkten oder doch einem Teile der Punkte Bedingungen stattfinden, so dass Zwangsbewegungen eintreten. Es ist nicht möglich aufzuzählen, was alles an solchen Verbindungen

---

76a) Jedoch hat *M. Brillouin*, Paris C. R. 128 (1899), p. 354, Ann. chim. phys. (7) 16 (1899), p. 433 eine rein mechanische Theorie der Reibung aufzustellen versucht. Er will alles auf die Einwirkung zentraler Kräfte zurückführen, die allein Funktionen der gegenseitigen Entfernung je zweier Molekeln sind; bei dem relativen Gleiten zweier polierten festen Körper soll sich nämlich ein Teil der Arbeitsleistung in die lebendige Kraft oscillatorischer Bewegungen von Molekeln verwandeln, ähnlich wie man eine Magnetnadel durch Verrückung eines in der Hand gehaltenen Magneten in Schwingungen versetzen kann; vgl. auch *A. Korn*, Mechanische Theorie der Reibung, Berlin 1901.

77) Litteratur in IV 10 (*K. Heun*); hier sei nur verwiesen auf *J. Perry*, Applied mechanics, New York 1898 und *F. Masi*, Le nuove vedute nelle ricerche teoriche ed sperimentali sull' attrito, Bologna 1897.

78) Heft 3, Kapitel 7.

durch Stangen und Fäden, Ringe und Rollen und dergleichen die Phantasie der Mathematiker ersonnen hat, bis zur „Mechanik lebender Wesen", in der man zum Beispiel punktförmige Affen an massenlosen Seilen klettern sieht[79]). Zu den äusseren Kräften, die auf die Punkte des Systems wirken, treten dann Kräfte, die von der Reaktion der Verbindungen herrühren. Es ist üblich zu postulieren, dass für diese das Gesetz von der Gleichheit der Aktion und Reaktion gilt, und man hat bei dieser Auffassung die von der Reibung und dem Widerstande eines Mediums herrührenden Kräfte den äusseren Kräften zuzurechnen.

Handelt es sich um ein System von n Punkten $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ mit den Massen m_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$, so wird der Bewegungszustand des Systems zur Zeit t charakterisiert durch die Angabe der Lage der Punkte des Systems zu dieser Zeit und der Geschwindigkeitsvektoren der Punkte, oder auch durch die Angabe der *Konfiguration* des Systems und der *Impulsvektoren* der Punkte.

Unter dem *Gesamtimpulse* des Systems versteht man einen *Linienteil*[80]), dessen sechs Koordinaten die Summen der betreffenden Koordinaten der sämtlichen als Linienteile aufgefassten Einzelimpulse sind; also:

$$\sum m\dot{x}_\alpha, \qquad \sum m\dot{y}_\alpha, \qquad \sum m\dot{z}_\alpha;$$

$$\sum m_\alpha(y_\alpha\dot{z}_\alpha - z_\alpha\dot{y}_\alpha), \quad \sum m_\alpha(z_\alpha\dot{x}_\alpha - x_\alpha\dot{z}_\alpha), \quad \sum m_\alpha(x_\alpha\dot{y}_\alpha - y_\alpha\dot{x}_\alpha).$$

Im allgemeinen ist durch die Angabe der Konfiguration des Systems und der sechs Koordinaten des Gesamtimpulses der Bewegungszustand noch nicht vollständig bestimmt; wohl aber gilt das zum Beispiel für ein System von beliebig vielen, *starr* mit einander verbundenen Punkten, und es besitzt daher der Gesamtimpuls, als Linienteil aufgefasst, für die *Mechanik des starren Körpers* eine ähnliche Bedeutung wie der Impulsvektor für den einzelnen materiellen Punkt[81]).

Im Falle äusserer Einwirkungen ändern sich die Einzelimpulse der Punkte eines Systems ebenso, wie das für den einzelnen Punkt dargelegt worden ist. Wirken etwa kontinuierliche Kräfte $\mathfrak{F}_\alpha(X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha)$, so kann man sie als Linienteile auffassen und zu einem Linienteile vereinigen, dessen Koordinaten die Summen

---

79) *A. Love*, Mechanics; *E. J. Routh*, Dynamik; *W. Walton*, Problems; *F. Kraft*, Sammlung. Etwas ganz anderes ist die *physiologische Mechanik*, vgl. IV 8 (*O. Fischer*).

80) IV 2, Nr. 8 (*H. E. Timerding*).

81) *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, p. 115.

$$X = \sum X_\alpha, \qquad Y = \sum Y_\alpha, \qquad Z = \sum Z_\alpha,$$

$$L = \sum (y_\alpha Z_\alpha - z_\alpha Y_\alpha), \; M = \sum (z_\alpha X_\alpha - x_\alpha Z_\alpha), \; N = \sum (x_\alpha Y_\alpha - y_\alpha X_\alpha)$$

werden. Man erhält so die Gleichungen:

$$\text{(A)} \begin{cases} d\sum m_\alpha \dot{x}_\alpha = X dt, & d\sum m_\alpha (z_\alpha \dot{x}_\alpha - x_\alpha \dot{z}_\alpha) = M dt, \\ d\sum m_\alpha \dot{y}_\alpha = Y dt, & d\sum m_\alpha (y_\alpha \dot{z}_\alpha - z_\alpha \dot{y}_\alpha) = L dt, \\ d\sum m_\alpha \dot{z}_\alpha = Z dt, & d\sum m_\alpha (x_\alpha \dot{y}_\alpha - y_\alpha \dot{x}_\alpha) = N dt, \end{cases}$$

die angeben, wie sich der Gesamtimpuls in dem Zeitelement dt ändert. Diese Gleichungen gelten zunächst nur für frei bewegliche Punkte; sie bleiben aber auch bei solchen holonomen Bewegungen bestehen, bei denen das Gesetz von der Gleichheit der Aktion und Reaktion erfüllt ist.

Wenn einzelne der Grössen X, Y, Z; L, M, N verschwinden, so erhält man aus den betreffenden Gleichungen (A) erste Integralgleichungen, die sich als Verallgemeinerungen der in Nr. **5** formulierten Sätze von der Erhaltung der Komponenten des Impulses und von der Erhaltung der Komponenten des Drehmomentes des Impulses bezeichnen lassen. Verschwinden X, Y, Z alle drei, so gestatten die drei ersten Gleichungen von (A) alle eine weitere Integration, und man gelangt zu dem Satze von der Erhaltung der *Bewegung des Schwerpunktes des Systems* [82]). Verschwinden aber L, M, N alle drei, so gilt die Verallgemeinerung des *Flächensatzes* für jede durch den Anfangspunkt gelegte Ebene, und bei jeder bestimmten Bewegung des Systems giebt es unter diesen Ebenen eine, bei der die Konstante des Flächensatzes den grössten Wert annimmt. Diese Ebene heisst die *invariable Ebene* des Systems, sie steht senkrecht auf der konstanten Richtung des Gesamtimpulses; vgl. auch Nr. **10** dieses Artikels.

Zu diesen Integralgleichungen tritt in vielen Fällen der Satz von der *Erhaltung der lebendigen Kraft* hinzu, der, je nachdem man die Kräftefunktion $U(\ldots, x, y, z, \ldots)$ oder auch die potentielle Energie $V(\ldots, x, y, z \ldots)$ einführt, die Form

$$T = \tfrac{1}{2} \sum m_\alpha v_\alpha^2 = U + h$$

oder

$$T + V = h$$

annimmt; h heisst die *Konstante der lebendigen Kraft.*

---

82) Die Keime dieses Satzes finden sich schon bei *G. Galilei* und *I. Newton*, Principia, lib. 1, Prop. 64, aber in seiner allgemeinen Fassung hat ihn erst *J. L. Lagrange* ausgesprochen, Mécanique 2, sect. 3, § 1.

... vorgehenden angegebenen ...

... dazu schreiten müssen ...

... aufzustellen. Aus ...

... Form ergeben ...

... nichtholonomen Beding...

... Multiplikatoren, die den ...

... proportional sind.

... besonderer ...

... der cartesis...

... Differen...

... von der zwe...

... Lagrange...

Gleichungen die übrigen Koordinaten als Funktionen der Zeit definieren (vergl. Nr. 4 dieses Artikels).

Bei holonomen Bedingungsgleichungen, die auch die Zeit enthalten dürfen, ist es vielfach üblich, Positionskoordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_r$ genau in der Anzahl r der Grade der Freiheit einzuführen, die dem Systeme zukommen. Wird dann der Ausdruck der lebendigen Kraft

$$T = \tfrac{1}{2}\sum a_{\varkappa\lambda}\,\dot{q}_\varkappa \dot{q}_\lambda$$

und der virtuellen Arbeit des Systems

$$\delta W = \sum Q_\varkappa \delta q_\varkappa$$

gebildet, so lauten die *Lagrange*schen Differentialgleichungen für die Koordinaten $q_1, \ldots, q_r$:

$$\text{(L)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varkappa}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} = Q_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, r).$$

Diese Gleichungen (L) werden von der *Jacobi*schen Schule als *Lagrange*sche Gleichungen zweiter Art bezeichnet. Die Bestimmung der Reaktionen muss bei Benutzung der Gleichungen (L) entweder direkt geschehen, oder sie ergiebt sich, nachdem die q als Funktionen der Zeit ermittelt sind, durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Gleichungen (B)[83].

Aus den Gleichungen (B) erhält man auch die Bedingungen für das Gleichgewicht. Bei holonomen Systemen empfiehlt es sich, zunächst die Gleichungen (A) anzusetzen, die zu den sechs notwendigen Bedingungen des Gleichgewichtes $X = 0, \ldots, \ldots, N = 0$ führen; diese Gleichungen sagen aus, dass bei einer Lage des Gleichgewichtes die äusseren Kräfte ein System von Vektoren bilden, das äquivalent Null ist. Um zu hinreichenden Bedingungen zu gelangen, denkt man sich das betrachtete System durch einen *Schnitt* in zwei Teilsysteme zerlegt, die dann auch im Gleichgewicht sein müssen. Die auf jedes der beiden Systeme wirkenden äusseren Kräfte genügen dann wiederum den sechs notwendigen Bedingungen des Gleichgewichtes, wobei aber jetzt die äusseren Kräfte teils aus den auf das ganze System wirkenden äusseren Kräften, teils aus den Reaktionen vermöge der Bedingungen bestehen. Indem man solche Schnitte in hinreichender Zahl vornimmt, erhält man die Bedingungen für das Gleichgewicht. Es ist jedoch hervorzuheben, dass die so gewonnenen Gleichungen in manchen Fällen

83) Für Aufgaben aus der technischen Mechanik ist die von den Mathematikern lange Zeit vernachlässigte Bestimmung dieser Drucke von entscheidender Wichtigkeit. Neuerdings hat *K. Heun* diese Probleme unter dem Namen der *Kinetostatik* zusammengefasst, Jahresbericht der D. M.-V. 9, Heft 2 (1900), p. 5.

nicht ausreichen, um die Reaktionen zu ermitteln; man spricht dann von *statisch unbestimmten Systemen;* vergl. Nr. 17 dieses Artikels sowie IV 5 (*L. Henneberg*).

Entsprechende Überlegungen gelten, wenn nicht kontinuierlich wirkende, sondern momentane Kräfte vorhanden sind; die ausführliche Behandlung findet man in Nr. 18 dieses Artikels.

8. Mechanische Ähnlichkeit. Schon *Aristoteles* hat in den „Mechanischen Problemen“ das Verhalten von geometrisch ähnlichen Körpern, nämlich Holzstäben, gegen Biegung betrachtet. Die Bruchfestigkeit geometrisch ähnlicher Zylinder untersuchte *G. Galilei,* der daran Spekulationen über die mögliche Grösse der Tiere knüpfte[84]). *I. Newton* ist dann zu dem Begriff der mechanischen Ähnlichkeit gelangt und hat ihn für die Bewegung von Körpern in Flüssigkeiten verwendet[85]); aber erst *J. Bertrand* hat 1847 das Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit in voller Strenge und Allgemeinheit ausgesprochen[86]). Werden nämlich in den Differentialgleichungen der Bewegung

$$m\ddot{x} = X$$

die Längen x, die Zeit t, die Kräfte X, die Massen m durch proportionale Grössen

$$x_1 = ax, \quad t_1 = bt, \quad X_1 = cX, \quad m_1 = fm$$

ersetzt, wo also a, b, c, f Konstanten bedeuten, so bleiben die Differentialgleichungen der Bewegung ungeändert, wenn nur zwischen den Konstanten die Relation

$$af = b^2c$$

besteht, sodass die Integration dieser Differentialgleichungen zugleich die Lösung des „ähnlichen“ Problems liefert. Zu beachten ist, dass man hierbei Länge, Zeit, Kraft, Masse alle vier als selbständige Grössen aufzufassen hat, also im besonderen nicht etwa die Kräfte als Funktionen der Koordinaten der bewegten Punkte ansehen darf.

Einen noch allgemeineren Ansatz zu einer rationellen Klassifikation geometrischer und mechanischer Grössen hat *F. Klein* angegeben. Als *Hauptgruppe der Mechanik* bezeichnet er die Gruppe, die entsteht, wenn zu der Hauptgruppe der räumlichen Aenderungen, also zu dem Inbegriff der Bewegungen, der Umlegungen und der Ähnlichkeitstransformationen noch die Gleichungen

84) Discorsi, 1638, Ostwalds Klassiker Heft 11, p. 106—109.

85) Principia, 1687, liber II, sectio VII, propositio 32; vgl. auch *Joh. Bernoulli,* Acta erud. Lips. 1713, p. 77 = Opera 1, p. 514 und *E. Mach,* Mechanik, p. 169.

86) Paris C. R. 25 (1847), p. 163; J. éc. polyt. cah. 32 (1848), p. 189.

$$t_1 = bt, \quad X_1 = cX, \quad m_1 = fm$$

hinzugenommen werden, und er schlägt vor, die mechanischen Grössen nach dem Verhalten einzuteilen, das sie gegenüber den Operationen der Hauptgruppe zeigen[87]). Bei der mechanischen Aehnlichkeit hat man es also mit einer Untergruppe der *Klein*schen Hauptgruppe zu tun.

J. Bertrand hat bereits auf die Wichtigkeit des Prinzips der mechanischen Aehnlichkeit für die Anfertigung von *Maschinenmodellen* hingewiesen[88]). Freilich lässt sich bei solchen Modellen strenge mechanische Ähnlichkeit meist nicht praktisch durchführen; eine weitere Schwierigkeit beruht darauf, dass bei einem widerstehenden Medium eine plötzliche Änderung des Widerstandes eintritt, wenn sich die Geschwindigkeit des bewegten Körpers der Geschwindigkeit der Eigenschwingungen des Mediums, also etwa bei der Luft der Schallgeschwindigkeit nähert, sodass hier der *absolute* Wert der Geschwindigkeit von wesentlicher Bedeutung wird. Immerhin hat man damit in vielen Fällen ganz befriedigende Ergebnisse erzielt, zum Beispiel beim Schiffsbau, wo man Schleppversuche mit Paraffinmodellen anstellt[89]). *R. E. Froude* hat hier folgende Regel gegeben: Wenn die linearen Dimensionen eines Schiffes a-mal so gross als die des Modells sind, die mittleren Dichtigkeiten dagegen gleich, und wenn w der bei der Geschwindigkeit v gemessene, dem Modell geleistete Widerstand ist, dann erfährt das Schiff bei der Geschwindigkeit $v\sqrt{a}$ ungefähr den Widerstand wa^3.

Auch sonst hat das Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit wieder-

---

87) *F. Klein*, Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 239. In engem Zusammenhange hiermit steht die Theorie der Dimensionen, die *J. Fourier*, Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822, § 160 = Oeuvres 1, p. 137 entwickelt und *S. D. Poisson* in die Mechanik aufgenommen hat (Mécanique 2. éd. 1833, 1, p. 23); vgl. auch für die physikalische Durchführung *W. Voigt*, Kompendium; *F. Neesen*, Ann. der Physik (2) 7 (1879), p. 329; und *J. Pionchon*, Introduction à l'étude des systèmes de mesures usitées en physique, Bordeaux Mém. (4) 2 (1891), p. 1—252, auch erschienen als selbständiges Werk, Paris 1901, sowie V 1 (*C. Runge*).

88) Genaueres bei *E. J. Routh*, Dynamik 1, p. 327; *A. Föppl*, Dynamik, 1899, p. 321; *P. Appell*, Mécanique 2, p. 582; *H. Léauté*, Cours éc. polyt. 1901/02.

89) *W. H. White*, Manual of nautical architecture, 3. ed., London 1894, deutsch von *O. Schlick* und *A. van Hüllen*: Handbuch für Schiffbau, Leipzig 1879; aber auch schon *J. d'Alembert*, *Ch. Bossut et M. Condorcet*, Nouvelles expériences sur la résistance des fluides, Paris 1777; vgl. auch *J. Schütte*, Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 2 (1901), p. 331: Untersuchungen über Hinterschiffsformen, ausgeführt in der Schleppversuchstation des Norddeutschen Lloyd. Genaueres in IV 22 (*A. Kriloff*).

holt Anwendung gefunden[90]). Dass man dadurch aus der Lösung eines dynamischen Problems mit einem Schlage die Lösung einer ganzen Mannigfaltigkeit solcher Probleme gewinnt, ist eine Eigenschaft, die sich verallgemeinern lässt, indem man überhaupt die Frage nach der Äquivalenz dynamischer Probleme stellt, das heisst die Frage, wann zwei solche Probleme bei Einführung geeigneter Veränderlichen auf dieselben Differentialgleichungen führen[91]).

9. Kleine Schwingungen ohne Reibung. Wenn man ein System materieller Punkte, zwischen denen irgend welche Bedingungsgleichungen bestehen, auf eine beliebige Art, aber hinreichend wenig aus einer Lage *stabilen* Gleichgewichtes entfernt und den Punkten hinreichend kleine, mit den Bedingungen verträgliche Geschwindigkeiten giebt, so bewegt sich das System in der Weise, dass seine Lage der stabilen Gleichgewichtslage stets benachbart bleibt und die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte immer kleine Werte behalten. Solche Bewegungen werden, insofern es sich um Näherungsrechnungen handelt, als *kleine* Schwingungen um die betreffende Gleichgewichtslage bezeichnet; es giebt jedoch auch Fälle, in denen die sogenannte Theorie der kleinen Schwingungen die genaue Darstellung der Bewegungen ergiebt (cycloidal systems bei *Thomson* und *Tait*). Ein einfaches Beispiel sind die von *G. Galilei* betrachteten kleinen Schwingungen eines Pendels, dessen Stange ein wenig aus der vertikalen Lage entfernt wird. Später haben die Beziehungen zur Elastizitätstheorie und im besonderen zur Akustik die Veranlassung zu der Ausbildung der Lehre von den kleinen Schwingungen durch *D. Bernoulli*[92]) und *J. L. Lagrange*[93])

90) *F. Savart*, Annales de chimie 29 (1825); *A. L. Cauchy*, Paris Mém. 9 (1829), p. 117, vergl. *W. Schell*, Bewegung 2, p. 514; *S. D. Poisson*, Mécanique, 2. éd. 1, 1833; *E. Reech*, Mécanique, 1852, p. 265; *de Brettes*, Paris C. R. 66 (1868), p. 657; 67 (1868), p. 896; 68 (1869), p. 1336; 69 (1869), p. 394, 1239; 70 (1870), p. 1400 (Anwendung auf Ballistik); *W. Walton*, Quart. J. of. math. 9 (1868), p. 179; (2) 17 (1868), p. 167; *J. de Tilly*, Brux. Bull. de l'Acad. (2) 36 (1873), p. 160; *H. v. Helmholtz*, Berlin Ber. 1873, p. 501 = Wiss. Abh. 1, p. 158 (lenkbare Luftballons); *Lord Rayleigh*, Theory of sound 2, London 1878, p. 287; *O. Reynolds*, London Phil. Trans. 174 (1883) = Papers 2, p. 51; *E. Jouguet*, J. éc. polyt. (2) cah. 10 (1905), p. 79; Paris C. R. 141 (1905), p. 346.

91) *P. Stäckel*, J. f. Math. 107 (1891), p. 328 sowie IV 11 (*P. Stäckel*).

92) Berlin Mém. année 1753, p. 173.

93) Vielfach findet man die irrtümliche Behauptung, *Lagrange* habe die allgemeine Theorie der kleinen Schwingungen erst in der zweiten Ausgabe seiner Mécanique analytique 1 (1811), 2. partie, section VI gegeben. In Wahrheit findet sie sich schon in den Miscellanea taurinensia 3 (1762—1765) = Oeuvres 1, p. 520 und auch in der ersten Auflage der Mécanique (1788), p. 241—262; in der zweiten Ausgabe sind nur verschiedene Anwendungen hinzugekommen.

gegeben. Im Laufe des 19. Jahrhunderts sind diese Untersuchungen nach verschiedenen Richtungen weitergeführt worden und haben in der Physik und in der Technik mannigfache Anwendung gefunden. Hier soll allein die allgemeine Theorie für den Fall, dass keine Reibungsglieder vorhanden sind, dargestellt werden; für den Fall der Reibung (gedämpfte Schwingungen) vgl. Nr. 20 dieses Artikels.

Als Näherung stellen sich die kleinen Schwingungen folgendermassen ein. Man betrachte ein holonomes System mit r Graden der Freiheit, die Bedingungen seien von der Zeit unabhängig, und es existiere eine Kräftefunktion, die in der Lage stabilen Gleichgewichtes ein reguläres Maximum besitzt. Die r Positionskoordinaten des Systems $q_1, \ldots, q_r$ mögen in der Gleichgewichtslage die Werte $q_1 = 0, \ldots, q_r = 0$ haben. Dann sind für die Anfangszeit $t = 0$ die Grössen $q_1, \ldots, q_r$; $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_r$ kleine Grössen erster Ordnung, und man darf sich unter der Annahme, dass für eine erste Näherung die Grössen dritter und höherer Ordnung keinen Einfluss haben, in den Ausdrücken der lebendigen Kraft T und der Kräftefunktion U auf die Glieder niedrigster Dimension beschränken, sodass

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta, \quad U = -\tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} B_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta$$

wird; die $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$ und $B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}$ sind Konstanten und die Ausdrücke T und U definite positive quadratische Formen der $\dot{q}_\alpha$ bezw. q_α. Bei diesem Ansatze verwandeln sich die r *Lagrange*schen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

in ein System von r linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, nämlich:

$$\sum_\alpha (A_{\alpha\beta}\ddot{q}_\alpha + B_{\alpha\beta}q_\alpha) = 0. \tag{1}$$

Nach einem Satze aus der Theorie der quadratischen Formen[94]) lassen sich, sobald die Determinanten der Formen T und U von Null verschieden sind, was im Folgenden vorausgesetzt werden soll, r lineare

94) I B 2 Nr. 8 (*F. W. Meyer*); man vergleiche ferner für die Anwendungen: *E. B. Christoffel*, J. f. Math. 63 (1864), p. 273; *K. Weierstrass*, Berlin Ber. 1858, p. 207 = Werke 1, p. 233; *C. Jordan*, Paris C. R. 74 (1872) p. 1395; *G. Darboux*, Note VIII seiner Ausgabe der Mécanique analytique von *Lagrange*, Paris 1888; *F. Pockels*, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891, p. 44; *E. J. Routh*, Dynamik 2, Kap. 2 und 7; *Lord Rayleigh*, Theory of sound, 2. ed. 1, London 1894; *E. T. Whittaker*, Dynamics, p. 173 und *A. G. Webster*, Dynamics, p. 572.

Funktionen $s_1, \ldots, s_r$ der $q_1, \ldots, q_r$ so bestimmen, dass gleichzeitig

$$\sum A_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = \sum s_\alpha^2, \qquad \sum B_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = \sum \varrho_\alpha^2 s_\alpha^2$$

wird. Die Grössen $\varrho_1^2, \ldots, \varrho_r^2$ sind die (reellen) Wurzeln der Gleichung

$$|B_{\alpha\beta} - \varrho^2 A_{\alpha\beta}| = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r),$$

deren linke Seite als *Lagrange*sche Determinante bezeichnet wird[94a]); diese Wurzeln mögen alle von einander verschieden sein[94b]). Bei Einführung der *Hauptkoordinaten* s_α[95]) treten an die Stelle der Gleichungen (1) die einfachen Gleichungen:

$$\ddot{s}_\alpha + \varrho_\alpha^2 s_\alpha = 0, \tag{2}$$

denen man durch

$$s_\alpha = \mu_\alpha \sin(\varrho_\alpha t + \sigma_\alpha)$$

genügt; $\mu_1, \ldots, \mu_r$; $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ sind die $2r$ Integrationskonstanten. Die allgemeine Schwingung des Systems ist daher das Ergebnis der Superposition von r Hauptschwingungen (harmonischen Schwingungen) mit den Perioden $\frac{2\pi}{\varrho_1}, \ldots, \frac{2\pi}{\varrho_r}$.[96]) Die Grösse dieser Perioden ist von der Wahl der Anfangsbedingungen unabhängig; wenn diese geändert werden, ändern sich nur die *Amplituden* $\mu_1, \ldots, \mu_r$ und die *Phasen* $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ der Einzelschwingungen. Die Gesamtschwingung ist im allgemeinen nicht periodisch; soll sie es sein, so müssen die Verhältnisse der $\varrho_1, \ldots, \varrho_r$ ganze Zahlen sein.

Erhebliche analytische Schwierigkeiten ergeben sich, wenn man bei den *Lagrange*schen Gleichungen auch die Glieder zweiter oder

---

94a) Für die Bezeichnung der Determinante vergl. I A 2, Nr. 15 (*E. Netto*).

94b) *Lagrange* hatte geglaubt, dass bei gleichen Wurzeln in den Integralen der Gleichungen (2) die Zeit ausserhalb der trigonometrischen Funktionen auftreten müsse, sodass man keine Schwingungen erhält. Diesen Irrtum, in den auch *P. S. Laplace* und *D. S. Poisson* verfallen waren, hat *Weierstrass* (in der Anmerkung 94 angeführten Abhandlung) aufgedeckt; später hat unabhängig von ihm *E. J. Routh* (Stability of motion, Smith price paper, Cambridge 1877) dieselbe Entdeckung gemacht. Das Auftreten gleicher Wurzeln bewirkt nur, dass die Perioden der entsprechenden Hauptschwingungen einander gleich werden; Systeme, bei denen alle Hauptschwingungen dieselbe Periode haben, hat *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. (5) 46 (1898), p. 567 *isoperiodische* Systeme genannt.

95) Der Sache nach hat schon *Lagrange* die Hauptkoordinaten; sie heissen auch harmonische, einfache, normale Koordinaten.

96) Das Prinzip der Superposition der Schwingungen verdankt man *Daniel Bernoulli*, Berlin Mém. année 1753, p. 173: in jedem System sind die gegenseitigen Bewegungen der Körper immer eine Mischung von einfachen, regelmässigen und permanenten Schwingungen verschiedener Arten; vgl. auch *D. Bernoulli*, Petersburg Nov. Comment. 19 ad annum 1775, p. 239.

höherer Ordnung berücksichtigen will; hierfür möge auf IV 12, (*P. Stäckel*) verwiesen werden.

Neben den *freien* Schwingungen hat man *erzwungene* Schwingungen betrachtet[97]). Wenn zu den Kräften, die von der Kräftefunktion U herrühren, noch periodisch wirkende „störende“ Kräfte hinzukommen, die man in erster Näherung proportional trigonometrischen Funktionen linearer Funktionen der Zeit annimmt, so lauten bei Benutzung von Hauptkoordinaten die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\ddot{s}_\alpha + \varrho_\alpha^2 s_\alpha = \sum_\varkappa A_\alpha^{(\varkappa)} \cos(a_\varkappa t + p_\varkappa), \tag{3}$$

und zu den vorher für die Hauptkoordinaten gefundenen Ausdrücken treten noch Glieder der Gestalt hinzu:

$$\frac{A_\alpha^{(\varkappa)}}{\varrho_\alpha^2 - a_\varkappa^2} \sin(a_\varkappa t + p_\varkappa).$$

Sie ergeben Bewegungen, die man als *erzwungene* Schwingungen bezeichnet. Diese Schwingungen haben dieselbe Periode wie die störenden Kräfte, und ihre Amplituden sind ebenfalls von der Wahl der Anfangsbedingungen unabhängig[98]); je nachdem das Vorzeichen von $\varrho_\alpha^2 - a_\varkappa^2$ positiv oder negativ ausfällt, ist die Phase der erzwungenen Schwingungen dieselbe wie die der störenden Kräfte oder um 180° verschoben (*Young*sche Gesetz). Nähert sich $a_\varkappa$ dem Werte ϱ_α, d. h. nähert sich die Periode einer der störenden Kräfte der Periode einer der Hauptschwingungen, so wird die Amplitude einer der hinzutretenden erzwungenen Schwingungen sehr gross. Was dann in Wirklichkeit eintritt, bleibt zweifelhaft, weil die Voraussetzung des ganzen Ansatzes, dass die Schwingungen sehr klein sein sollen, nicht mehr erfüllt ist; man wird daher die Untersuchung von vorn anzufangen haben[98a]). Die Erfahrung zeigt,

97) Der Sache nach hat die Unterscheidung von freien und erzwungenen Schwingungen schon *Th. Young,* Course of a natural and experimental philosophy, London 1802. Die Namen rühren nach *E. J. Routh,* Dynamik 2, p. 245 von *G. B. Airy* her (Tides and waves, London 1842, p. 278).

98) Theorem von *F. W. Herschel,* Artikel: On sound in der Encyclopaedia metropolitana, London 1830.

98a) Wenn man in den Differentialgleichungen (3) $a_\varkappa = \varrho_\alpha$ setzt, so lässt sich die Integration ausführen, und man erhält als Zusatzglied statt des im Texte angegebenen Ausdruckes:

$$\frac{A_\alpha^{(\varkappa)}}{2\varrho_\alpha} t \sin(\varrho_\alpha t + p_\varkappa),$$

so dass also die Zeit ausserhalb der trigonometrischen Funktion auftritt. Man darf jedoch nicht hieraus ohne weiteres Folgerungen auf die in Wirklichkeit stattfindende Bewegung ziehen.

dass in manchen Fällen eine kleine störende Kraft, die annähernd die Periode einer freien Schwingung des Systems hat, beträchtliche Abweichungen von der Gleichgewichtslage hervorrufen kann. Bekannt sind die Erscheinungen der *Resonanz* in der Akustik. Ferner vermeidet man es, Truppen, die über eine Brücke gehen, in gleichem Tritt marschieren zu lassen. Eine Anwendung auf die Bewegung einer Lokomotive gab *F. Redtenbacher* (Gesetze des Lokomotivbaus, Mannheim 1855). Indem er voraussetzte, es sei gestattet, allein die relative Bewegung zwischen dem Radrahmen und dem Kessel der Lokomotive in Betracht zu ziehen, kam er zu dem Schluss, dass die Geschwindigkeit der Lokomotive stets unterhalb sechs bestimmten kritischen Geschwindigkeiten bleiben müsse; vgl. indessen *K. Heun*, Kinetische Probleme der wissenschaftlichen Technik, Jahresber. d. D. M.-V. 9, Heft 2 (1900), p. 82.

In ähnlicher Weise wie freie oder erzwungene Schwingungen um einen stabilen Gleichgewichtszustand, kann man auch freie oder erzwungene Schwingungen um gewisse Bewegungen eines Systems untersuchen, die man auch stabil genannt hat[99]). Das älteste Beispiel hierfür sind wohl die Störungsrechnungen der Astronomen, bei denen die Bahn des gestörten Planeten als eine erzwungene Schwingung um eine Bewegung in einer Keplerschen Ellipse angesehen wird.

Kennt man von den *Lagrange*schen Gleichungen eine partikuläre Lösung $q_\alpha = f_\alpha(t)$, so kann man setzen:

$$q_\alpha = f_\alpha(t) + \varepsilon_\alpha$$

und erhält für die r Grössen ε_α eben so viele Gleichungen der Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot\varepsilon_\alpha}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial \varepsilon_\alpha} = E_\alpha,$$

in denen T_1 einen Ausdruck derselben Form wie T bezeichnet. Unter der Annahme, dass die ε_α und $\dot\varepsilon_\alpha$ stets klein bleiben, einer Annahme, deren Berechtigung freilich in jedem besonderen Falle erst nachgewiesen werden muss, ergeben sich für die Schwingungen um die Bewegung $q_\alpha = f_\alpha(t)$ Gleichungen der Gestalt (1), bei denen jedoch die Koeffizienten $A_{\alpha\beta}$ und $B_{\alpha\beta}$ Funktionen der Zeit werden; entsprechend gestaltet sich die Untersuchung bei erzwungenen Schwingungen. Genaueres hierüber wie über die Lehre von den gestörten Bewegungen findet man in IV 12 (*P. Stäckel*).

99) Über den Begriff der Stabilität der Bewegung vgl. *W. Thomson* und *P. G. Tait*, Handbuch 1, p. 317; *E. J. Routh*, On stability of motion, Cambridge 1877, *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, Heft 2, Leipzig 1898, Kap. 5; *T. Levi-Civita*, Ann. di mat. (3) 5 (1901), p. 221.

Zum Schluss sei noch für die ganze Nummer auf den Bericht von *H. Burkhardt* über Entwicklungen nach oscillierenden Funktionen verwiesen, der als 10. Band des Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung seit 1901 erscheint, aber zur Zeit nicht abgeschlossen ist.

10. Relative Bewegung. Der Begriff der relativen Bewegung[100]) tritt schon bei Erscheinungen auf, die sich auf der als ruhend gedachten Erdoberfläche abspielen; so bei den Vorgängen auf Fahrzeugen und Schiffen, wo man von einer „scheinbaren Schwere" gesprochen hat[101]). Prinzipielle Wichtigkeit gewann dieser Begriff aber, seit *N. Kopernikus* die fortschreitende und drehende Bewegung der Erde erkannt hatte; gerade die in dem Begriff der relativen Bewegung steckenden Schwierigkeiten haben die Haupteinwände gegen die Kopernikanische Lehre geliefert[102]). Bei den meisten Problemen der irdischen Mechanik darf man freilich wegen der beschränkten Genauigkeit von der Bewegung der Erde absehen; allein es muss doch nachgewiesen werden, dass und warum man dazu berechtigt ist, und ausserdem giebt es sehr wohl Fälle, in denen man die Bewegung der Erde berücksichtigen muss. Hierzu gehört z. B. die vielfach behandelte Frage nach der Bahn des Schwerpunktes eines aus geringer Höhe zur Erde fallenden Körpers. Schon *I. Newton* hatte 1679 Versuche hierüber veranlasst, und während des 18. und 19. Jahrhunderts hat dieser Gegenstand immer wieder die Aufmerksamkeit auf sich gezogen[103]). Die Theorie[104]) lässt nämlich auf der nördlichen Halbkugel eine östliche Abweichung von der Lotlinie und daneben eine ausserordentlich kleine südliche Abweichung erwarten. Trotzdem haben sorgfältige Beobachter immer wieder südliche Abweichungen von geringem, aber merklichem Betrage

---

100) Vgl. IV 1, Nr. 13 bis 17 (*A. Voss*).

101) *E. Guyou*, Théorie du navire, Paris 1887, 2. éd. 1894 und sonstige Veröffentlichungen. Vgl. auch *H. Lorenz*, Mechanik, 3. Kap.

102) *N. Kopernikus*, De revolutionibus, Nürnberg 1543, lib. I, cap. 8; siehe auch *G. Galileis* Schriften.

103) *G. B. Guglielmini*, De diurno terrae motu experimentis physico-mathematicis confirmato, Bologna 1792; *J. Fr. Benzenberg*, Versuche über die Gesetze des Falles, Dortmund 1804 (mit einem Beitrag von *C. F. Gauss*, Werke 5, p. 495); Versuche über die Umdrehung der Erde, Düsseldorf 1845; *A. Tadini*, Quotidiana terrae conversio, Mailand 1815; *F. Reich*, Fallversuche über die Umdrehung der Erde, Freiberg 1832; Ann. Phys. (1) 29 (1833), p. 494. Weitere Litteratur bei *H. Bertram*, Programm Berlin 1869; *G. Pesci*, Sulla deviazione meridionale dei gravi, Livorno 1887 und *F. Rosenberger*, Geschichte der Physik 3, Braunschweig 1887, p. 96, 432; vgl. auch IV 7 (*Ph. Furtwängler*).

104) *S. D. Poisson*, J. éc. polyt. cah. 26 (1838), p. 15.

gefunden[105]); ob sich diese nach *A. Föppl*[106]) durch „Geschwindigkeitskräfte", d. h. durch Kräfte erklären lassen, die von der Geschwindigkeit der Erde gegen das Inertialsystem abhängen, oder ob Beobachtungsfehler vorliegen, wird abzuwarten sein.

Nachdem *Chr. Huygens* mit der Einführung der Zentrifugalkraft bei kreisförmiger Bahn eines Punktes, *I. Newton* bei beliebiger Bahn vorangegangen waren, erfuhr die Lehre von der relativen Bewegung eine methodische Ausgestaltung durch *A. Clairaut* (1742)[107]), dessen Abhandlung jedoch in Vergessenheit geriet. Erst 1831 hat dann *G. Coriolis* diese Untersuchungen wieder aufgenommen und weitergeführt[108]).

Auf das im Raume feste Koordinatensystem (Inertialsystem) der ξ, η, ζ bezieht sich die absolute, auf das im Raume bewegliche Koordinatensystem der x, y, z die relative Bewegung eines Punktes oder eines Systems von Punkten. Dann ist die absolute Geschwindigkeit eines Punktes die Resultante aus der relativen Geschwindigkeit und der Fortführungsgeschwindigkeit, d. h. der Geschwindigkeit, die er erhalten würde, wenn man sich den Punkt mit dem beweglichen Koordinatensysteme fest verbunden denkt. Dagegen ist die absolute Beschleunigung die Resultante aus der relativen Beschleunigung, der Fortführungsbeschleunigung und einer „komplementären Beschleunigung". Die Richtung dieser komplementären Beschleunigung steht senkrecht auf der relativen Geschwindigkeit und auf der instantanen Axe der Drehung des beweglichen Koordinatensystems gegen das feste, der Sinn ist der Drehungsrichtung entgegengesetzt, und ihre Grösse ist das doppelte Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung und der Projektion der relativen Geschwindigkeit auf eine zu der instantanen Axe senkrechte Ebene; die komplementäre Beschleunigung ist also das doppelte Vektorprodukt aus der Relativgeschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit. Anders ausgedrückt: trägt man den Vektor der relativen Geschwindigkeit von einem Punkte der instantanen Axe aus ab, so ist die komplementäre Beschleunigung

105) So neuerdings *E. H. Hall*, Phys. Review 17 (1903), p. 179, 245; Am. Acad. Proc. 29 (1904), p. 329; bei einer Fallhöhe von 23 m beträgt die südliche Abweichung 0,005 cm, während der wahrscheinliche Fehler ebenso gross war.

106) München Ber. 44 (1904), p. 390.

107) Paris Mém. année 1742, p. 1. *Clairauts* allgemeine Ausführungen sind stellenweise zu beanstanden, aber die Aufgaben, die er behandelt, sind richtig gelöst; er verwendet dabei die Kraft, die man später als „Coriolissche Kraft" bezeichnet hat. Vgl. *J. Bertrand*, J. de math. (1) 24 (1847), p. 1.

108) Paris Mém. sav. étr. 3 (1832); J. éc. polyt. cah. 21 (1832), p. 260; cah. 24 (1835), p. 142; vgl. auch *J. Bertrand*, J. éc. polyt. cah. 32 (1848), p. 149.

die doppelte Geschwindigkeit, mit der der Endpunkt dieses Vektors um die instantane Axe rotiert. Die der komplementären Beschleunigung entsprechende Kraft hat man *Coriolis*sche Kraft genannt; *Coriolis* selbst bezeichnet sie ihrer geometrisch-mechanischen Bedeutung wegen als „force centrifuge composée“[109]).

Besteht die relative Bewegung in einer Translation gegen das Inertialsystem, so besitzt ein im Raume fester Punkt, von dem bewegten Punkte aus beobachtet, eine relative Geschwindigkeit und eine relative Beschleunigung, die der absoluten Geschwindigkeit und der absoluten Beschleunigung der Translation entgegengesetzt gleich sind. Ist die relative Bewegung überdies gleichförmig, so behalten die Differentialgleichungen der Bewegung die Form, die sie bei dem Inertialsystem hatten.

Besteht die relative Bewegung in einer gleichförmigen Rotation um die ζ-Axe mit der Winkelgeschwindigkeit w, und enthält die ζ-Axe die z-Axe in sich, so ergeben sich für den Punkt x, y, z als die Komponenten der relativen Beschleunigung $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$, der Fortführungsbeschleunigung $-w^2 x, -w^2 y, 0$, der komplementären Beschleunigung $-2w\dot{y}, +2w\dot{x}, 0$, also als die Komponenten der absoluten Beschleunigung $\ddot{x} - w^2 x - 2w\dot{y}, \ddot{y} - w^2 y + 2w\dot{x}, \ddot{z}$. Hieraus ergiebt sich, dass auf der Erde bei einer relativen Geschwindigkeit von 10 m in der Sekunde senkrecht zur Erdaxe die *Coriolis*sche Kraft rund $1/_{7000}$ des Gewichtes beträgt, dass diese also unter gewöhnlichen Umständen unmerklich ist[110]). Wohl aber scheint sie sich bei den Flüssen bemerkbar zu machen; viele Flüsse der nördlichen Halbkugel (Gironde, Oder, Weichsel, Niemen, Donau, Wolga, Ganges u. s. w.) verlegen ihren Unterlauf nach rechts, ihr rechtes Ufer ist von Hügelreihen begrenzt, während das linke von einem ziemlich breiten Streifen flachen Landes umgeben ist (*Baer*sches Gesetz)[111]).

Um allgemein die Bewegung eines materiellen Punktes oder eines Systems solcher Punkte in Bezug auf das bewegliche Koordinatensystem zu bestimmen, hat man den eingeprägten Kräften Trägheitskräfte hinzuzufügen, die den Produkten der Massen in die Fortführungsbe-

---

109) Über die Methoden der Herleitung, die in gewissem Sinne in die Kinematik gehören, vgl. IV 3, Nr. 26 (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*).

110) *A. Föppl,* Dynamik, 1. Aufl., p. 274.

111) *K. E. v. Baer,* St. Pétersbourg Bull. de l'Acad. 2 (1860), 7 (1864), 21 (1876). Vergl. dazu *N. Braschmann,* Paris C. R. 53 (1861), p. 1068; *B. Hoffmann,* Das Baersche Gesetz, Halle 1878; *A. Sprung,* Ann. d. Phys. (2) 14 (1881), p. 128; *F. Klein* und *A. Sommerfeld,* Theorie des Kreisels, p. 184; *S. Günther,* Handb. d. Geophysik, Stuttgart 1897.

schleunigungen bezw. in die komplementären Beschleunigungen entgegengesetzt gleich sind[112]). Es kann sich ereignen, dass die so gewonnenen Kräfte vermöge der Bedingungen des Systems im Gleichgewicht stehen, und man gelangt so zu dem Begriff des *relativen Gleichgewichtes*[113]). Besteht z. B. die Bewegung des Systems der x, y, z wie vorhin in einer Drehung um die ζ-Axe mit der unveränderlichen Winkelgeschwindigkeit w, und wirken auf den Punkt x, y, z der Masse m die Kräfte X, Y, Z, so herrscht relatives Gleichgewicht, wenn die Bedingungen

$$X + mw^2x = 0, \quad Y + mw^2y = 0, \quad Z = 0$$

erfüllt sind.

Die für die Diskussion der Differentialgleichungen der Bewegung so wichtigen Prinzipe: der Schwerpunktssatz, der Flächensatz, der Satz von der lebendigen Kraft verlieren im allgemeinen ihre Gültigkeit bei der relativen Bewegung. Sie bleiben jedoch bestehen, wenn die beweglichen Axen gegen die festen eine gleichförmige Translation ausführen, und sie gelten ebenfalls, abgesehen vom Schwerpunktssatze, wenn der Anfangspunkt der beweglichen Axen der Schwerpunkt des Systems ist und die Axen irgend eine Translation ausführen. Aus diesem Grunde lässt sich der Flächensatz auf das Sonnensystem bei einem Koordinatensysteme anwenden, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt des Sonnensystems ist, und man gelangt so zu dem Begriffe *der invariablen Ebene des Sonnensystems*, den *P. S. Laplace* eingeführt und *L. Poinsot* verschärft hat[114]). Bei der Erörterung der lebendigen Kraft gelangt man zu dem Satze von *S. König*[115]), nach dem die lebendige Kraft eines Systems gleich ist der lebendigen Kraft der im Schwerpunkte konzentrierten Gesamtmasse vermehrt um die lebendige Kraft für die relative Bewegung um den Schwerpunkt. Für beliebige relative Bewegung hat *G. Coriolis* ein modifiziertes Prinzip der lebendigen Kraft aufgestellt, von dem er sogleich wichtige Anwendungen auf Probleme der technischen Mechanik machte. Bildet man nämlich den Ausdruck der lebendigen Kraft, indem man die relativen Geschwindigkeiten benutzt, so ist ihr Differential gleich der elementaren Arbeit der wirken-

112) Diese Kräfte werden häufig als „fingierte Kräfte" bezeichnet. Auf die prinzipiellen Fragen, die sich daran knüpfen (*H. Hertz,* Mechanik, p. 7; *L. Boltzmann,* Prinzipe 1, p. 45), kann hier nicht eingegangen werden.

113) *T. Levi-Civita,* Meccanica, p. 177.

114) Note zur 5. Ausgabe der Élémens de statique, Paris 1830.

115) Acta erud. Lips. 1751: De universali principio aequilibrii et motus in vi viva reperto, deque nexu inter vim vivam et actionem. Vergl. *J. H. Graf,* Der Mathematiker Johann Samuel König und das Prinzip der kleinsten Aktion, Bern 1889.

den Kräfte, vermehrt um die elementare Arbeit von Kräften, die den Kräften entgegengesetzt gleich sind, die auf das System wirken müssen, um es zu zwingen, sich so zu bewegen, als ob es mit den beweglichen Axen fest verbunden wäre; dabei fallen die *Coriolis*schen Kräfte ganz heraus[116]).

c) Beziehungen zu Nachbargebieten.

11. Beziehungen zur Lehre von der Gleichgewichtsgestalt der Fäden. Nachdem *Joh. Bernoulli* gelehrt hatte, dass man die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten einer krummen Fläche erhalte, indem man zwischen ihnen einen Faden ausspanne, und nachdem von *L. Euler* die kürzesten Linien als die Trägheitsbahnen eines auf der Fläche beweglichen Punktes erkannt worden waren[117]), hat *C. Maclaurin* die Beziehung zwischen den Gleichgewichtsgestalten von Fäden und den Bahnkurven von Punkten genauer untersucht[118]). Im 19. Jahrhundert beschäftigte sich besonders *A. F. Möbius* mit diesem Gegenstande[119]) und entwickelte die folgenden beiden Analogien:

Die Masse des Fadenelementes ds sei dm, die zugehörige spezifische (auf die Längeneinheit bezogene) Kraft $\mathfrak{F}$ und die in dm stattfindende Spannung $\mathfrak{T}$. Dann lautet die Gleichgewichtsbedingung in der Sprache der Vektorrechnung:

$$(a) \qquad d\mathfrak{T} + \mathfrak{F}dm = 0.$$

Betrachtet man andrerseits die Fadenkurve als Bahn eines Punktes der Masse μ, auf den die Kraft $\mathfrak{G}$ wirkt, so gilt die Vektorgleichung:

$$(b) \qquad d(\mu\mathfrak{v}) - \mathfrak{G}dt = 0.$$

Ist der Faden homogen, so ist dm proportional dem Linienelemente ds der Fadenkurve, und daher wird, wenn der Punkt diese durchläuft, dm proportional dem Produkte $v\,dt$.

Aus der Vergleichung von (a) und (b) folgt jetzt:

1. Sind die Kräfte $\mathfrak{F}$, welche auf einen *homogenen* Faden seiner ganzen Länge nach wirken, im Gleichgewichte, so wird ein materieller

116) Vgl. auch *E. Lottner*, J. f. Math. 54 (1857), p. 197; *E. Bour*, J. de math. (2) 8 (1863), p. 8; *C. Neumann*, Math. Ann. 1 (1869), p. 195; *P. Gilbert*, Bruxelles Ann. Soc. scient. 3 A. (1879), p. 58, 70, 80, 4. A. (1880), p. 53; *E. Padova*, Ann. d. mat. (2) 12 (1884), p. 265; *A. Astor*, Bull. sciences math. (2) 15 (1891), p. 255; *A. Legoux*, Toulouse Ann. de la fac. 8 (1894); *A. S. Chessin*, Am. Math. Soc. Trans. 1 (1900), p. 116.

117) *Joh. Bernoulli*, Acta erud. Lips. 1698, p. 466 = Opera 1, p. 262; *L. Euler*, Mechanica, 1736, 2; vgl. auch *P. Stäckel*, Leipzig Ber. 44 (1893), p. 444.

118) A complete system of fluxions, Edinburgh 1742.

119) Lehrbuch der Statik, Leipzig 1837, 2, Kapitel 7 = Werke 3, p. 429.

Punkt, der sich in der Fadenkurve zu bewegen anfängt, darin fortgehen, und seine Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ wird an jeder Stelle der Spannung $\mathfrak{T}$ proportional sein, wenn auf ihn nach einer der Kraft am Faden entgegengesetzten Richtung eine beschleunigende Kraft $\mathfrak{G}$ wirkt, die dem (skalaren) Produkte aus dieser Kraft $\mathfrak{F}$ und der Spannung $\mathfrak{T}$ proportional ist, und umgekehrt.

2. Aus jeder Bewegung eines durch eine beschleunigende Kraft $\mathfrak{G}$ getriebenen Punktes kann man das Gleichgewicht an einem, im allgemeinen nicht homogenen Faden ableiten, indem man die Bahn des Punktes eine Fadenkurve sein lässt, die Masse dm jedes Fadenteils der Zeit, in der er vom Punkte durchlaufen wird, proportional annimmt und auf jeden Punkt des Fadens eine Kraft $\mathfrak{F}$ wirken lässt, die der beschleunigenden Kraft $\mathfrak{G}$ des Punktes proportional, aber entgegengesetzt gerichtet ist; dabei steht die Spannung $\mathfrak{G}$ des Fadens in konstantem Verhältnisse zu der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Körpers und umgekehrt.

Diese zweite Analogie von *Möbius* hat *J. Petersen* auf Systeme von Fäden verallgemeinert und so aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, angewandt auf das Gleichgewicht von Fäden, für Punktbewegungen das Prinzip der kleinsten Aktion und das *Hamilton*sche Prinzip hergeleitet[120]).

Weitere Untersuchungen über Analogien zwischen Gleichgewichtsgestalten von Fäden und Bahnen von Punkten haben nach geometrisch-mechanischer Richtung besonders *O. Bonnet*[121]) und *P. Serret*[122]), nach analytischer (Zusammenhang mit der Variation von Integralen, vgl. auch Nr. 12 dieses Artikels) besonders *A. Clebsch*[123]) und *P. Appell*[124]) angestellt.

12. Beziehungen zur Optik. Wenn in einem Medium von veränderlicher optischer Dichtigkeit der absolute Brechungsindex n eine

120) Dynamik, p. 83; vgl. auch *A. F. Möbius,* Werke 3, p. 441.

121) J. de math. (1) 9 (1844), p. 217.

122) Théorie nouvelle géométrique et mécanique des courbes de double courbure, Paris 1860; vergl. *R. Townsend,* Quart. J. of math. 13 (1874), p. 217; *O. Staude*, Leipzig Ber. 1886, p. 199.

123) J. f. Math. 57 (1860), p. 93.

124) Paris C. R. 96 (1883), p. 688, Toulouse Ann. de la fac. 1 (1887), Bull. soc. math. de France 19 (1891), p. 97; Mécanique 1, p. 201, 578; vgl. auch *D. Padeletti,* Giorn. di mat. 14 (1876), p. 14; *G. Kainz*, Programm Münnerstadt 1885; *A. Legoux*, Toulouse Mém. (8) 7² (1885), p. 159; *H. Andoyer,* Paris C. R. 100 (1885), p. 1577; *R. Marcolongo,* Napoli Acc. Rend. (2) 2 (1888), p. 363; *G. Pennacchietti,* Palermo Circ. mat. Rend. 6 (1892), p. 14, 26; Catania Acc. Gioenia Atti (4) 3, 4 (1892); *C. A. Laisant,* Nouv. ann. (4) 2 (1902), p. 343; *A. Guldberg*, Christiania Vidensk. Selsk. Skr. 1902, Nr. 9.

abteilungsweise stetige Funktion des Ortes $n(x, y, z)$ ist, so beschreibt ein in dem Medium von dem Punkte A nach dem Punkte B gehender Lichtstrahl gemäss dem *Snellius-Descartes*schen Brechungsgesetze eine solche Bahn, dass das von A nach B erstreckte Linienintegral

$$J = \int_{(A)}^{(B)} n\,ds, \tag{1}$$

in dem ds das Linienelement der Bahn bedeutet, ein Minimum wird. Hieraus ergeben sich, wenn $n(x, y, z)$ stetig ist, nach den Regeln der Variationsrechnung für die Bahn die Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right) - \frac{\partial n}{\partial x} = 0, \\ \frac{d}{ds}\left(n\frac{dy}{ds}\right) - \frac{\partial n}{\partial y} = 0, \\ \frac{d}{ds}\left(n\frac{dz}{ds}\right) - \frac{\partial n}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

aus denen x, y, z als Funktionen von s zu bestimmen sind; ist die Funktion $n(x, y, z)$ abteilungsweise stetig, so erhält man für jedes Intervall ein System solcher Gleichungen, und der Uebergang von dem einen zum andern wird immer durch das Brechungsgesetz vermittelt.

Bei der *Emissionshypothese* ist n proportional der Lichtgeschwindigkeit v an der betreffenden Stelle, und das Lichtteilchen bewegt sich daher in der Bahn, die ihm durch das Prinzip der kleinsten Wirkung vorgeschrieben wird, nämlich so, dass das von A nach B erstreckte Linienintegral

$$\int_{(A)}^{(B)} v\,ds \tag{3}$$

ein Minimum wird[125]). *P. S. Laplace* hat versucht, diesen Ansatz auf die Doppelbrechung zu erweitern, indem er

$$v^2 = a + b\cos^2\omega$$

setzte, wo ω den Winkel des Lichtstrahles mit der optischen Axe bezeichnet[126]); hiergegen hat jedoch *C. F. Gauss* eingewandt, dass bei

125) Dies hat schon *M. de Maupertuis* hervorgehoben, Berlin Mém. année 1745, p. 276; die Widersprüche, die *E. Mach*, Mechanik, p. 394 bei Maupertuis findet, erklären sich daraus, dass dieser die Emissionshypothese und nicht, wie *Mach* irrtümlich annimmt, die Undulationshypothese zugrunde legt. Noch 1833 vertritt *S. D. Poisson* in seiner Mécanique 2. éd. 1, p. 301 die Emissionshypothese; vgl. auch *F. Rosenberger*, Geschichte der Physik, 3, Braunschweig 1887, p. 188 und *H. Burkhardt*, Bericht, p. 587, 563.

126) Paris Mém. (1) 10 (1810) = Oeuvres 12, p. 267.

der Anwendung des Prinzipes der kleinsten Aktion die Gültigkeit des Satzes von der Erhaltung der lebendigen Kraft vorausgesetzt werde, während dies hier nicht zutreffe[127]).

Bei der *Undulationshypothese* ist n umgekehrt proportional der Lichtgeschwindigkeit v an der betreffenden Stelle, und man wird so auf das Integral

$$(4) \qquad \int_{(A)}^{(B)} \frac{ds}{v}$$

geführt, das wegen $v = ds/dt$ mit dem Prinzip der schnellsten Ankunft von *P. Fermat*[128]) gleichbedeutend ist. Die hierin liegende Analogie veranlasste *Joh. Bernoulli* bei dem Problem der Brachistochrone die Fallbewegung durch eine Lichtbewegung zu ersetzen[129]), die in einem horizontal geschichteten Medium vor sich geht, dessen optische Dichtigkeit sich stetig ändert und zwar so, dass die Lichtgeschwindigkeit in der Tiefe h unter dem Anfangspunkte A proportional $\sqrt{2gh}$ ist. Dieser Ansatz führt vermöge des Brechungsgesetzes sofort zur Differentialgleichung der Zykloide; er ist aber, wie schon *Joh. Bernoulli* bemerkt hat, ebenfalls anwendbar, wenn anstatt der Schwere irgend eine beschleunigende Kraft wirkt, für die der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft gilt. Ist also

$$\tfrac{1}{2}v^2 = U(x, y, z) + C,$$

so hat man

$$n = 1 : \sqrt{2(U + C)}$$

zu setzen. Auch der Fall, dass die Brachistochrone auf einer gegebenen Fläche $f(x, y, z) = 0$ liegen soll, lässt sich auf diese Weise erledigen, denn diese Nebenbedingung bewirkt nur, dass in den Gleichungen (2) auf den rechten Seiten noch die Glieder $\lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$ hinzutreten, wo λ den *Euler-Lagrange*schen Multiplikator bezeichnet; aus diesen Gleichungen in Verbindung mit $f(x, y, z) = 0$ ist die Bahn auf der Fläche zu bestimmen.

Die durch die Gleichungen (2) definierten Kurven treten auch bei der Frage nach der Gleichgewichtsgestalt von Fäden auf, nämlich

127) J. f. Math. 4 (1829) = Werke 5, p. 25.

128) *P. Fermat,* Varia opera, Toulouse 1779, p. 156 = Oeuvres 1, p. 175, 3, p. 153; Epistolae *Renati Cartesii,* 3 (1692), p. 128, 151; *G. W. Leibniz,* Acta erud. Lips. 1692, p. 185; *Chr. Huygens,* Traité de la lumière, Paris 1690.

129) Acta erud. Mai 1697 = Opera 1, p. 187, deutsch in Ostwalds Klassikern, Heft 46, wo man auch weitere geschichtliche Bemerkungen findet; vgl. auch *C. G. Gerhard,* Geschichte der Mathematik in Deutschland, München 1877 und *E. Mach.* Mechanik, 3. Kapitel § 8, 4. Kapitel § 1.

wenn ein Faden unter dem Einfluss einer Kraft, die von einer Kräftefunktion $n(x, y, z)$ herrührt, in Gleichgewicht sein und die Spannung den Wert $-n(x, y, z)$ haben soll[130]).

Die Kurven (2) sind der Gegenstand vieler Untersuchungen gewesen[131]). Hervorgehoben zu werden verdient eine von *W. Thomson* und *P. G. Tait* entdeckte Eigenschaft[132]), die sich als Verallgemeinerung eines berühmten Satzes von *C. F. Gauss* über geodätische Linien krummer Flächen auffassen lässt. Betrachtet man nämlich bei gegebenem $n(x, y, z)$ die Gesamtheit der Kurven (2), die auf einer festen Fläche S senkrecht stehen, und trägt auf ihnen von den Punkten A aus, in denen sie S treffen, solche Bogen AB ab, dass die Integrale J, über die Wege AB genommen, alle denselben Wert haben, so bilden die Punkte B eine zweite Fläche, die wieder auf allen durch sie gehenden Kurven (2) senkrecht steht.

Als Fortsetzung der Arbeiten von *J. Bernoulli*, *M. de Maupertuis*, *P. S. Laplace* sind im 19. Jahrhundert *R. Hamiltons* dynamische Untersuchungen zu nennen, die durchaus ihre Wurzel in optischen Betrachtungen haben; *Hamilton* wurde dabei zu der glänzenden Entdeckung der *konischen Refraktion* geführt[133]). Genaueres hierüber findet man in den Artikeln IV 11 und 12 (*P. Stäckel*).

B. Spezielle Ausführungen.

a) Der einzelne Punkt.

13. Freie Bewegung in der Ebene und im Raume. Zahlreich sind die Versuche, die Ergebnisse der Mechanik des Himmels, die im Laufe des 17. und 18. Jahrhunderts mit Hilfe der höheren Analysis hergeleitet worden waren, einem grösseren Kreise durch elementare Darstellung zugänglich zu machen; im Besonderen tritt dabei das

---

130) *W. Schell*, Bewegung 2, p. 161 und *P. Appell*, Mécanique 1, p. 205.

131) Von der umfangreichen Litteratur seien hier nur angeführt: *L. Euler*, Petersburg Comment. ad annos 1734/35, p. 185; Petersburg Acta ad ann. 1777, 2, p. 70; St. Pétersbourg Mém. 8 (1817/18), p. 17, 29, 41; *E. Roger*, J. de math. (1) 13 (1848), p. 41; *E. Kummer*, Berlin Monatsber. 1860, p. 405 = J. f. Math. 61 (1863), p. 263; *O. Bonnet*, Nouv. ann. (3) 6 (1887), p. 335, 554; *E. Vicaire*, Paris C. R. 106 (1888), p. 456; *G. Darboux*, Leçons sur la théorie des surfaces, 2, Paris 1889, livre 5, chap. 6 u. 7; *P. Appell*, Mécanique, 1, p. 201, 578; *L. Fejér*, Math. Ann. 61 (1905), p. 432.

132) Treatise on natural philosophy, 2. ed., 1^1, p. 353; vgl. auch *G. Darboux*, Leçons sur la théorie des surfaces, 2, Paris 1889, p. 449.

133) Vgl. für das Physikalische *H. Lloyd*, Phil. Mag. (3) 2 (1832), p. 112, 207; Ann. Phys. 28 (1833), p. 91, 104, für das Dynamische *F. Klein*, Jahresber. d. D. M.-V. 1 (1892), p. 35; *E. Study*, Jahresber. d. D. M.-V. 14 (1905), p. 424.

Bestreben hervor, im Gegensatz zu der rechnenden Astronomie geometrische Hilfsmittel zu verwenden und so wenigstens eine Einsicht in die qualitativen Verhältnisse der Erscheinungen, vor allem bei der Störungstheorie zu gewinnen. Um nur einige Namen zu nennen, so hat in Frankreich *P. S. Laplace* selbst eine populäre Darstellung seiner Mechanik des Himmels gegeben[134]). In England sind etwa *Miss Mary Sommerville*[135]), *Sir John Herschel*[136]) und *G. B. Airy*[137]) anzuführen, in Deutschland *A. F. Möbius*[138]), in Österreich *J. J. v. Littrow*[138a]); vgl. auch die Lehrbücher von *K. Israel-Holtzwart*[139]), *Th. Epstein*[140]) und *M. W. Meyer*[141]). Eine zusammenfassende Darstellung dieser umfangreichen elementar-astronomischen Litteratur wäre sehr erwünscht.

I. Newton hatte aus den Keplerschen Gesetzen sein Anziehungsgesetz hergeleitet[142]). Dass umgekehrt eine dem Quadrate des Abstandes reziproke Zentralkraft stets zu einer Keplerschen Bewegung in einem Kegelschnitte führt, war dann von *Joh. Bernoulli* gezeigt worden[143]). Einen Fortschritt in der Integration der hierbei auftretenden Differentialgleichungen der Bewegung

---

134) Exposition du système du monde, Paris 1796, 6. éd. 1836 = Oeuvres 6.

135) On the connexion of physical sciences, London 1834 (zahlreiche Auflagen), deutsch von *K. F. Klöden*, Berlin 1835.

136) A treatise on astronomy, London 1833, deutsch von *Michaelis*, Leipzig 1837; Outlines of astronomy, London 1849 (zahlreiche Auflagen).

137) Gravitation, an elementary explanation of the principal perturbations in the solar system, London 1834 (zahlreiche Auflagen), deutsch von *K. F. v. Littrow*, Stuttgart 1834, und *R. Hoffmann*, Leipzig 1891; vergl. auch *B. Schöne*, Programm Realgymn. Borna 1895, 1908.

138) Die Hauptsätze der Astronomie, Leipzig 1836, 5. Aufl. 1868, 10. Aufl. besorgt von *W. F. Wislicenus* 1903; Die Elemente der Mechanik des Himmels, Leipzig 1843 = Werke 4, p. 1—138; vgl. auch J. f. Math. 31 (1846), p. 174 = Werke 4, p. 319. *Möbius* hat die Epizyklen der Alten wieder zu Ehren gebracht: sie sind das geometrische Äquivalent der Reihenentwicklungen nach trigonometrischen Funktionen; vgl. auch *G. Mansion*, Bruxelles Soc. scientif. 25 A. (1901), p. 71 und *E. Pasquier*, ebenda p. 141.

138a) Theoretische und praktische Astronomie, Wien 1821—27 (zahlreiche Auflagen).

139) Elemente der theorischen Astronomie, Wiesbaden 1885; Elemente der Astromechanik, Wiesbaden 1886.

140) Geonomie, Wien 1888.

141) Das Weltgebäude, Leipzig 1898.

142) Principia, lib. 1, sectio VIII.

143) Paris Mém. année 1710, p. 521 = Opera 1, p. 470; *Bernoulli* behandelt hier auch den allgemeinen Fall, dass die anziehende Kraft irgend eine Funktion der Entfernung ist; vgl. auch *J. Hermann*, Phoronomia, Amsterdam 1716, p. 73.

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -k^2\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\dot{y}}{dt} = -k^2\frac{y}{r^3} \quad (r^2 = x^2 + y^2)$$

hat *C. G. J. Jacobi* (1842) gemacht[144]), dessen Verfahren *W. Thomson* und *P. G. Tait* wieder aufgenommen und vereinfacht haben[145]).

Der Flächensatz ergibt nämlich

$$(2) \qquad x\dot{y} - y\dot{x} = c,$$

und aus (1) folgt durch Multiplikation mit (2):

$$c\frac{d\dot{x}}{dt} = -k^2\frac{d}{dt}\frac{y}{r}, \quad c\frac{d\dot{y}}{dt} = k^2\frac{d}{dt}\frac{x}{r}.$$

Diese Gleichungen lassen sich unmittelbar integrieren, und wenn man mit den so erhaltenen Ausdrücken für $\dot{x}$ und y abermals den Flächensatz bildet, ergiebt sich sofort die Gleichung des Kegelschnittes. Die Methode von *Jacobi* führt auch dann zum Ziel, wenn die Grösse F der Zentralkraft irgend eine homogene Funktion der Dimension -2 von x und y ist[145a]). Eine andere Methode der Integration, die die Differentialgleichung der Bahn liefert, sobald F allein von $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ abhängt, also s und t nicht enthält, beruht auf der Formel von *J. Binet*[146]):

$$F = -\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\varphi^2}\right).$$

Neben dem nach ihm benannten Anziehungsgesetze hatte *I. Newton* auch den Fall betrachtet, dass F irgend einer Potenz von r proportional ist, und bewiesen, dass schon sehr kleine Abweichungen des Exponenten von -2 merkliche Perihelbewegungen zur Folge haben würden[147]). Die Annahme $F = ar^n$ ist dann im 19. Jahrhundert wiederholt untersucht worden[148]). Im Besonderen hat *J. Cl. Maxwell* bei seinen Unter-

---

144) J. f. Math. 24 (1842) p. 5 = Werke, Bd. 4, p. 281.

145) Treatise, p. 27; vergl. auch *H. Hart*, Messenger (2) 9 (1880), p. 131.

145a) Für den Fall, dass F ein homogene Funktion von x und y beliebiger Dimension ist, vergl. *W. Stekloff*, Moskau, Phys. Sect. 9, Heft 1, p. 16; dort auch weitere Litteratur.

146) J. éc. polyt. cah. 20 (1831), p. 249; *M. Jullien*, Problèmes 1, p. 312 und *P. Appell*, Mécanique 1, p. 370, 373; Verallgemeinerung von *G. Pennacchietti*, Catania Atti Acc. Gioenia (4) 14 (1901), Nr. 2. Die Anwendung der *Binet*schen Formel stösst auf Schwierigkeiten, wenn die Tangente der Bahn durch das Anziehungszentrum geht oder wenn die Bahn einen Rückkehrpunkt besitzt, vgl. *H. G. Zeuthen*, Tidsskr. (4) 4 (1880), p. 3.

147) Principia, lib. 1, sectio 9, prop. 45; vgl. auch *M. Jullien*, Problèmes 1, p. 324.

148) Die Litteratur der älteren Zeit findet man bei *P. van Geer*, Onderzoek eener bijzondere Omstandigheid der centrale Beweging, Leiden 1872. Ferner

suchungen aus der kinetischen Gastheorie eine der fünften Potenz der Entfernung umgekehrt proportionale Anziehung der Gasmoleküle herangezogen[149]).

A. Clairaut hatte zuerst geglaubt, dass zur Erklärung der Bewegung des Mondperigäums das *Newton*sche Gesetz nicht ausreiche, da eine erste Näherung Werte ergab, die mit den Beobachtungen nicht übereinstimmten, und hat deshalb statt des *Newton*schen Gesetzes ein Kraftgesetz der Form $ar^{-2} + br^{-3}$ angenommen (Paris Mém. 1743, 1745), er kehrte aber in der Théorie de la Lune, Paris 1752, zu den *Newton*schen Gesetze zurück, da es bei genauerer Rechnung zu einer befriedigenden Darstellung der Erscheinungen führte. Die Form $ar^{-2} + br^{-4}$ ergibt sich als erste Näherung, wenn man die Anziehung eines abgeplatteten Rotationsellipsoides betrachtet und hat daher das Interesse der Astronomen erregt; es ist bemerkenswert, dass dabei kein säkulares Glied in der mittleren Bewegung auftritt[150]). Allgemeine Untersuchungen über die Form $ar^n + br^m$ hat *G. Schouten* angestellt[150a]). Man hat ferner die Form $e^{-\mu r} : r^2$ herangezogen, die einer Absorption der Gravitation in dem vermittelnden Medium entspricht[150b]), und es sind im Zusammenhange mit der Molekulartheorie und ihrer Verwendung für Optik und Kapillarität Sätze für beliebige $F(r)$ aufgestellt worden[150c]). Endlich haben sich bemerkenswerte Be-

---

seien genannt: *H. Th. Noth,* Diss. Jena 1869; *A. Legoux,* Nouv. ann. (2) 19 (1880), p. 340; *A. G. Greenhill,* London Math. Soc. Proc. 22 (1891), p. 264 und *P. G. Tait* and *W. J. Steele,* Dynamics, Cambridge 1856.

149) Siehe etwa Theory of heat, London 1871.

150) *P. A. Hansen,* Astr. Nachr. 38 (1854); *H. Seeliger,* Astr. Nachr. 91 (1873), p. 193; *H. Gyldén,* Paris C. R. 91 (1880), p. 957.

150a) Nieuw Archief 13 (1886), p. 11, 117, 14 (1887), p. 1; Amsterdam Versl. ed meded. (3) 3 (1887), p. 373; Arch. néerl. 22 (1887), p. 158, 392; vergl. auch *H. Gyldén,* Stockholm Öfv. 17 (1879), p. 1.

150b) *H. Seeliger,* Astr. Nachr. 137 (1895), p. 129; München Ber. 26 (1896), p. 373; *C. Neumann,* Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen, Leipzig 1896; *A. Korn,* München Ber. 33 (1903), p. 383, 563.

150c) Auf die physikalische Litteratur kann hier nicht eingegangen werden. Von den zahlreichen mathematischen Untersuchungen seien nur angeführt: *L. Euler,* Petersburg Nov. Comment. ad annos 1752—1755, p. 164; *K. H. Schellbach,* J. f. Math. 45 (1853), p. 255; *J. Fr. Stader,* J. f. Math. 46 (1853), p. 262; *A. Clebsch,* Vorlesungen über Mechanik (autographiert), Karlsruhe 1858; *M. Jullien,* Problèmes 1, p. 311 (hier auch weitere Litteratur); *J. Boussinesq,* Paris C. R. 84 (1877), p. 944; 85 (1877), p. 65, 538; *D. J. Korteweg,* Amst. Versl. ed meded. 20 (1884), p. 249; Arch. néerl. 21 (1886), p. 201; Wien Ber. 93 (1886), p. 995; *O. Staude,* Dorpat Nat. Ges. 10 (1893), p. 328; *R. Lehmann-Filhés,* Astr. Nachr. 145 (1898), p. 383; *J. v. Vieth,* Zeitschr. Math. Phys. 48 (1902), p. 249.

ziehungen zwischen den Bewegungen ergeben, die zu verschiedenen Gesetzen der Anziehung gehören[151]).

Auch die Bewegungen eines Teilchens, die sich auf Grund elektrodynamischer Elementargesetze ergeben, sind genauer erforscht worden, jedoch ist die Hoffnung, die man daran knüpfte, zu einer elektromagnetischen Erklärung der Gravitation zu gelangen, nicht in Erfüllung gegangen[152]). In diesem Zusammenhange wären noch die modernen Untersuchungen über die Bewegung eines Elektrons zu nennen, die aber freilich aus dem Rahmen der elementaren Dynamik heraustreten; es möge genügen, hier die Namen *M. Abraham, H. A. Lorentz, K. Schwarzschild, A. Sommerfeld* zu nennen.

Viele Autoren haben sich mit dem Problem der Bewegung eines Punktes beschäftigt, der von zwei festen Zentren nach dem *Newton*schen Gesetze angezogen wird. Für die Astronomie haben diese Untersuchungen bis jetzt keine Verwendung gefunden; für die Mathematik aber sind sie wichtig geworden, denn es ist bei ihnen das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung aufgetreten, und sie haben den Anstoss zu der Einführung der elliptischen und damit allgemeiner der krummlinigen Koordinaten gegeben[153]). Man hat das

151) *L. Boltzmann,* Prinzipe 1, 1897, p. 83; *P. Stäckel,* Gött. Nachr. 1898, p. 157; vgl. auch IV 11 (*P. Stäckel*), Abschnitt: Transformation der Bewegungen.

152) *C. Seegers,* Diss. Göttingen 1864; *W. Scheibner,* Zeitschr. Math. Phys. 13 (1868), p. 37; Leipzig Ber. 49 (1897), p. 578; *F. G. Holzmüller,* Diss. Halle 1870 = Zeitschr. Math. Phys. 5 (1870), p. 69; *F. Tisserand,* Paris C. R. 75 (1872), p. 760; *E. Riecke,* Gött. Nachr. 1874, p. 665; *G. Lolling,* Diss. Göttingen 1882; Nova Acta Leopold. 44 (1883), p. 273—336; *M. Lévy,* Paris C. R. 95 (1882), p. 986; *A. Servus,* Diss. Halle 1885; *O. Liman,* Diss. Halle 1886; *E. Ritter,* Zeitschr. Math. Phys. 37 (1892), p. 8; *S. Oppenheim,* Jahresber. des k. k. Akad. Gymn. Wien 1894/95; vgl. auch V 2, Nr. 21 bis 24 (*J. Zenneck*) und VI 2 23 (*S. Oppenheim*).

153) *L. Euler,* Berlin Mém. année 1760 (1767), p. 228; Petersburg Nov. Comment. 10 ad annum 1764 (1766), p. 207; 11 ad annum 1765 (1767), p. 152; *J. L. Lagrange,* Misc. Taur. 2 (1762) = Oeuvres, 1, p. 363; Mécanique 2, sect. 7, chap. 3; *A. M. Legendre,* Exercices de calcul intégral 2, Paris 1817; Traité des fonctions elliptiques 1, Paris 1827, p. 411; *C. G. J. Jacobi,* Dynamik 1842/43, 29. Vorlesung; J. f. Math. 29 (1845) = Werke 4, p. 465; *J. Liouville,* J. de math. (1) 12 (1847), p. 410; *A. Desboves,* J. de math. (1) 13 (1848), p. 369; *J. A. Serret,* J. de math. (1) 13 (1848), p. 17; Note 2 zu Bd. 2 der Ausgabe der Mécanique von *Lagrange,* Paris 1853; *O. Bonnet,* Note 5 zu derselben Ausgabe; *A. Desboves,* Paris C. R. 47 (1858), p. 708; *L. Königsberger,* Diss. Berlin 1860; *A. Cayley,* Brit. Ass. 1862 = Papers 4, p. 513; *J. Prätorius,* Diss. Breslau 1863; *B. Th. Hülsen,* Berlin 1869; *P. Perlewitz,* Diss. Leipzig 1872 = Zeitschr. Math. Phys. 18 (1873), p. 58; *B. Closterhalfen,* Diss. Bonn 1874; *A. G. Greenhill,* London Math. Soc. Proc. 11 (1880) p. 104; *G. Morera,* Giorn.

Problem auch durch Wahl anderer Anziehungsgesetze und durch Hinzunahme weiterer fester oder nach gegebenem Gesetze beweglicher Zentren erweitert[154]).

Die umgekehrte Aufgabe, aus bekannten Eigenschaften der Bewegungen das Gesetz der Kraft zu ermitteln, hatte *I. Newton* für die *Kepler*schen Bewegungen in einem Kegelschnitte gelöst. Zu einem allgemeineren Probleme dieser Art führte im 19. Jahrhundert die Theorie der Doppelsterne. Die Beobachtungen zeigen nämlich, dass die *scheinbare* Bahn eines Doppelsternes am Himmelsgewölbe um den anderen eine Ellipse ist, bei der sich der andere Stern jedoch nicht in einem Brennpunkte befindet, und dass diese Ellipse nach dem Flächensatze durchlaufen wird; der feste Endpunkt des Radiusvektors liegt dabei in dem zweiten Stern. Um das Gesetz der Kraft zu finden, mit der sich die Doppelsterne anziehen, hat man also die Aufgabe zu lösen, alle Kraftgesetze zu ermitteln, die allein von der Lage des bewegten Punktes abhängen und, wie auch die Anfangsbedingungen gewählt seien, eine Bewegung in einem Kegelschnitte ergeben. Dieses zuerst von *A. Yvon Villarceau*[155]) gestellte und gelöste Problem ist dann von *J. Bertrand*[156]) von neuem behandelt worden. Es hat sich ergeben, dass die Kraft, wenn sie nur von der Entfernung abhängen soll, entweder der Entfernung proportional oder

---

di mat. 18 (1880), p. 34; *O. Staude*, Dorpat Nat. Ges. 8 (1887), p. 249; Acta math. 10 (1887), p. 183; *G. Darboux*, Note in seiner Ausgabe der Mécanique von *Lagrange* 2, Paris 1889, p. 349; *R. Haussner*, Diss. Göttingen 1889 = Giorn. di mat. 29 (1891), p. 276, 379; *P. Novikoff*, Arbeiten d. 7. Vers. russ. Natf. u. Ärzte, St. Petersburg 1890, Math. Abt. p. 38; *G. Bonacini*, Giorn. di mat. 26 (1889), p. 352; 28 (1890), p. 44, 132; *J. Andrade*, J. éc. polyt. cah. 60 (1890), p. 1; *G. Mühle*, Diss. Halle 1894; *H. Franzen*, Diss. Halle 1896; *N. Saltykoff*, Charkow Math. Ges. (2) 7 (1900), p. 1; *C. V. L. Charlier*, Mechanik des Himmels 1, Leipzig 1902, p. 117; *A. M. Hiltebeitel*, Am. Math. Soc. Bull. (2) 11 (1905), p. 482.

154) *J. L. Lagrange* fügte ein in der Mitte der Verbindungsstrecke der Zentra liegendes drittes Zentrum hinzu, das proportional der Entfernung anzieht (vgl. *C. G. J. Jacobi*, Dynamik, 29. Vorlesung); *O. Bonnet*, Note in der *Bertrand*schen Ausgabe der Mécanique von *Lagrange*, Paris 1855; *A. G. Wijthoff*, Nieuw Archief (2) 3 (1896), p. 1. Andere Gesetze der Anziehung haben untersucht *W. Velde*, Programm Berlin 1889 und *Fr. Wöller*, Diss. Kiel 1905; dieser lässt das eine Zentrum anziehen, das andere abstossen, was für *Ph. Lenards* Theorie der Dynamiden, Ann. der Physik (4) 1 (1903), p. 714 von Bedeutung ist.

155) Connaissance des temps pour 1852; vgl. auch *J. Casey*, Quart. J. of math. 5 (1862). Aber schon *J. Hermann*, Phoronomia, Amsterdam 1716, p. 74, hatte gefragt, welches Anziehungsgesetz gewählt werden müsse, damit die Bahnen algebraische Kurven seien.

156) Paris C. R. 77 (1873), p. 849; 84 (1877), p. 671, 731, 944; 85 (1877), p. 65; 118 (1894), p. 18.

ihrem Quadrate umgekehrt proportional sein muss; da aber bei dem ersten Gesetze der andere Stern stets im Mittelpunkte der Bahnellipse stehen müsste, so ist das zweite anzunehmen. *J. Bertrand* hat das Problem dahin erweitert, dass die Bahn, wenn nur die Anfangsgeschwindigkeit unter einer bestimmten Grenze liegt, immer eine geschlossene Kurve sein soll, und dieselben Gesetze gefunden. An *Bertrands* Veröffentlichungen[156]) hat sich eine erhebliche Litteratur angeschlossen[157]).

14. Bewegung auf einer Kurve. Dass sich ein materieller Punkt auf einer vorgeschriebenen ebenen Kurve bewegt, lässt sich erreichen, indem man ihn an einem gewichtlosen Faden befestigt und diesen über die Evolute der gegebenen Kurve spannt; *Chr. Huygens* ist sogar durch die Frage, wie man die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Cykloide verwirklichen könne, zu seiner Theorie der Evoluten geführt worden[159]). Ist die vorgeschriebene Bahn eine Raumkurve, so hat man *G. Monges* Lehre von den Filarevoluten heranzuziehen, die kürzeste Linien der abwickelbaren Fläche der Krümmungsachsen sind[160]); aber es genügt jetzt nicht ein einziger Faden, vielmehr muss man einen zweiten hinzunehmen, der bewirkt, dass der erste immer die Richtung der Tangente der Filarevolute beibehält[161]). Bei dem Kreispendel kann man statt des Fadens auch eine gewichtlose Stange

---

157) *G. Lespiault*, Bull. sciences math. (1) 4 (1873), p. 393; *M. Chevilliet*, Nouv. ann. (2) 13 (1874), p. 97; *G. Darboux*, Paris C. R. 84 (1877), p. 760, 936; Bull. soc. math. de France 5 (1877), p. 100; Note XII in der Mécanique von *Ch. Despeyrous*, 1, Paris 1884; *G. Halphen*, Paris C. R. 84 (1877), p. 939; Bull. soc. philomat. (7) 1 (1878), p. 89; *G. Battaglini*, Rom Acc. Linc. Rend. (3) 2 (1877), p. 211; Giorn. di mat. 17 (1879), p. 43; *J. W. L. Glaisher*, Monthly Notices 39 (1878), p. 79; *F. Siacci*, Torino Atti 14 (1879), p. 759; Paris C. R. 88 (1879), p. 909; *U. Dainelli*, Giorn. di mat. 18 (1880), p. 271; 19 (1881), p. 171; *R. Hoppe*, Arch. Math. Phys. 56 (1880), p. 107, 328; *H. Resal*, Paris C. R. 90 (1880), p. 889, 937; *V. Imschenetskij*, Bordeaux Mém. soc. sci. phys. et nat. (2) 4 (1880), p. 31; *P. Kindel*, Diss. Halle 1884 = Archiv Math. Phys. (2) 15 (1895), p. 262; *G. Koenigs*, Bull. soc. math. de France 17 (1889), p. 153; *P. Appell*, Am. J. of math. 13 (1890), p. 261; Mécanique 1, p. 387; *F. Porro*, Palermo Circ. mat. Rend. 5 (1891), p. 51; *S. Hirayama*, Tokio Math. Ges. 4 (1891), p. 261; *Ch. Cellérier*, Bull. sciences math. (1) 15 (1891), p. 145; *C. Stéphanos*, Archiv Math. Phys. (3) 2 (1901), p. 147 und Paris C. R. 140 (1905), p. 1318; *P. J. Suchar*, Paris C. R. 135 (1902), p. 679; Nouv. ann. (4) 2 (1902), p. 123, 248; *V. Jamet*, Nouv. ann. (4) 2 (1902), p. 348.

159) Horologium oscillatorium, Paris 1673; vgl. III D 1, 2 Nr. **16** (*H. v. Mangoldt*).

160) Paris Mém. sav. étr. 10 (1785); vgl. III D 1, 2 Nr. **33** (*H. v. Mangoldt*).

161) *E. Budde*, Mechanik 1, p. 186. Für die Cykloide, als Kurve im Raume aufgefaßt, hat bereits *Chr. Huygens* zwei Fäden in Anwendung gebracht.

nehmen. In anderen Fällen lässt sich die Bewegung durch Rinnen oder Röhren von der Gestalt der vorgeschriebenen Bahn erzwingen[162]), und man muss diese Art anwenden, wenn die Bewegung in einer Kurve erfolgen soll, die sich in vorgeschriebener Weise bewegt[163]). Man kann jedoch auch von einer solchen Realisierung der Bewegung ganz absehen und den in einer Kurve bewegten Punkt als den repräsentierenden Punkt für eine Bewegung mit einem Grade der Freiheit ansehen; solche Bewegungen kommen in der Technik sehr häufig vor, da die meisten praktisch verwendeten Mechanismen zwangsläufig sind. Bei *einem* Grade der Freiheit ist die Einführung des repräsentierenden Punktes schon sehr alt; denn nachdem *G. Galilei* die Bewegung eines schweren Punktes auf einem Kreise in einer Vertikalebene, also das mathematische Pendel, behandelt hatte[164]), stellte *M. Mersenne* 1646 die Frage nach der Lage des Schwingungsmittelpunktes eines physikalischen Pendels, das heisst nach dem mathematischen Pendel, das dieselbe Schwingungsdauer hat, wie der betrachtete um eine horizontale Axe drehbare schwere Körper, eine Frage, die 1673 von *Ch. Huygens* beantwortet wurde[165]).

Die Kurve heisst glatt, wenn ihre Reaktion entgegengesetzt gleich der Resultante aus der Zentrifugalkraft und der Normalkomponente der wirkenden Kraft ist, dagegen rauh, wenn die Reaktion noch eine Tan-

---

162) Der kleine Körper, der als materieller Punkt angesehen wird, darf in der Rinne oder Röhre nur gleiten, nicht rollen. Wenn also *G. Galilei* (Discorsi 1638) Kugeln die Fallrinne herabrollen lässt, so bewegen diese sich nicht wie ein schwerer Punkt auf einer schiefen Ebene, vielmehr wird ein Teil, nämlich $^2/_7$, der durch den Fall gewonnenen Energie in Energie der Drehung der Kugeln verwandelt.

163) Solche sich bewegende Röhren verwandten schon *Joh. Bernoulli*, Opera 4 (1742), p. 248 (Bewegung eines Punktes in einer schrägen geraden Röhre, die sich um eine vertikale Achse dreht); *A. Clairaut*, Paris Mém. année 1742 (1745), p. 1; *L. Euler*, Opuscula varii argumenti 1 (1746), p. 1; *Daniel Bernoulli*, Berlin Mém. année 1745 (1746), p. 74; *J. L. Lagrange*, Misc. Taur. 2 (1760/61) = Oeuvres 1 (1867), p. 393; *J. J. A. Ide*, System der Mechanik, Berlin 1802; *A. M. Ampère*, Ann. de Gergonne 20 (1829), p. 37 und *L. Euler*, Opera posthuma 1862, 2, p. 74, 85, 114.

164) Dialogo sopra i massimi due sistemi del mondo, Florenz 1632 (deutsch von *E. Strauss*, Leipzig 1891); Discorsi 1638, erster Tag, Ostwalds Klassiker Heft 11, p. 75, 83: Isochronismus kleiner Pendelschwingungen; die im tiefsten Punkte erlangte Geschwindigkeit giebt den Impuls, der grade ausreicht zu der Erhebung auf die Höhe, aus der der Punkt gefallen war.

165) Horologium oscillatorium, Paris 1673. *Huygens* gab auch die Formel für die Dauer kleiner Schwingungen $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (l Pendellänge); die Formel für endliche Schwingungen rührt von *L. Euler* her, Mechanica 1736.

gentialkomponente besitzt, also Reibung stattfindet[166]). Einseitige Fesselungen, wie sie durch Fäden oder Rinnen bewirkt werden, erfordern, dass der Druck des bewegten Punktes gegen die Fessel gerichtet ist; verschwindet der Druck mit Vorzeichenwechsel, so verlässt der Punkt die Zwangsbahn und beginnt sich frei zu bewegen[167]).

Unter der Voraussetzung, dass die wirkende Kraft bei der Bewegung auf einer festen, glatten Kurve eine Funktion des Ortes ist, lässt sich nach *C. G. J. Jacobi* die Zeit als Funktion der Bogenlänge durch eine Quadratur ausdrücken[168]). Dasselbe gilt nach *A. Mayer* für eine ebene rauhe Kurve, wenn die Reibung dem Normaldrucke proportional ist und die wirkende Kraft in der Ebene der Kurve liegt[169]). Bei den rauhen Kurven und bei der Bewegung in einem widerstehenden Mittel gewinnt auch das Problem des Gleichgewichtes ein gewisses Interesse[170]). Die kleinen Schwingungen um eine solche Gleichgewichtslage stehen in Zusammenhang mit der Konstruktion der Galvanometer, bei denen schwingende Magnetnadeln verwandt werden. Durch das Hinzutreten einer Reibungskraft kann sich nämlich die periodische Bewegung in eine *aperiodische* verwandeln, bei der asymptotische Annäherung an die Gleichgewichtslage stattfindet[170a]).

Was die beweglichen Kurven betrifft, so sei auf die Angaben von *M. Jullien*[171]) und *P. van Geer*[172]) verwiesen. Noch allgemeiner ist die Annahme, dass die vorgeschriebene Bahn im Laufe der Zeit Lage und Gestalt ändere. Die *Lagrange*sche Gleichung für den Parameter q behält dann ihre Form:

166) *E. J. Routh,* Dynamik 1, p. 450 nennt eine Kurve auch dann rauh, wenn die Bewegung in einem widerstehenden Mittel vor sich geht, so dass der Reibungswiderstand des Mittels eine tangentiale Komponente liefert; siehe auch IV 1 *(A. Voss)* p. 68—69, Anm. 185a.

167) Ausführliche Untersuchung für das Kreispendel als Fadenpendel bei *P. Nouvel,* Programm Gymn. Cöthen 1886, *E. Budde,* Mechanik 1, p. 201 und *O. Schütt,* Diss. Kiel 1905; vgl. auch Anmerkung 179.

168) J. f. Math. 24 (1842), p. 5 = Werke 4, p. 263; vgl. *P. Appell,* Mécanique 1, p. 422.

169) Leipzig Ber. 1893, p. 379.

170) *M. Jullien,* Problèmes 1, p. 74; *A. de Saint-Germain,* Exercices, Paris 1877, p. 11.

170a) *S. D. Poisson,* Mécanique 2. éd. 1 (1833), p. 351; *C. F. Gauss,* Werke 5, p. 394 (1837); *E. du Bois-Reymond,* Berlin Monatsberichte 1869, p. 807, 1870, p. 537, 1873, p. 748, 1874, p. 767; vgl. auch *E. Riecke,* Zur Lehre von der aperiodischen Dämpfung und zur Galvanometrie, Göttingen 1888 sowie Nr. 20 dieses Artikels.

171) Problèmes 2, p. 236.

172) Nieuw Arch. for wisk. 7 (1881), p. 164; dazu *Ph. Gilbert,* Bruxelles Ann. soc. scient. 6 (1882), p. 270, 7 (1882), p. 11.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q,$$

aber T wird eine Funktion zweiten Grades von $\dot{q}$, deren Koeffizienten q und t enthalten[173]).

Anstatt die Bewegung auf einer vorgeschriebenen Kurve zu untersuchen, kann man auch nach den Kurven fragen, bei denen der Bewegung gegebene Eigenschaften zukommen. Probleme dieser Art sind die der *Brachistochronen*[174]) und der *Tautochronen*[175]), die während des 18. Jahrhunderts längere Zeit im Mittelpunkt des mathematischen Interesses gestanden haben, aber auch noch im 19. Jahrhundert vielfach behandelt worden sind. Hierhin gehört auch die Frage nach der Kurve gleichen Normaldruckes bei einem für den Raum gegebenen Gesetze der Kraft[176]).

15. Bewegung auf einer krummen Fläche. Wenn ein materieller Punkt auf einer vorgeschriebenen krummen Fläche bleiben oder sich darauf bewegen soll, kann die Fessel, der die Zwangskraft entspringt, eine Schale von der Gestalt dieser Fläche sein (einseitige Bedingung), oder man kann zwei parallele Schalen nehmen, zwischen denen der Punkt gleitet. In manchen Fällen ist auch eine Realisierung der Bedingung durch Fäden oder Stangen möglich; eine allgemeine Konstruktion, die den Punkt mittels Fäden oder Stangen an die Fläche fesselt, ist noch nicht gegeben worden[177]). Man kann jedoch auch allgemeiner den auf einer krummen Fläche bewegten Punkt als repräsentierenden Punkt für eine Bewegung mit zwei Graden der Freiheit auffassen, wobei der Ausdruck der lebendigen Kraft das Quadrat des Linienelementes der Fläche liefert[178]).

---

173) *P. Appell*, Mécanique 1, p. 454.

174) Genauere Angaben und Litteratur in Nr. 12 dieses Artikels.

175) Monographien über die Tautochronen gaben *C. Ohrtmann*, Programm Berlin 1872 und *F. Amodeo*, Monografia delle curve tautocrone, Avellino 1883. Seitdem ist wieder eine beträchtliche Litteratur zu verzeichnen, aus der nur angeführt sei *G. Koenigs*, Paris C. R. 96 (1893), p. 969; *J. Hadamard*, Bordeaux Soc. sci. math. et nat. (8) 5 (1893), p. 195; *P. Appell*, Mécanique 1, p. 443.

176) *Joh. Bernoulli*, Acta erud. Lips. 1695 = Opera 1, p. 132; *G. F. de l'Hospital*, Paris Mém. année 1700, p. 9; *M. Jullien*, Problèmes 1, p. 405—410; *L. Lecornu*, Bull. soc. math. de France 32 (1904), p. 50 (Fall der Schwere: der Hodograph ist ein Kegelschnitt, die Bewegung in ihm eine Planetenbewegung).

177) *E. Budde*, Mechanik 1, p. 208. Für die Flächen zweiter Ordnung wird man die Fadenkonstruktionen von *O. Staude*, Math. Ann. 20 (1882), p. 147, 27 (1886), p. 253, Fokaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung, Leipzig 1896, heranzuziehen haben.

178) Vgl. Nr. 2 dieses Artikels. Ein schönes Beispiel hierfür ist das Problem von Glocke und Klöppel; vgl. *A. Föppl*, Dynamik, 1. Aufl., p. 290.

Bei einer einseitigen Fesselung, wie sie durch eine Schale oder bei dem Raumpendel durch einen Faden hervorgerufen wird, verlässt der Punkt die Zwangsbahn, falls die Reaktion mit Zeichenwechsel verschwindet, und beginnt sich frei zu bewegen; was bei einem abermaligen Auftreffen auf die Fläche geschieht, lässt sich nur angeben, wenn Voraussetzungen über die physikalische Beschaffenheit von Punkt und Fläche gemacht werden[179].

Die Fläche heisst glatt, wenn ihre Reaktion entgegengesetzt gleich der Resultante aus der Zentrifugalkraft des Punktes und der Normalkomponente der wirkenden Kraft ist, rauh, wenn die Reaktion noch eine Tangentialkomponente besitzt, also Reibung stattfindet.

Nachdem *G. Galilei*[180], *Ch. Huygens*[181], *I. Newton*[182], *Joh. Bernoulli*[183], *A. Clairaut*[184] besondere Fälle der Bewegung eines Punktes auf einer krummen Fläche betrachtet hatten, gab *L. Euler* eine systematische Darstellung[185]; er zeigte, dass auf einer festen, glatten Fläche die Trägheitsbahn eine geodätische Linie der Fläche ist[186], er stellte die Differentialgleichungen der Bewegung für einen schweren Punkt auf und integrierte sie für den Fall einer Rotationsfläche mit vertikaler Axe; für Kreiscylinder[187] und Kugel gab er eine genauere Dis-

179) Die Durchführung für das Raumpendel gab *E. Chailan*, Bull. soc. math. de France 17 (1889), p. 112; vgl. auch *G. H. Halphen*, Traité des fonctions elliptiques 2, Paris 1888, p. 134; *A. Hossfeld*, Programm Realgymn. Hofgeismar 1889; *A. de Saint-Germain*, Bull. sciences math. de France (2) 20 (1901), p. 98. Für einen schweren Punkt auf einer Rotationsfläche siehe *O. Schütt*, Diss. Kiel 1905. In gewissen singulären Fällen hat man zur Entscheidung, wie sich der Punkt verhält, das *Gauss*sche Prinzip des kleinsten Zwanges herangezogen, *J. W. Gibbs*, Amer. J. of math. 2 (1879), p. 49; *L. Boltzmann*, Prinzipe 1, p. 223.

180) Discorsi 1638, dritter Tag, Ostwalds Klassiker Heft 25, p. 39—59: schwerer Punkt auf schiefer Ebene.

181) Horologium oscillatorium 1673: Punkt auf Kugelfläche, wenn der Punkt sich in einem horizontalen Kreise bewegt.

182) Principia, lib. 1, sectio X, De motu corporum in superficiebus datis: Bewegung eines materiellen Punktes (corpus) auf einer Rotationsfläche, der von einem in der Axe befindlichen Punkte angezogen wird.

183) Acta erud. Lips. 1715, p. 242 = Opera 2, p. 187: Punkt auf Kugelfläche.

184) Paris Mém. année 1735: Punkt auf Kugelfläche.

185) Mechanica 1736, 2, cap. 4: De motu puncti super superficie.

186) Weiteres über die Beziehungen der geodätischen Linien zur Mechanik bei *P. Stäckel*, Leipzig Ber. 45 (1893), p. 444.

187) Hier macht *L. Euler* die wichtige Bemerkung, dass die Bahn in eine Parabel übergeht, wenn man den Cylinder auf eine vertikale Ebene abwickelt; vgl. auch *F. Wittenbauer*, Wien Ber. 81 (1880), p. 697, *P. Stäckel*, J. f. Math. 107 (1891), p. 319 und *P. Appell*, Mécanique 1, p. 482.

kussion der Bahnen. In Betreff der weiteren Entwicklung der Lehre von den geodätischen Linien muss auf III D 3, Nr. **14—18** (*R. v. Lilienthal*) verwiesen werden[188]). Die Bewegung eines Punktes auf einer Rotationsfläche mit vertikaler Axe, wenn die Schwere wirkt, und allgemeiner, wenn eine in den Parallelkreisen konstante Kräftefunktion existiert, ist dann seit *J. L. Lagrange*[189]) und *C. G. J. Jacobi*[190]) Gegenstand zahlreicher Untersuchungen geworden[191]). Als typische Formen der Bewegung ergaben sich Oscillationen zwischen zwei Parallelkreisen (Umkehr- oder Wendekreisen) und asymptotische Annäherung an einen

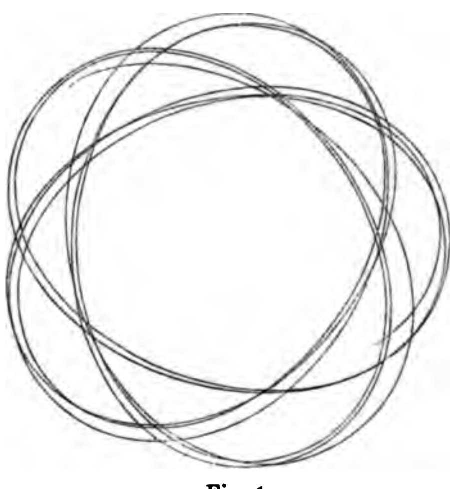


Fig. 1.

188) Dazu *W. Quidde*, Diss. Kiel 1905.

189) Mécanique 2, sect. VIII, chap. 2, § 2.

190) J. f. Math. 24 (1842), p. 5 = Werke 4, p. 263.

191) Die ältere Litteratur bei *P. Stäckel*, Diss. Berlin 1885; dazu *A. Tissot*, J. de math. (1) (1852), p. 88; *P. Serret*, Théorie nouvelle mécanique et géométrique des courbes à double courbure, Paris 1860; *J. Timmers*, Diss. Leyden 1875; *Th. Bertram*, Arch. Math. Phys. (1) 59 (1876), p. 193; *G. Darboux*, Bull. soc. math. de France 5 (1877), p. 100 (geschlossene geodätische Linien); *J. Boussinesq*, Paris C. R. 84 (1877), p. 65 (kleine Schwingungen auf einem Meridian); *H. Resal*, J. de math. (3) 3 (1877), p. 75; *J. Boussinesq*, Paris C. R. 86 (1878), p. 959 (geschlossene Bahnen bei der Bewegung eines schweren Punktes giebt es nicht); *R. Hoppe*, Archiv Math. Phys. 70 (1884), p. 405; *O. Brinckmann*, Diss. Jena 1885 (Rotationsparaboloid); *W. Werner*, Diss. Marburg 1886 (Rotationsparaboloid); *G. Kobb*, Stockholm Öfv. 1887, p. 159; Acta math. 10 (1887), p. 89 (fünf Flächentypen, bei denen die Bewegung eines schweren Punktes auf elliptische Integrale führt); *O. Staude*, Acta math. 10 (1887), p. 183; Dorpat Nat. Ges. 8 (1887), p. 249, 386; Acta math. 11 (1888), p. 303; Dorpat Nat. Ges. 1888, p. 399 (allgemeine Theorie der Bewegung, Bestimmung der Umkehrkreise durch die Wendefläche dritter Ordnung, die sich jedoch schon bei *A. Tissot* findet); *W. Hoffmann*, Diss. Halle 1888 (Kreisring); *R. Frantz*, Programm Magdeburg 1891 (Rotationsellipsoid); *C. Seidemann*, Diss. Leipzig 1891; Ein mechanisches Doppelproblem, Halle 1896 (Diskussion des vierten Typus von *Kobb*); *J. Tannery*, Bull. sciences math. (2) 16 (1892), p. 190 (geschlossene Bahnen); *O. Olsson*, Stockholm Vetensk. Bihang 17 (1892), Nr. 6; Stockholm Öfv. 1894, p. 437; *P. Stäckel*, Math. Ann. 41 (1893), p. 571 (fügt einen sechsten Typus zu den *Kobb*schen hinzu); *J. Hinrichs*, Diss. Marburg 1895 (Rotationshyperboloid); *F. Schmidt*,

Parallelkreis; dabei kann einer oder es können beide Kreise ins Unendliche rücken. Besonders eingehend wurde die leicht realisierbare und physikalisch wichtige Bewegung eines schweren Punktes auf einer Kugelfläche untersucht[192]). *A. G. Webster* hat die Horizontalprojektionen dieser Bewegungen photographisch registriert; die nebenstehenden Figuren geben solche Kurven[193]). Dass der Winkel AOB zwischen

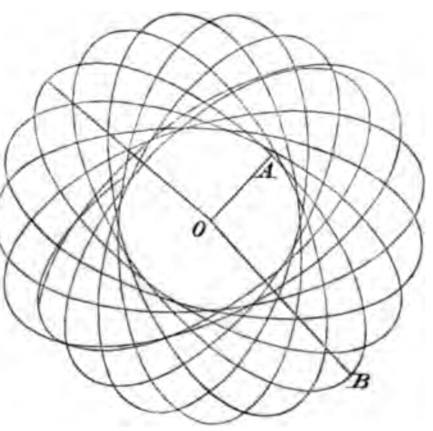


Fig. 2.

Monatshefte für Math. 5 (1895), p. 109 (Diskussion des sechsten Typus von *Stäckel*); *P. Stäckel*, Gött. Nachr. 1896, p. 157 (Transformation der Bewegungen); *M. Puglisi*, Palermo Circ. mat. Rend. 12 (1898), p. 312; Sulla riduzione di un problema, Messina 1898 (Herleitung der Typen von *Kobb* und *Stäckel*); Palermo Circ. mat. Rend. 14 (1900), p. 180; *G. Pennacchietti*, Catania Acc. Gioenia Atti (4) 15 (1902); *E. Salkowski*, Diss. Jena 1904 (findet dazu einen siebenten und letzten Typus); *O. Olsson*, Nyt Tidsskrift 15 (1904), p. 49 (Reihenentwicklungen). Die spezielle Litteratur über das sphärische Pendel findet man in den folgenden Anmerkungen.

192) Ausser *A. Clairaut*, *L. Euler* und *J. L. Lagrange* seien noch genannt: *S. D. Poisson*, Mécanique, Paris 1811, 1, p. 385; *Chr. Gudermann*, J. f. Math. 38 (1849), p. 185; *Fr. J. Richelot*, J. f. Math. 45 (1853), p. 233; *W. F. Donkin*, London Phil. Trans. 144 (1854) u. 145 (1855); *H. Durège*, Theorie der elliptischen Funktionen, Leipzig 1861; *H. Resal*, Mécanique 1, 1873, p. 180; *L. Schleiermacher*, Modelle der Bahnen in der Sammlung von *Brill-Schilling* 1877; *Ch. Hermite*, J. f. Math. 85 (1878), p. 246, Applications de la théorie des fonctions elliptiques, Paris 1883; *F. Tisserand*, Bull. sciences math. (2) 5 (1881), p. 448; *M. de Sparre*, Bruxelles Ann. soc. sci. 9B (1885), p. 49; 16B (1892), p. 181; 26B (1902), p. 133; Paris C. R. 114 (1892), p. 528; *G. H. Halphen*, Traité des fonctions elliptiques 2, Paris 1888, p. 126; *E. Budde*, Mechanik, 1, p. 209; *A. G. Greenhill*, The applications of elliptic functions, London 1892, p. 214; *A. de Saint-Germain*, Bull. sciences math. (2) 20 (1896), p. 114; (2) 22 (1898), p. 95; (2) 25 (1901) p. 98; *P. Appell*, Mécanique 1, p. 494; *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, Heft 2, Leipzig 1898 (während *Ch. Hermite* für die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z des bewegten Punktes, bez. für deren komplexe Verbindungen $x+iy$, $x-iy$, z elliptische Funktionen zweiter Art zweiten Grades findet, werden hier Formeln gegeben, vermöge deren $\frac{x \pm iy}{1-z}$ eine elliptische Funktion zweiter Art ersten Grades wird). Pendel von veränderlicher Länge betrachteten *Ch. Bossut*, Paris Mém. 1778, *Ch. E. Delaunay*, Mécanique, Paris 1856; *L. Lecornu*, Paris C. R. 118 (1894), p. 132, Bull. soc. math. de France 24 (1896), p. 133; *G. v. Grofe*, Dorpat Nat. Ges. 1896, p. 176.

193) *A. G. Webster*, Dynamics, Leipzig 1904, p. 50.

den Projektionen der Radien nach dem oberen und dem unteren Umkehrpunkt der Bahn stets grösser ist als 90°, hat *V. Puiseux*, und dass er kleiner ist als 180°, hat *G. H. Halphen* gezeigt[194]).

Wenn der Punkt anfangs in Ruhe war und die Resultante der für die betrachtete Stelle der Fläche wirkenden Kraft normal zur Fläche steht, so herrscht Gleichgewicht; das Gleichgewicht ist stabil, wenn die Kräftefunktion an der Stelle ein Maximum besitzt. Die kleinen Schwingungen, die der Punkt auf der Fläche in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage ausführen kann, haben *S. D. Poisson*[195]), *R. S. Ball*[196]) und *P. Appell*[197]) untersucht; im Besonderen ergeben sich im Fall der Schwere für einen tiefsten Punkt der Fläche in erster Annäherung Bahnen, deren Horizontalprojektionen *Lissajous*sche Kurven[198]) sind, die also, allgemein zu reden, ein Rechteck überall dicht bedecken.

Anstatt nach den Bahnen auf vorgeschriebener Fläche und bei gegebenem Gesetze der Kraft zu fragen, kann man auch das Gesetz der Kraft suchen, das auf vorgeschriebener Fläche Bahnen von gegebenen Eigenschaften liefert. So hat *C. Neumann* das Problem von *Villarceau-Bertrand* auf die Kugel übertragen[199]). Verwandte Probleme behandelten *A. de Saint-Germain*[200]) und *P. Stäckel*[201]). Ebenso kann man die Flächen bestimmen, die bei vorgeschriebenem Gesetze der Kraft Bahnen mit gegebenen Eigenschaften besitzen[202]).

Das Verhalten eines Punktes auf einer rauhen Fläche ist unter der Voraussetzung behandelt worden, dass die Reibung dem Druck auf die Fläche proportional sei[203]) (vgl. Nr. 6 dieses Artikels). Wenn X,

---

194) *V. Puiseux,* J. de math. (1) 7 (1842), p. 517; vgl. *A. Bravais,* Note VI in *Bertrands* Ausgabe der Mécanique von *Lagrange,* Paris 1853, 2, p. 352. *G. H. Halphen,* Traité des fonctions elliptiques 2 (1888), p. 128. Einfache Beweise für beide Sätze gab *A. de Saint-Germain,* Bull. sciences math. (2) 20 (1896), p. 114, (2) 22 (1898), p. 95; Caen Mém. de l'Ac. 1901.

195) Mécanique, 2. éd. 2, p. 439.

196) Quart. J. of math. 10 (1869), p. 220.

197) Mécanique 1, p. 487.

198) *J. A. Lissajous,* Ann. phys. chim. (3) 30 (1852); vgl. auch *F. v. Strelecki,* Wien Ber. 65 (1872), p. 189 sowie *L. Boltzmann,* Prinzipe 1, p. 53.

199) Leipzig Ber. 1886, p. 1. *J. Th. Graves,* Dublin Proc. 1842 und *T. Preston,* Dublin Irish Trans. 29 (1889), p. 321; *H. Resal,* Paris C. R. 90 (1880), p. 889, 937, J. de math. (3) 7 (1881), p. 33; vgl. *H. Liebmann,* Leipzig Ber. 1903, p. 146.

200) J. de math. (3) 2 (1876), p. 325; vgl. schon *A. Enneper,* Gött. Nachr. 1869, p. 62.

201) Diss. Berlin 1885.

202) *E. Ch. Catalan,* J. de math. (1) 11 (1893), p. 212.

203) *J. Jellett,* Reibung, Kap. 4; *P. Appell,* Paris C. R. 114 (1892), p. 331; *A. Mayer,* Leipzig Ber. 1893, p. 379.

Y, Z die Komponenten der wirkenden Kraft, k, l, m die Richtungscosinus der Flächennormale bezeichnen, wenn ferner N der Normaldruck und f der Reibungskoeffizient ist, so lauten die Differentialgleichungen der Bewegung auf einer festen rauhen Fläche:

$$\text{(R)} \qquad \begin{cases} m\ddot{x} = X + Nk - f|N|\frac{\dot{x}}{v}, \\ m\ddot{y} = Y + Nl - f|N|\frac{\dot{y}}{v}, \\ m\ddot{z} = Z + Nm - f|N|\frac{\dot{z}}{v}; \end{cases}$$

dazu kommt die Gleichung der Fläche.

Die Integration ist bis jetzt nur in wenigen Fällen gelungen[204]). Eine eigene Betrachtung erfordert die Bewegung aus der Ruhe. Sind F_T und F_N die absoluten Werte der tangentialen und der normalen Komponente der wirkenden Kraft $\mathfrak{F}$, so bleibt der Punkt in Ruhe, wenn $F_T \leqq fF_N$ ist, und er setzt sich in Bewegung, falls $F_T > fF_N$ ausfällt, dann aber sind die Gleichungen (R) nicht unmittelbar anwendbar, weil der Nenner v verschwindet; wie man trotzdem eine der Anfangsbedingung $v = 0$ genügende Lösung erhalten kann, hat *T. Levi-Civita* gezeigt[205]).

Auch die Bewegungen auf beweglichen glatten oder rauhen Flächen haben Beachtung gefunden[206]). Sie spielen eine gewisse Rolle in der Theorie der Turbinen, insofern man annimmt, dass die Wasserteilchen wie diskrete Teilchen, jedes für sich, auf den beweglichen Rädern laufen[207]). Das grösste Interesse hat aber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer bewegten Kugelfläche erregt, weil es zu einem experimentellen Nachweise der Drehung

---

204) *J. Jellett*, Reibung, p. 107 (schwerer Punkte auf schiefer Ebene, vgl. dazu *H. Lorenz*, Mechanik, p. 189); *A. de Saint-Germain*, Bull. sciences math. (2) 16 (1892), p. 223 (schwerer Punkt auf vertikalem Kreiszylinder); *A. Mayer*, Leipzig Ber. 1898, p. 379 (Trägheitsbewegung); *G. Pennacchietti*, Palermo Circ. mat. Rend. 7 (1893), p. 236; *P. Stäckel*, Leipzig Ber. 1894, p. 197 (Bewegungen auf Kreiszylinder und Kreiskegel; weitere Ausführungen bei *W. Bahrdt*, Diss. Kiel 1901); *W. de Tannenberg*, Nouv. ann. (3) 15 (1896), p. 201 (*Gauss*sche Koordinaten); *A. Razzaboni*, Giorn. di mat. 34 (1896), p. 37 (schwerer Punkt auf einem vertikalen Zylinder, dessen Querschnitt eine logarithmische Spirale ist).

205) Arch. Math. Phys. (3) 5 (1903), p. 28.

206) Historisches bei *P. van Geer*, Nieuw Arch. for wisk. 7 (1881), p. 164; 8 (1882), p. 1; Aufgaben bei *M. Jullien*, Problèmes 2, p. 5 und *P. Appell*, Mécanique 1, chap. 13; für rauhe Flächen bei *J. Jellett*, Reibung, Kap. 4; siehe auch *F. Roth*, Repert. d. Physik 22 (1886), p. 354 und *W. Timpe*, Diss. Halle 1889.

207) *G. Herrmann*, Die graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen, Berlin 1887; *E. A. Breuer*, Grundriss der Turbinentheorie, Leipzig 1899, p. 19.

der Erde geführt hat. Nachdem schon im 17. Jahrhundert zu Florenz Versuche nach dieser Richtung hin angestellt worden waren[208]) und nachdem *S. D. Poisson* die Theorie, allerdings unter gewissen Vernachlässigungen, aufgestellt hatte[209]), ist es zuerst *L. Foucault* nach jahrelangen Bemühungen gelungen, zum Ziel zu gelangen[210]). Wegen der weiteren Litteratur und der experimentellen Einzelheiten sei auf IV 7 (*Ph. Furtwängler*) verwiesen.

Endlich kann sich Lage und Gestalt der Fläche mit der Zeit in vorgeschriebener Weise ändern. Die *Lagrange*schen Gleichungen mit den Parametern q_1 und q_2 behalten dann ihre Gestalt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2,$$

aber die lebendige Kraft T wird eine Funktion zweiten Grades von $\dot q_1$ und $\dot q_2$, deren Koeffizienten von q_1, q_2 und t abhängen[211]).

16. Nichtholonome Bedingungen. Nichtholonome Bedingungen gewinnen eine anschauliche Bedeutung erst dann, wenn es sich um die Bewegung fester Körper handelt, die einander in ihren Bewegungen beeinflussen, zum Beispiel auf einander rollen oder gleiten. Sie haben jedoch auch eine Stelle in der Punktmechanik, da sich solche Bewegungen nicht selten durch die Bewegungen repräsentierender Punkte ersetzen lassen. Auch ist es aus pädagogischen Gründen wünschenswert, einfache Beispiele nichtholonomer Bewegungen zu haben. Ein solches Beispiel hat *F. Klein* angegeben[212]): es ist ein Karren, der sich auf einer horizontalen Ebene bewegt und wegen der Reibung an der Unterlage immer nur in der Richtung seiner Axe fortschreiten kann. Wenn der in der Axe befindliche Schwerpunkt des Karrens die Koordinaten x, y hat und der Winkel der Axe mit der positiven x-Axe oder kurz das Azimuth der Axe mit z bezeichnet wird, so er-

208) *T. Bertelli*, Bull. di bibl. di Boncampagni 6 (1873), p. 1; *A. Genocchi*, ebenda 15 (1882), p. 631.

209) J. éc. polyt. cah. 26 (1838), p. 15; vgl. die kritischen Bemerkungen von *J. Binet*, Paris C. R. 32 (1851), p. 157, 197; *J. Liouville*, ebenda, p. 159; *L. Poinsot*, ebenda, p. 206; *O. Röthig*, Zeitschr. Math. Phys. 24 (1879), p. 133. Wegen der neueren Litteratur vgl. IV 7 (*Ph. Furtwängler*).

210) Paris C. R. 32 (1851), p. 135; vgl. auch *F. Rosenberger*, Geschichte der Physik 3, Braunschweig 1887, p. 438.

211) *P. Appell*, Mécanique 1, p. 467; *V. Amato*, Catania Acc. Gioenia Atti (4) 14 (1901), Giorn. di mat. 39 (1901), p. 251; Catania Acc. Gioenia Atti (4) 17 (1904), Nr. 13; Palermo Circ. mat. Rend. 19 (1905), p. 57.

212) Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 265; vgl. auch *L. Maurer*, Gött. Nachr. 1905, p. 91, wo jedoch der Einfluss der Reibung nicht berücksichtigt wird.

giebt sich die nichtholonome Bedingungsgleichung

$$dy - \operatorname{tg} z \cdot dx = 0.$$

Ähnliche Betrachtungen würden sich auch für die Bewegung der Rolle bei einem Integraphen anstellen lassen.

Ein anderes lehrreiches Beispiel ist die Untersuchung der kürzesten Linien im Nullsystem, oder genauer, in der Schar aller Schraubenlinien desselben Parameters und derselben Axe, die *A. Voss*[213]) durchgeführt hat; vom Standpunkte der Flächentheorie handelt es sich dabei um die Übertragung des Begriffes der kürzesten Linien auf nichtintegrable *Pfaff*sche Gleichungen zwischen drei Veränderlichen[214]).

Durch eine nichtholonome Bedingung wird nur die Beweglichkeit im Infinitesimalen beschränkt, aber nicht der Grad der Freiheit. Zum Beispiel kann der vorher betrachtete Karren von jeder Stelle der Ebene nach jeder anderen Stelle gebracht werden, und zwar so, dass das Azimut in beiden Punkten einen vorgeschriebenen Wert erhält; der Karren ist also ein System mit drei Graden der Freiheit, obwohl zwischen x, y, z die Gleichung $dy - \operatorname{tg} z \cdot dx = 0$ besteht. Allerdings muss man es geschickt anfangen, um den Karren etwa in einer engen Strasse von einer Seite auf die andere (mit demselben Azimute) zu bringen; siehe die nebenstehende Figur.

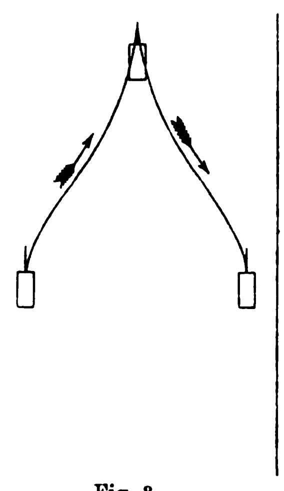


Fig. 3.

Die Paradoxie dieser Erscheinung verschwindet, wenn man bedenkt, dass eine holonome Bedingung $p dx + q dy + r dz = 0$ mit einer Bedingung $f(x, y, z) = \text{const.}$ äquivalent ist, wo der Konstanten ein beliebiger Wert beigelegt werden darf. Die Differentialgleichungen der Bewegung

$$m\ddot{x} = X + \lambda p, \qquad m\ddot{y} = Y + \lambda q, \qquad m\ddot{z} = Z + \lambda r$$

sind daher, wenn man die Analogie mit dem nichtholonomen Fall aufrecht erhalten will, als die Gleichungen der Bewegung eines

213) Math. Ann. 25 (1885), p. 283; vgl. auch *H. Liebmann*, Math. Ann. 52 (1899), p. 120.

214) Ein Ansatz dazu schon bei *E. Kummer*, J. f. Math. 57 (1859), p. 189; vgl. ferner *A. Voss*, Math. Ann. 23 (1884), p. 45 und *R. v. Lilienthal*, Krümmungslehre der Kurvenscharen, Leipzig 1896 und Math. Ann. 52 (1899), p. 417; dieser unterscheidet bei den allgemeinen doppelt unendlichen Kurvenscharen *kürzeste* und *geodätische* Linien.

Punktes auf der *Flächenschar* $f(x, y, z) = \text{const.}$ aufzufassen, und der Unterschied gegen den nichtholonomen Fall liegt darin, dass sich die ∞^4 Bahnen jetzt zu je ∞^3 auf die ∞^1 Flächen der Schar verteilen, während sie in dem nichtholonomen Fall den Raum erfüllen.

Sind mehrere nichtholonome Bedingungen vorhanden, so kann sich der Grad der Freiheit erniedrigen; für die genauere Untersuchung, die die allgemeine Theorie der *Pfaff*schen Gleichungen erfordert, sei auf IV 12 *(P. Stäckel)* verwiesen.

b) Systeme materieller Punkte.

Bei der Dynamik des einzelnen Punktes durfte der Versuch gewagt werden, die zahlreichen speziellen Untersuchungen systematisch darzustellen, dagegen kann bei der Dynamik der Systeme nur eine Zusammenstellung von Einzelheiten gegeben werden, die sozusagen zufällig behandelt worden sind. In diesem Abschnitt sollen jedoch Systeme, deren Punkte starr miteinander verbunden sind, unberücksichtigt bleiben; denn über die gesamte Dynamik starrer Körper wird wegen ihres eigenartigen Charakters und ihrer grossen Wichtigkeit in dem zweiten Teile des Artikels ein selbständiger Bericht erstattet werden.

17. Spezielle Probleme aus der Statik der Systeme; statische Behandlung kinetischer Probleme.

17a. Statik der Systeme. Die Statik der Systeme lässt sich auf zwei wesentlich verschiedene Arten begründen, je nachdem man nämlich von dem *statischen* oder dem *dynamischen* Kraftbegriff ausgeht; vgl. IV 1, Nr. 18 und 23 (*A. Voss*). Bei der ersten Art erscheint die Statik als die selbständige *science de l'équilibre des forces*[215]), bei der zweiten dagegen als ein Grenzfall der *Kinetik*, insofern die relative Ruhe des Systems gegen das gewählte Bezugssystem als Grenzfall der Bewegung gegen das Bezugssystem aufgefasst werden kann[216]).

215) *J. L. Lagrange*, Mécanique 1, p. 1.

216) Während *Lagrange* zwischen *Statik* als der Lehre von dem Gleichgewichte der Kräfte und der Ruhe und *Dynamik* als der Lehre von den beschleunigenden Kräften und der Bewegung unterscheidet und Statik und Dynamik getrennt behandelt, hat man im 19. Jahrhundert vielfach unter Dynamik, der Bedeutung des Wortes entsprechend, die gesamte Wissenschaft von den Kräften verstanden, von welcher *Statik* und *Kinetik* Unterabteilungen bilden; das Wort Kinetik scheint von *W. Thomson* (Handbuch 1, p. VI) herzurühren. Zu beachten ist auch, dass Statik und Dynamik oft schlechtweg Statik und Dynamik der Punktsysteme und starren Körper bedeuten, so dass man also kontinuierliche, deformierbare Systeme ausdrücklich ausschliesst; die von *A. Maggi* vorgeschlagenen Bezeichnungen

Bei der statischen Behandlung wird häufig die Konfiguration des Systems als gegeben angesehen und nach den Kräftesystemen gefragt, unter deren Einwirkung das System keine Beschleunigungen erfährt. Bei der dynamischen Behandlung sieht man dagegen oft die Kräfte als gegeben an und untersucht, welche Konfiguration das System haben muss, damit es in Ruhe verharren kann. Ferner wird dort häufig die geometrische, hier die analytische Methode vorgezogen. Ein typischer Vertreter der statischen Auffassung ist etwa *P. Varignon*, Nouvelle mécanique, 1725, der dynamischen *L. Euler*, Mechanica sive motus scientia, 1736.

Die geometrische Seite der Statik haben, anknüpfend an die moderne Entwicklung der Statik des starren Körpers und der aus starren Körpern gebildeten Systeme, *H. E. Timerding*, *G. Jung* und *L. Henneberg* in den vorhergehenden Artikeln zur Geltung gebracht. Was die *allgemeine Statik der Systeme* anlangt, so muss für die Einzelheiten auf die Werke von *J. Todhunter* (1853), *G. M. Minchin* (1877) und *E. J. Routh* (1892) verwiesen werden. Zur Ergänzung sollen nur noch einige Bemerkungen hinzugefügt werden.

Das Gleichgewicht bei Systemen, bei denen Bedingungsungleichheiten bestehen, hat neuerdings eingehend *P. Appell* behandelt[217]). Für Probleme des Gleichgewichts, bei denen Reibung ins Spiel kommt, vergleiche man *J. Jellett*, Reibung, Kapitel 3 und, soweit technische Anwendungen in Frage kommen, den Artike IV 10 (*K. Heun*).

In die elementare Statik der Systeme gehören auch diejenigen Untersuchungen, bei denen Aufgaben der Attraktion anschauungsmässig und mit einfachen mathematischen Hilfsmitteln behandelt werden[218]). Zu nennen ist hier zunächst die Aufgabe, unter den homogenen Körpern derselben bestimmten Art und der gleichen Masse denjenigen zu bestimmen, bei dem die Maximalattraktion für einen Punkt der Oberfläche den grössten Wert hat. Wenn man gar keine Voraussetzung über die Gestalt macht, ergiebt sich der Rotationskörper, dessen erzeugende Kurve in Polarkoordinaten die Gleichung:

$$r^2 = a^2 \cos \vartheta$$

hat; unter der Annahme, dass eine Kugel derselben Masse auf einen Punkt

---

Stereostatik und *Stereodynamik* sind zweckmässig, haben aber bis jetzt noch keine grössere Verbreitung gefunden.

217) Mécanique 1, p. 253.

218) Die Litteratur über diesen Gegenstand ist sehr zerstreut; außer den Werken über Statik sei noch genannt *J. Todhunter*, History of the mathematical theories of attraction, 2 vol., London 1873.

der Oberfläche die Anziehung Eins ausübt, ist bei diesem Körper in dem Punkte $r = 0$, $\vartheta = 0$ die Grösse der Anziehung 1,025986 ...[219]). Ferner gehört hierher der Satz von *H. Cavendish*, dass das einzige Anziehungsgesetz, für das eine homogene Kugelschicht keine Wirkung auf die Punkte ihres Innern ausübt, das *Newton*sche Gesetz ist[220]), und endlich ist *W. Thomsons* Lehre von den *centrobaryschen Körpern* zu erwähnen[221]).

17b. Statische Behandlung kinetischer Probleme. Bei manchen Bewegungen sind entweder die an den Massenpunkten auftretenden Beschleunigungen so gering oder die Massen so klein, dass man die beschleunigenden Kräfte näherungsweise gleich Null setzen kann. Man wird so zu der Betrachtung von *beschleunigungslosen Bewegungen* geführt, bei denen häufig einfache mathematische Hilfsmittel ausreichen.

Wenn es sich um ein Problem mit einem Grade der Freiheit handelt, und die Differentialgleichung der Bewegung die Form hat:

$$m\ddot{q} = f(q, \dot{q}),$$

wo auf der rechten Seite das Argument $\dot{q}$ wirklich vorkommt, so giebt es bei geeigneten Annahmen über die Funktion $f(q, \dot{q})$ *Bewegungen*. bei denen immer $m\ddot{q} = 0$ ist; sie bilden sogar, allgemein gesprochen, eine von einem Parameter abhängende Schar.

Analoges gilt bei n Positionskoordinaten. Ein einfaches Beispiel liefert die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer krummen Fläche. Wird die in der Tangentialebene der Fläche liegende Komponente der eingeprägten Kraft in eine Komponente F_T nach der Tangente der Bahn des Punktes und eine Komponente F_N senkrecht dazu zerlegt und die geodätische Krümmung der Bahn mit k_g bezeichnet, so gilt die Relation

$$F_N = v^2 k_g.$$

Läßt man hierin v über alle Grenzen wachsen, so muß k_g gegen Null gehen, d. h. die Bahn verwandelt sich für $v = \infty$ in eine geodätische

219) Einen eingehenden Bericht über die zahlreiche Litteratur, die bis weit ins 18. Jahrhundert zurückgeht, gab *E. Hoffmann*, Bibl. math. (3) 5 (1904), p. 366. Hier seien nur angeführt *J. Playfair*, Edinburg Royal Soc. Trans. 6² (1809), p. 187; *F. Keller*, Ricerche sull' attrazione delle montagne, 1, Rom 1872, Rom Acc. Linc. Mem. 9 (1881), p. 141; Rom Acc. Linc. Rend. (4) 2_1 (1886), p. 145; *E. Lampe*, Berlin Phys. Ges. Verh. 3 (1884), p. 46, 56; 15 (1896), p. 84; *A. Sella*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 1_1 (1892), p. 350; (5) 2_1, p. 90.

220) Phil. Trans. 1798; vgl. *W. Thomson* und *P. G. Tait*, Handbuch 2, p. 66.

221) Edinburg Royal Soc. Proc. 5 (1866) (aus dem Jahre 1864); vgl. *W. Thomson* und *P. G. Tait*, Handbuch 2, p. 67 sowie *A. Wernicke*, Programm Gymn. Braunschweig 1892.

Linie der Fläche[222]). Lässt man aber v gegen Null abnehmen, indem man etwa die Fläche mit einer klebrigen Flüssigkeit überzieht, so wird in der Grenze auf der Bahn $F_N = 0$; der Punkt läuft also näherungsweise in einer Kraftlinie der Fläche.

Beschleunigungslose Bewegungen treten immer ein, wenn Reibung stattfindet und der bewegte Körper nur so stark angetrieben wird, dass er die Reibung gerade überwindet und mit konstanter Geschwindigkeit vorwärts geht[223]). Näherungsweise sind solche Bewegungen z. B. verwirklicht bei einem Fallschirm oder bei den Regentröpfchen in der Luft; man denke auch an Bewegung vieler Maschinenteile während des normalen Ganges der Maschine[224]). Ebenso rechnet man bei Gas- und Wassermessern auf eine beschleunigungslose Bewegung der hindurchwandernden Massen; plötzliche Geschwindigkeitsänderungen fälschen die Anzeige. Es wäre leicht, aus der *Mechanik des täglichen Lebens* noch weitere Beispiele anzuführen; wir würden jedoch alsdann aus dem Bereiche der abstrakten Dynamik in den Bereich der angewandten übertreten.

Ebenso kann hier nur angedeutet werden, dass beschleunigungslose Bewegungen auch in der modernen Physik eine Rolle spielen. Als *Bewegungen durch Gleichgewichtslagen* treten sie auf in der Thermodynamik reversibler Vorgänge, man findet sie ferner in der Elektrizitätslehre bei den stationären Strömen und in der Theorie der chemischen Umsetzungen[225]).

Das Prinzip, einen Ansatz zu gewinnen, indem man die in dem Systeme auftretenden beschleunigenden Kräfte gleich Null setzt, lässt sich als *statische Behandlung kinetischer Probleme* bezeichnen. Die Rolle, die es in der Entwicklung der Mechanik gespielt hat, würde eine eingehende historische Untersuchung verdienen. Hier sei nur erwähnt, daß dieses Prinzip auch in Fällen angewandt worden ist, wo die Voraussetzung nicht zutrifft, dass man die Beschleunigungen vernachlässigen dürfe. Hat doch kein geringerer als *I. Newton* dieses Prinzip zur Erklärung der Ebbe und Flut und der Präzession der Tag- und Nachtgleichen benutzt. Ebenso ist, um ein Beispiel ganz

---

222) Genaue Durchführung des Grenzüberganges bei *J. Andrade*, Bull. soc. math. de France 22 (1894), p. 186.

223) Diese Geschwindigkeit kann beliebig gross sein; man darf daher die beschleunigungslosen Bewegungen nicht mit den langsamen Bewegungen verwechseln.

224) Vgl. *P. Appell*, Mécanique, 2, p. 519.

225) Vgl. etwa *H. v. Helmholtz*, Prinzipien der Statik monozyklischer Systeme, J. f. Math. 107 (1884), p. 111, 317 = Wiss. Abhandl. 3, p. 119.

anderer Art anzuführen, die Theorie der Dampfmaschinen lange Zeit statisch behandelt worden, und man hat erst, als schnelllaufende Maschinen gebaut wurden, die *Massendrucke* berücksichtigt[226]). Auch wird noch heute bei der mathematischen Theorie der Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten der Druck der Flüssigkeit auf den Körper meist statisch berechnet, was gewiss nur in besonderen Fällen näherungsweise richtig ist.

Umgekehrt giebt es, wie beiläufig bemerkt werden möge, auch eine *kinetische Behandlung statischer Probleme*; zum Beispiel wird in der kinetischen Gastheorie der statische Druck einer Gasmasse auf die Wandungen des sie einschliessenden Gefässes auf den Stoss der Moleküle gegen die Wandungen zurückgeführt.

18. Stösse bei Systemen.

18a. Die Anfangswerte der Geschwindigkeiten nach dem Stosse. In der Systematik der Impulse handelt es sich zunächst um Stösse im Sinne der Präzisionsdynamik (vgl. Nr. 3 dieses Artikels, besonders Anmerkung 28). Die Impulse dienen aber auch vielfach als Mittel zur angenäherten Beschreibung von Bewegungsvorgängen, bei denen sehr grosse Kräfte während sehr kleiner Zeiträume wirken, und so kommt es, dass die im Folgenden zu entwickelnden Theorien für die *Anwendungen* der Dynamik ganz besondere Wichtigkeit haben.

Wenn die Pur[illegible] eines Systems, das sich in Ruhe oder in Bewegung befindet, zur *Z*[illegible]$_0$ plötzliche Stösse erfahren, so ergiebt sich die Bewegung, die das System nach der Zeit t_0 ausführt, wenn man die Differentialgleichungen der Bewegung mit den Anfangsbedingungen integriert, die dem Bewegungszustande nach dem Stosse entsprechen. Die Koordinaten der Punkte haben dabei dieselben Werte, wie vor dem Stosse, aber die Anfangswerte der Geschwindigkeiten sind andere als vorher. Auch erfahren die Werte der Reaktionen zur Zeit t_0 plötzliche Änderungen, die man als *Stösse der Reaktionen* bezeichnet; diese Änderungen zu bestimmen, ist oft unerlässlich, weil die Vorrichtungen, mittels deren man die Bedingungen realisiert, wenn sie nicht zerbrechen oder zerreissen sollen, nur bis zu einer gewissen Grenze beansprucht werden dürfen.

Um die Anfangswerte der Geschwindigkeiten nach dem Stosse zu bestimmen, kann man bei einem holonomen Systeme mit r Graden der Freiheit folgendermassen verfahren. Die zugehörigen Lagrangeschen Gleichungen in den r Positionskoordinaten $q_1, \ldots, q_r$ seien (vgl. Nr. 7):

---

226) Vgl. *K. Heun*, Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik, Jahresber. d. D. M.-V. 9, Heft 2.

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\varkappa} - \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} = Q_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, r).$$

In dem kleinen Zeitintervalle von t_0 bis $t_0 + \tau$ mögen so grosse Kräfte wirken, dass die sogenannten Zeitintegrale über die verallgemeinerten Komponenten der Kraft:

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} Q_\varkappa dt$$

endliche Werte haben. Wenn man jetzt zur Grenze für $\tau = 0$ übergeht, erhält man die verallgemeinerten Komponenten $[Q_\varkappa]$ des Stosses, den das System zur Zeit t_0 erfährt[227]). Sie lassen sich aus den gewöhnlichen Komponenten der Stösse, die auf die Punkte des Systems ausgeübt werden, genau ebenso berechnen, wie die Komponenten der verallgemeinerten Kraft aus den gewöhnlichen Komponenten der Kräfte, die auf die Punkte des Systems wirken; man hat zu dem Zwecke nur den Ausdruck der virtuellen Arbeit der Stosskräfte:

$$\sum \{[X_a]\delta x_a + [Y_a]\delta y_a + [Z_a]\delta z_a\}$$

zu bilden und in ihm statt der Cartesischen Koordinaten die verallgemeinerten Koordinaten einzuführen.

Nach diesen Vorbereitungen möge auch bei den Lagrangeschen Gleichungen (1) das Zeitintegral gebildet und zur Grenze für $\tau = 0$ übergegangen werden. Die Glieder $-\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}$ liefern dabei den Beitrag Null, und man erhält daher, wenn die Werte vor und nach dem Stosse durch die Indizes Null und Eins charakterisiert werden, die Gleichungen:

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\varkappa}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\varkappa}\right)_0 = [Q_\varkappa] \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \tau).$$

Sie besagen, dass die Differenz der Werte der verallgemeinerten Impulskomponente p_a nach und vor dem Stosse gleich der entsprechenden verallgemeinerten Stosskomponente ist[227a]). Die Aufgabe

227) Die Voraussetzungen, die dieser Schlussweise zugrunde liegen, haben untersucht *G. Darboux*, Note 21 zu der Mécanique von *M. Despeyrous* und *T. Levi-Civita*, Meccanica, p. 410.

227a) Die Gleichungen (2) haben einen so anschaulichen Charakter, dass man auch umgekehrt von ihnen ausgehen und daraus die *Lagrange*schen Gleichungen (1) herleiten könnte. Indem man so von den Stößen zu kontinuierlich wirkenden Kräften übergeht, erhält man zunächst nur die Glieder $d\frac{\partial T}{\partial \dot q_\varkappa}$; dass in (1) die Glieder $\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} dt$ hinzutreten, erklärt sich daraus, dass in dem Zeitelemente dt das Axensystem eine Drehung erfährt; vgl. Nr. 4 und 7 dieses Artikels.

ist damit zurückgeführt auf die Lösung der Gleichungen (2) nach den r Geschwindigkeitskomponenten $(\dot{q}_\varkappa)_1$; diese Gleichungen enthalten die Unbekannten in *linearer* Form.

18b. Die Anfangswerte der Reaktionen nach dem Stosse. Wenn man auf die angegebene Art die Anfangswerte der Geschwindigkeiten nach dem Stosse ermittelt hat, lassen sich auch die zugehörigen Anfangswerte der Reaktionen des Systems bestimmen, indem man das Verfahren benutzt, das bei den sogenannten *Anfangsbewegungen* (Nr. 19 dieses Artikels) angewandt wird. Auf diese Art erhält man gleichzeitig die Änderungen, die die Reaktionen infolge des auf das System ausgeübten Stosses erfahren haben.

Die von dem Stosse geleistete Arbeit ist:

$$W = \tfrac{1}{2} \sum_\varkappa \{(\dot{q}_\varkappa)_0 + (\dot{q}_\varkappa)_1\} [Q_\varkappa].$$

Diese Gleichung lässt sich mit Hilfe der Identität

$$\sum_\varkappa (p_\varkappa)_1 (\dot{q}_\varkappa)_0 = \sum_\varkappa (p_\varkappa)_0 (\dot{q}_\varkappa)_1$$

und der Gleichungen (2) umformen in die Gleichung:

$$W = \tfrac{1}{2} \sum_\varkappa \{(p_\varkappa)_1 (\dot{q}_\varkappa)_1 - (p_\varkappa)_0 (\dot{q}_\varkappa)_0\}.$$

War das System zur Zeit t_0 ursprünglich in Ruhe, so verschwinden alle Grössen $(\dot{q}_\varkappa)_0$, und die Arbeit des Stosses wird:

$$W = \tfrac{1}{2} \sum (p_\varkappa)_1 (\dot{q}_\varkappa)_1; \tag{3}$$

die durch den Stoss erzeugte kinetische Energie ist also gleich der halben Summe aus den Produkten der Koordinaten des Stosses und der erzeugten Geschwindigkeiten.

Aus dem Ausdrucke (3) ergeben sich leicht folgende Theoreme:

1. *Theorem von J. Bertrand:* Ein holonomes System materieller Punkte werde dadurch in Bewegung versetzt, dass man auf einige Punkte Stösse ausübt, während die übrigen nur den Bedingungen unterworfen bleiben. Alsdann ist die dem System zugeführte kinetische Energie *grösser* als für irgend eine andere Bewegung, die dem System durch dieselben Stösse erteilt werden könnte in Verbindung mit irgend welchen anderen Stössen, die dem System keine Arbeit zuführen[228]).

2. *Theorem von Lord Kelvin:* Ein holonomes System materieller Punkte werde dadurch in Bewegung versetzt, dass einigen Punkten

---

228) *J. Bertrand,* J. de math. (1) 7 (1842), p. 166. Der Keim dieses Theorems findet sich bei *J. Lagrange,* Mécanique 1, 2e partie, section 3, Nr. 37; vgl. auch *Ch. Delaunay,* J. de math. (1) 5 (1840), p. 255 und *Ch. Sturm,* Paris C. R. 13 (1841), p. 1046.

und nur ihnen durch geeignete Stösse gegebene Geschwindigkeiten erteilt werden, während die übrigen Punkte lediglich solche Geschwindigkeiten annehmen, wie sie sich aus den Bedingungen ergeben. Alsdann hat die kinetische Energie bei der wirklich stattfindenden Bewegung den *kleinsten* Wert, der sich mit den vorgeschriebenen Bedingungen verträgt[229]).

A. Gray hat diese beiden Theoreme in das eine zusammengefasst, daß jeder einem holonomen Systeme auferlegte Zwang dessen Trägheit vergrössert[230]). Was er darunter versteht, zeigt das Beispiel eines Systems mit einer einzigen Positionskoordinate q, bei dem man den Quotienten $\frac{p}{\dot q}$ als *Trägheit* bezeichnen kann, da er in die Masse m übergeht, wenn q eine gewöhnliche Koordinate ist. Die kinetische Energie des Systems ist in diesem Falle gleich $\frac{1}{2}p\dot q$. Wenn man also p festhält (*Bertrand*), so wird durch den Zwang die Energie, mithin auch $\dot q$ verkleinert und $\frac{p}{\dot q}$ wächst. Wenn man aber $\dot q$ festhält (*Lord Kelvin*), so wird durch den Zwang die Energie, mithin auch p vergrössert und $\frac{p}{\dot q}$ wächst wieder.

Ganz ähnliche Betrachtungen, wie sie im vorhergehenden für holonome Systeme durchgeführt wurden, gelten auch für nichtholonome Systeme[231]). Hat man nämlich ein solches System mit r Graden der Freiheit und führt r generalisierte Koordinaten $q_1, \ldots, q_r$ ein, die die Lage des Systems zur Zeit t festlegen, so genügen diese zwar nicht den gewöhnlichen Lagrangeschen Gleichungen, wohl aber Gleichungen der Form:

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\varkappa} - \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} + \Delta_\varkappa = Q_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, r),$$

in denen die Zusatzglieder $\Delta_\varkappa$ quadratische Formen der $\dot q_1, \ldots, \dot q_r$ sind, deren Koeffizienten die $q_1, \ldots, q_r$ enthalten[232]). Wird daher unter den vorher angegebenen Voraussetzungen das Zeitintegral von t_0 bis $t_0 + \tau$ gebildet, so liefern auch die Zusatzglieder bei dem Übergange zu $\tau = 0$ keinen Beitrag, und man gelangt so wieder zu den Gleichungen (2).

229) *W. Thomson* und *P. G. Tait*, Handbuch, art. 317.

230) Physik 1, p. 264.

231) *F. Klein*, Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 259; *H. Beghin* et *Th. G. Rousseau*, J. de math. (5) 9 (1903), p. 21; vgl. auch die Bemerkung von *P. Appell*, ebenda p. 27.

232) Vgl. etwa *P. Appell*, J. de math. (5) 7 (1901), p. 5 und *G. Hamel*, Zeitschr. Math. Phys. 50 (1904), p. 1.

18c. Ergänzende Bemerkungen. Bei den vorhergehenden Betrachtungen wurde vorausgesetzt, dass die Bedingungen, die vor dem Stosse galten, auch während des Stosses und nach dem Stosse gelten. Das trifft jedoch nicht immer zu. Zum Beispiel wird bei dem ballistischen Pendel von *B. Robins* das Geschoss im Augenblicke des Auftreffens mit dem Pendel zu einem Körper vereinigt, und es entsteht so eine neue Bedingung, die während des Stosses und nach dem Stosse gilt[233]). Dagegen entsteht bei elastischen Kugeln im Augenblicke des Stosses eine neue Bedingung, die Bedingung der Berührung, die sofort nach dem Stosse wieder aufgehoben ist. Endlich denke man sich zwei materielle Punkte, die durch eine gewichtlose Stange verbunden sind; wenn die Stange bei einem auf das System ausgeübten Stosse zerbricht, so ist die Bedingung konstanter Entfernung nach dem Stosse aufgehoben. Man hat demnach vier sich ausschliessende Möglichkeiten für die Art einer Bedingung:

1. Bedingungen, die vor dem Stosse, während des Stosses und nachher gelten;

2. Bedingungen, die vor dem Stosse und während des Stosses, aber nicht nachher gelten;

3. Bedingungen, die während des Stosses und nach dem Stosse gelten, aber vorher nicht galten;

4. Bedingungen, die nur während des Stosses gelten.

Bedingungen, die während des Stoßes und nachher gelten, werden auch als *persistente* Bedingungen bezeichnet; es sind die Arten 1 und 3.[234])

Wie sich die Behandlung von holonomen Problemen mit solchen Bedingungen bei Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen gestaltet, haben besonders *Ch. Niven*[235]), *E. J. Routh*[236]) und *P. Appell*[237]) untersucht; während aber in den Gleichungen von *Niven* und *Routh* noch die Stösse der Reaktionen auftreten, die im Augenblicke des Stosses entstehen, hat *Appell* das Ziel erreicht, alle Reaktionen zu eliminieren.

---

233) *B. Robins,* New principles of gunnery, London 1742, deutsch: Neue Grundsätze der Artillerie von *L. Euler,* Berlin 1745. Genauere Durchführung bei *P. Appell,* Mécanique 2, p. 493; vgl. auch IV 18 Ballistik (*C. Cranz*).

234) *P. Appell,* Mécanique 2, p. 500.

235) Messenger of math. 4 (1868), p. 82.

236) Dynamik 1, Kap. 2, 4, 6, 7; dort auch viele Beispiele und Litteraturangaben.

237) Paris C. R. 116 (1893), p. 1483; J. de math. (5) 2 (1896), p. 5; Mécanique 2, p. 508.

Diese Untersuchungen lassen sich auch ohne weiteres auf nichtholonome Systeme ausdehnen.

Auf den Fall, daß bei einem Systeme plötzlich neue Verbindungen eingeführt werden, die nachher erhalten bleiben, bezieht sich das sogenannte *Theorem von L. Carnot:* In einem Systeme mögen zur Zeit t_0 plötzlich neue Bedingungen eingeführt werden, so dass die Reaktionen des Systems plötzliche Änderungen oder Stösse erfahren. Wenn die ursprünglichen und die neuen Bedingungen nach diesen Stössen der Reaktionen fortbestehen, so erhält man den Betrag der lebendigen Kraft, den das System zur Zeit t_0 verloren hat, indem man die lebendige Kraft berechnet, die dem Systeme zukäme, wenn jeder seiner Punkte die Geschwindigkeit hätte, die er bei dem Stosse verloren hat[238]).

Wenn die Punkte des Systems selbst zur Zeit t_0 Stösse erfahren, bedarf das Carnotsche Theorem einer Modifikation, die *G. Robin* angegeben hat[239]).

Noch verwickelter wird die Untersuchung, falls die Bedingungsgleichungen die Zeit enthalten oder Bedingungsungleichheiten bestehen; es möge hier auf die Abhandlungen von *H. Beghin*[240]) und *A. Mayer*[241]) verwiesen werden. Ebensowenig ist es möglich, hier auf Bedingungen mit Reibung einzugehen[242]).

Auch die Anwendung der Theorien, über die berichtet wurde, auf natürliche Körper kann hier nur gestreift werden; denn teils handelt es sich dabei um Untersuchungen, die vor dem 19. Jahrhundert angestellt worden sind[242a]), teils greift die Elastizitätstheorie ein. Es genüge zu bemerken, daß bei dem physikalischen Stosse die absolute Grösse oder besser Ausdehnung der natürlichen Körper eine entscheidende Rolle spielt. Wenn nämlich die Fortpflanzungsgeschwindig-

---

238) Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement, Paris 1803; Bericht über die anschliessende ältere Litteratur bei *J. M. C. Duhamel,* J. éc. polyt. cah. 24 (1835), p. 1.

239) Paris C. R. 105 (1887), p. 61; vgl. auch *P. Appell,* Mécanique 2, p. 506.

240) J. de math. (5) 9 (1903), p. 29.

241) Leipzig Ber. 50 (1898), p. 246; 51 (1899), p. 245.

242) Vgl. etwa *G. Darboux*, Bull. sciences math. (2) 4 (1880), p. 126 und dessen Note 21 in der Mécanique von *M. Despeyrous.*

242a) Für das 17. Jahrhundert vgl. *J. E. Montucla,* Histoire des mathématiques, 2. éd. 2 und *E. Mach*, Mechanik, Kap. 3, Abschnitt 4, wo über *G. Galilei, M. Marci, J. Wallis, Chr. Wren, Chr. Huygens, J. Newton* berichtet wird. Eine Darstellung der Untersuchungen im 18. Jahrhundert, wo vor allem *Joh. Bernoulli* und *L. Euler* zu nennen sind, steht noch aus; dabei würden auch die Versuche zu berücksichtigen sein, die man seit *G. L. Lesage* gemacht hat, die Gravitation auf Stösse zurückzuführen; vgl. V 2 (*J. Zenneck*).

keit der durch den Stoss im Körper hervorgerufenen Wellenbewegung nicht in Betracht kommt, wie bei dem Stosse kleiner Kugeln, lassen sich als Annäherung die Betrachtungen der Punktmechanik anwenden; wenn das aber nicht der Fall ist, wie etwa bei dem Stosse von langen Stäben, muss man seine Zuflucht zu den spezifischen Hilfsmitteln der Elastizitätstheorie nehmen; vgl. IV 26 (*H. Lamb*). Für den Stoss starrer Körper vgl. auch Nr. 43 dieses Artikels, für die technischen Anwendungen (Stossmaschinen) IV 10 (*K. Heun*) sowie IV 28 (*L. Prandtl*).

19. Sogenannte Anfangsbewegungen. Ein System von n materiellen Punkten, auf welche gegebene Kräfte wirken und zwischen deren Koordinaten r gegebene, holonome oder nicht holonome Bedingungsgleichungen bestehen, möge sich in einer bestimmten, mit den Bedingungen verträglichen Lage befinden, die aber keine Gleichgewichtslage sei. Indem man geeignete Bedingungsgleichungen hinzufügt, kann man erreichen, dass das System vermöge der sämtlichen Bedingungen im Gleichgewichte ist. Werden jetzt, etwa zur Zeit t_0, die neuen Bedingungen plötzlich aufgehoben, so wird das System sich von der Ruhe aus in Bewegung setzen, und man wird zunächst wissen wollen, in welcher Richtung die einzelnen Punkte des Systems ihre Anfangslage verlassen.

Um die *Anfangsrichtungen der Bewegung* zu bestimmen, differentiiere man die r Bedingungsgleichungen (vgl. Nr. 7):

$$(1)\quad \begin{cases} \sum_\alpha f_{\alpha\beta}(\dots, x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma, \dots)\frac{dx_\alpha}{dt} + g_{\alpha\beta}(\dots, x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma, \dots)\frac{dy_\alpha}{dt} \\ \quad + h_{\alpha\beta}(\dots, x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma, \dots)\frac{dz_\alpha}{dt} = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \dots, r), \end{cases}$$

einmal nach der Zeit t und setze $t = t_0$. Die Koordinaten $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ werden alsdann gleich den bekannten Anfangswerten $x_\alpha^0, y_\alpha^0, z_\alpha^0$, ihre ersten Ableitungen nach der Zeit verschwinden. Zur Bestimmung der $3n$ unbekannten Anfangswerte der zweiten Ableitungen $\ddot{x}_\alpha^0, \ddot{y}_\alpha^0, \ddot{z}_\alpha^0$ setze man auch in den $3n$ dynamischen Gleichungen:

$$(2)\quad \begin{cases} m_\alpha \ddot{x}_\alpha = X_\alpha + \sum_\beta \lambda_\beta f_{\alpha\beta}, \\ m_\alpha \ddot{y}_\alpha = Y_\alpha + \sum_\beta \lambda_\beta g_{\alpha\beta}, \\ m_\alpha \ddot{z}_\alpha = Z_\alpha + \sum_\beta \lambda_\beta h_{\alpha\beta} \end{cases}$$

$t = t_0$. Auf diese Art findet man $3n + r$ Gleichungen zur Bestimmung der $3n + r$ Unbekannten $\ddot{x}_\alpha^0, \ddot{y}_\alpha^0, \ddot{z}_\alpha^0, \lambda_\beta^0$; die Grössen λ_β bezeichnen die *Anfangswerte der Reaktionen*, die im allgemeinen von

den Reaktionen während der Ruhe verschieden sein werden, so dass *Unstetigkeiten in den Drucken* eintreten. Während also bei den *Stössen* die *ersten Ableitungen* der Koordinaten Unstetigkeiten erleiden, bleiben diese bei den *Anfangsbewegungen* stetig, aber die *zweiten Ableitungen* ändern sich sprungweise. Jetzt erhält man aus den Gleichungen:

$$
(3) \qquad \begin{cases} x_\alpha = x_\alpha^0 + \frac{1}{2}\ddot{x}_\alpha^0 (t - t_0)^2 + \cdots, \\ y_\alpha = y_\alpha^0 + \frac{1}{2}\ddot{y}_\alpha^0 (t - t_0)^2 + \cdots, \\ z_\alpha = z_\alpha^0 + \frac{1}{2}\ddot{z}_\alpha^0 (t - t_0)^2 + \cdots \end{cases}
$$

die Anfangsrichtungen der Bewegung des Punktes P_α, es sei denn, daß für ihn alle drei Grössen $\ddot{x}_\alpha^0, \ddot{y}_\alpha^0, \ddot{z}_\alpha^0$ verschwinden; sollte das der Fall sein, so hat man in den Taylorschen Entwicklungen nach Potenzen von $t - t_0$ die Glieder dritter Ordnung herzustellen und nötigenfalls noch weiter zu gehen. Der Krümmungsradius ϱ_α der Bahn des Punktes P_α hat im allgemeinen den Anfangswert Null, das heisst, die Bahn beginnt mit einer Spitze.

In vielen Fällen lassen sich die Rechnungen dadurch abkürzen, daß man Positionskoordinaten einführt, deren höhere Potenzen in den Entwicklungen weggelassen werden dürfen, weil sie zu den gesuchten Anfangswerten keinen Beitrag liefern. Genaueres hierüber findet man bei *E. J. Routh* (Dynamik 1, p. 180, 420); dort werden auch zahlreiche Beispiele gegeben, meist in der Form, daß bei einem gegebenen System, das sich in Ruhe befindet, Bedingungen plötzlich aufgehoben werden, indem etwa eine Stütze bricht oder ein Faden reisst, und nun nach der Anfangsbewegung des Systems und nach den Änderungen der Drucke gefragt wird.

20. Ausführungen über kleine Schwingungen der Systeme, insbesondere über solche mit Reibung.

In Nr. 9 ist bereits hervorgehoben worden, dass die Lehre von den kleinen Schwingungen in der Physik und in der Technik mannigfache Anwendungen gefunden hat. Für die Einzelheiten möge auf die betreffenden Artikel, vor allen auf IV 26 Schwingungen elastischer Systeme (*H. Lamb*) und IV 10 Dynamische Probleme der Maschinentechnik (*K. Heun*) verwiesen werden. Hier soll auf die Abänderungen eingegangen werden, die die *Lagrange*sche Theorie für die Zwecke der Anwendungen erfahren hat. Es hat sich nämlich als notwendig erwiesen, dabei neben den Kräften, die von der Lage des Systems abhängen (positional forces bei *W. Thomson* und *P. G. Tait*) Widerstandskräfte einzuführen, die bei kleinen Geschwindigkeiten den Geschwindigkeitskomponenten proportional angenommen werden dürfen (motional forces). Man be-

zeichnet diese Kräfte auch als Reibungskräfte; jedoch ist damit nicht die Coulombsche Reibung gemeint, sondern die Verzögerung (Dämpfung), die die Bewegung durch den Einfluss von Medien erfährt[243]).

20a. Gedämpfte Schwingungen bei Systemen mit einem Freiheitsgrade. Die erste Veranlassung zur Untersuchung solcher *gedämpften Schwingungen* scheinen die Oszillationen einer Magnetnadel gegeben zu haben, die in ihrem Schwerpunkte unterstützt ist und aus der Ruhelage durch die Einwirkung magnetischer oder elektrischer Kräfte entfernt wird (Lehre vom Erdmagnetismus: *A. v. Humboldt*, *Chr. Hansteen* (1819), *C. F. Gauss*; Elektromagnetismus: *H. Chr. Oersted* (1820), Erfindung des Multiplikators durch *J. S. Schweigger* und *J. Ch. Poggendorff*, 1821—22). Bezeichnet q den Bogen, den das eine Ende der Nadel durchläuft, m ihr Trägheitsmoment, N die magnetische Direktionskraft, $2h$ die verzögernde (dämpfende) Kraft, so erhält man die Differentialgleichung:

$$(1) \qquad m\ddot{q} + 2h\dot{q} + Nq = 0,$$

die *S. D. Poisson*[244]) und *C. F. Gauss*[245]) ausführlich behandelt haben. Wenn zur Abkürzung $\sqrt{\frac{N}{m} - \left(\frac{h}{m}\right)^2} = \alpha$ gesetzt wird, so ergiebt sich als allgemeines Integral:

$$q = Ae^{-ht:m} \sin \alpha(t - b),$$

wo A und b Integrationskonstanten bedeuten. Es finden also Schwingungen der Periode $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ statt[246]), deren Amplituden in geometrischer Progression abnehmen. Die konstante Differenz ihrer Logarithmen, die proportional h ist, nannte *C. F. Gauss* das *logarithmische Dekrement*[247]); es lässt sich unmittelbar aus den Beobachtungen bestimmen und dient zur Berechnung der Dämpfung h.

---

243) *J. L. Lagrange* selbst hat solche Widerstandskräfte noch nicht berücksichtigt, aber auch viele spätere Werke über theoretische Mechanik, so zum Beispiel die Mécanique von *A. Appell*, zeigen hier eine Lücke.

244) Mécanique 2. éd. (1833) 1, p. 349. In der ersten Auflage (1811) 1, p. 405 behandelte *Poisson* den Fall, dass der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, einen Fall, den schon *I. Newton*, Principia, pars 2, sectio 6 untersucht hatte.

245) Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel 1837 = Werke 5, p. 389.

246) Ist die Dämpfung so stark, dass $Nm - h^2$ negativ ausfällt, so erhält man statt der Schwingungen asymptotische Annäherung an eine Ruhelage. Die Möglichkeit einer solchen *aperiodischen* Bewegung erkannten schon *S. D. Poisson*, Mécanique 2. éd. (1833) 1, p. 351 und *C. F. Gauss*, Werke 5, p. 394; für die weitere Litteratur siehe Anmerkung 170*.

247) *C. F. Gauss*, Werke 5, p. 383.

Ebenso wie für die ungedämpfte harmonische Bewegung läßt sich für die gedämpfte eine einfache geometrische Darstellung geben. Ein materieller Punkt P bewege sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit auf einem *Kreise* mit dem Halbmesser μ und dem Mittelpunkte O. Wenn man den Radiusvektor auf irgend einen Durchmesser projiziert, wird die Projektion $OQ = s$ als Vektor durch die Gleichung gegeben:

$$s = \mu \sin(\varrho t + \sigma),$$

in der ϱ und σ Konstanten bezeichnen. Falls Dämpfung stattfindet, tritt an die Stelle des Kreises eine *logarithmische Spirale*, auf der sich wieder P mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit, in Bezug auf den Pol der Spirale, bewegt[247a]). Für die Projektion $OQ = s$ des Radiusvektors OP auf irgend eine durch den Pol gehende Gerade gilt dann die Gleichung:

$$s = Ae^{-ht:m} \sin(\varrho t + \sigma).$$

Erzwungene gedämpfte Schwingungen entstehen, wenn man noch eine periodisch wirkende störende Kraft hinzunimmt, also etwa, im einfachsten Falle, $C \cos at$. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung:

$$(2) \qquad m\ddot{q} + 2h\dot{q} + Nq = C \cos at$$

setzt sich aus zwei Summanden zusammen, von denen der erste die für $C = 0$ stattfindenden *Eigenschwingungen*, der zweite $q^* = P \cos(at + b)$ die durch die störende Kraft *erzwungenen Schwingungen* darstellt; P und b bedeuten Konstanten, die bestimmte Werte haben. Man hat also jetzt zwei *interferierende* Schwingungen[248]). Wenn Dämpfung vorhanden ist, erlöschen jedoch nach einiger Zeit die Eigenschwingungen und es bleiben die erzwungenen Schwingungen q^* allein übrig; dagegen kommt es am Anfange, wenn die Perioden der beiden Schwingungen nahezu gleich sind, zu *Schwebungen*[249]).

Vielfach ergiebt sich eine Vereinfachung in der Behandlung solcher Schwingungen, wenn man q und die störende Kraft als die reellen Teile von komplexen Grössen z und Ce^{iat} auffasst, so dass an die Stelle von (2) die Gleichung tritt:

$$(3) \qquad L\ddot{z} + 2M\dot{z} + Nz = Ce^{iat}.$$

Man genügt der Gleichung (3) im besonderen durch $z = z^* = Be^{iat}$,

247a) Vgl. *P. G. Tait*, Edinburg Roy. Soc. Proc. 6 (1869), p. 221 [1867] = Scientific papers 1, Cambr. 1898, p. 78.

248) Die Ausdrücke *interferieren*, *Interferenz* rühren von *Th. Young* her, Phil. Trans. 1802 (interfere), 1804 (interference).

249) Vgl. etwa die Darstellungen bei *A. Föppl*, Dynamik, erster Abschnitt, § 6 und *H. Lorenz*, Mechanik, Kap. 4.

wo B eine komplexe Konstante bedeutet, deren Wert sofort zu berechnen ist; bei den elektrischen Anwendungen ist L die Selbstinduktion, M der Ohmsche Widerstand, N das Reziproke der Kapazität, $Ce^{\lambda t} = \mathfrak{E}$ die (vektoriell aufgefasste) elektromotorische Kraft. Die neuere Elektrotechnik hat diese Auffassung den graphischen Methoden zu Grunde gelegt, die bei der Behandlung von sogenannten quasistationären Wechselströmen zur Anwendung gelangen, d. h. von Wechselströmen, die im ganzen Stromkreise näherungsweise gleichzeitig verlaufen; mittels der bekannten geometrischen Darstellung der komplexen Grössen lassen sich nämlich s^* und $\mathfrak{E}$ durch die Punkte von zwei konzentrischen Kreisen darstellen, und hieraus folgen einfache Konstruktionen für den induzierten Strom[250]).

20 b. Gedämpfte Schwingungen bei Systemen mit mehr als einem Freiheitsgrade. Weit schwieriger gestaltet sich die Behandlung der gedämpften Schwingungen bei Systemen von mehr als einem Grade der Freiheit, die ziemlich gleichzeitig *E. J. Routh*[250a]) und *W. Thomson*[251]) in Angriff genommen haben und mit denen sich später besonders *Lord Rayleigh*[252]) beschäftigt hat. Die ungedämpften Schwingungen eines Systems, bei dem die Kräfte eine Kräftefunktion haben, lassen sich nämlich in die Reihe der Hauptschwingungen zerlegen, die unabhängig voneinander erfolgen, so dass durch Einführung der Hauptkoordinaten das Problem auf die wiederholte Untersuchung von Systemen mit einem Grade der Freiheit zurückgeführt ist. Sobald jedoch Dämpfung stattfindet, sind die Veränderungen der einzelnen Positionskoordinaten untrennbar miteinander verknüpft; man hat sich also vorzustellen, dass das betrachtete System aus einer Reihe von *gekoppelten* zwangläufigen Systemen besteht.

Wenn ein System durch periodische störende Kräfte in Bewegung versetzt wird, so entstehen freie und erzwungene Schwingungen. Sind keine Widerstandskräfte vorhanden, so bleiben beide Arten von Schwingungen nebeneinander bestehen, treten aber solche Kräfte hin-

250) Die Benutzung komplexer Grössen findet sich schon in den Arbeiten von *A. L. Cauchy*, vgl. auch *H. v. Helmholtz*, Berlin Ber. 1878, p. 488 = Wiss. Abhandl. 1, p. 463 und *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. 1886; für die elektrotechnischen Anwendungen vgl. *C. P. Steinmetz*, Elektrotechn. Zeitschr. 1893, p. 597, 631, 641, 653, Theorie und Berechnung der Wechselstromerscheinungen, Leipzig 1900, sowie *J. L. la Cour*, Theorie der Wechselströme und Transformatoren, Berlin 1902, p. 46.

250a) Dynamik 2, Kap. 7.

251) Treatise (1867), § 343.

252) Scientif. papers 2, p. 188; Theory of sound, London 1877/78, 2. ed. London 1894/95.

zu, so nimmt die Amplitude der freien Schwingungen beständig ab, und diese werden schliesslich unmerklich. Dagegen sind die erzwungenen Schwingungen *permanent*, und die Wirkung der Dämpfung zeigt sich darin, daß sich die Amplituden der permanenten Schwingungen in festen Grenzen halten. Sind die Perioden der permanenten Schwingungen alle sehr gross, so werden diese für das Auge kaum wahrnehmbar sein; nach *E. J. Routh* heisst die Bewegung des Systems in diesem Falle *ruhig*. Giebt es aber unter den Perioden solche von kurzer Dauer, so scheint die mittlere Bewegung *zitternd* zu sein.

Als Beispiel sollen hier die Lagrangeschen Differentialgleichungen der Bewegung für den Fall von zwei Graden der Freiheit aufgestellt werden. Die kinetische Energie T, die Zerstreuungsfunktion F[65]) und die potentielle Energie V seien der Reihe nach durch die Ausdrücke dargestellt:

$$T = \tfrac{1}{2}(a_{11}\dot{x}^2 + 2a_{12}\dot{x}\dot{y} + a_{22}\dot{y}^2),$$
$$F = \tfrac{1}{2}(b_{11}\dot{x}^2 + 2b_{12}\dot{x}\dot{y} + b_{22}\dot{y}^2),$$
$$V = \tfrac{1}{2}(c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2).$$

Bedeuten X und Y die störenden Kräfte, so lauten die gesuchten Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} a_{11}\ddot{x} + a_{12}\ddot{y} + b_{11}\dot{x} + b_{12}\dot{y} + c_{11}x + c_{12}y = X, \\ a_{21}\ddot{x} + a_{22}\ddot{y} + b_{21}\dot{x} + b_{22}\dot{y} + c_{21}x + c_{22}y = Y; \end{cases}$$

dabei gelten die Symmetriebedingungen $a_{12} = a_{21}$, $b_{12} = b_{21}$, $c_{12} = c_{21}$. Wenn X und Y verschwinden, erhält man die Eigenschwingungen des Systems, zu denen alsdann die erzwungenen Schwingungen additiv hinzutreten. Zur Ermittelung der Eigenschwingungen dient der von *J. d'Alembert*[252a]) angegebene Ansatz.

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t},$$

aus dem für die Konstante λ eine Gleichung zweiten Grades folgt. Für die Durchführung im einzelnen sei auch eine Abhandlung von *M. Wien* genannt, die zahlreiche physikalische Anwendungen enthält[253]); zu diesen ist in neuester Zeit die drahtlose Telegraphie hinzugetreten[253a]).

Die Gleichungen (4) behalten einen dynamischen Sinn, wenn man darin den Konstanten b_{12} und b_{21} beliebige Werte beilegt. Die

---

252a) Berlin, Mém. 4 année 1748 (1752), p. 289.

253) Ann. Phys. Chem. (2) 61 (1897), p. 151; vgl. auch *A. G. Webster*, Dynamics, § 45 und *A. Sommerfeld*, Elektrotechn. Zeitschr. 25 (1904), p. 273, 291, 469; Wüllner-Festschrift, Leipzig 1905, p. 162.

253a) Vgl. etwa *J. Zenneck*, Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie, Stuttgart 1905.

Glieder mit $\dot{x}$ und $\dot{y}$ lassen sich alsdann in der Form schreiben:

$$b_{11}\dot{x} + \tfrac{1}{2}(b_{12} + b_{21})\dot{y} + \tfrac{1}{2}(b_{12} - b_{21})\dot{y},$$

$$\tfrac{1}{2}(b_{12} + b_{21})\dot{x} + b_{22}\dot{y} - \tfrac{1}{2}(b_{12} - b_{21})\dot{x};$$

die schiefsymmetrischen Glieder $+\tfrac{1}{2}(b_{12} - b_{21})\dot{y}$ und $-\tfrac{1}{2}(b_{12} - b_{21})\dot{x}$ heissen nach *W. Thomson* und *P. G. Tait* *gyroskopische* Terme; sie treten nämlich auf, wenn man die relative Bewegung von Systemen betrachtet und rühren von der Drehung des Systems gegen ein festes System her[254]). Solche gyroskopische Terme ergeben sich auch, wenn die Bedingungen von der Zeit abhängen, oder wenn dem Systeme Gyrostaten angehören; vgl. Nr. **44** dieses Artikels.

20c. Stabilität des Gleichgewichts. In engem Zusammenhange mit der Lehre von den kleinen Schwingungen steht die Frage nach der Stabilität des Gleichgewichts. Da jedoch die elementaren Mittel nur selten zu einer Entscheidung über die Stabilität ausreichen, genüge hier folgende Bemerkung. Wenn ein System, auf das gegebene Kräfte wirken, im Gleichgewicht ist, so bleibt das *Gleichgewicht* erhalten, falls man zu den vorhandenen Verbindungen neue Verbindungen hinzufügt. Dass aber auch die *Stabilität* erhalten bleibt, gilt ohne Weiteres nur dann, wenn die Kräfte von einer Kräftefunktion herrühren. Ist das jedoch nicht der Fall, so kann es sehr wohl eintreten, dass durch die Hinzufügung von Verbindungen die Stabilität nicht verstärkt, sondern zerstört wird[254a]).

21. Sonstige Probleme aus der Kinetik der Systeme.

21a. Freie Systeme. Bei der *freien Bewegung* eines einzelnen Punktes in der Ebene oder im Raume (Nr. **13**) betrachtet man mit Vorliebe Kraftfelder, die von festen Attraktionszentren herrühren. In Wirklichkeit werden sich jedoch diese Zentren ebenfalls bewegen, wenn auch unter Umständen sehr langsam, und man wird so zu dem Problem geführt, die Bewegung eines Systems freier materieller Punkte zu ermitteln, die sich gegenseitig anziehen[255]). Hierher gehört im Be-

---

254) Treatise, § 345 VI; zuerst in der Ausgabe vom Jahre 1883.

254a) *J. Andrade*, Bull. soc. math de France 25 (1897), p. 49; Paris C. R. 127 (1898), p. 712; *L. Lecornu*, Paris C. R. 126 (1898), p. 1777; Bull. soc. math. de France 26 (1898), p. 163.

255) Für die *kinematische* Betrachtung bieten solche *Systeme freier Punkte* gegenüber dem einzelnen Punkte kaum etwas Neues. Höchstens wäre das Problem des Zusammenstosses zu nennen, das jedoch sofort aus der Punktmechanik hinausführt, da es sich bei dem Zusammenstosse nur um Körper endlicher Ausdehnung handeln kann. Dagegen spielt die Dynamik solcher Systeme nicht nur in der Astronomie, sondern auch in der Physik eine grosse Rolle; man denke nur an die zahlreichen Versuche, die *Atomistik* streng durchzuführen.

sonderen das astronomische *Vielkörperproblem*; ein Bericht über die umfangreiche Litteratur wird nach der mathematischen Seite hin in IV 12 (*P. Stäckel*), nach der spezifisch astronomischen hin in VI 2 12 (*E. T. Whittaker*) gegeben werden.

Hier ist nur zu erwähnen, dass das *astronomische* Zweikörperproblem sich sofort auf das Problem der Anziehung eines einzigen Punktes durch ein festes Zentrum zurückführen lässt[256]), dass dagegen das astronomische Dreikörperproblem nur in ganz speziellen Fällen eine elementare Behandlung gestattet, nämlich in den beiden von *J. L. Lagrange* entdeckten Fälle, dass die drei Punkte immer in einer Geraden liegen oder immer ein gleichseitiges Dreieck bilden[257]). „Diese Lösungen scheinen beim ersten Anblick nur oberflächliches Interesse zu haben; verschiedene Untersuchungen haben indessen gezeigt, dass sie von der grössten Bedeutung für das allgemeine Problem sind, und dass sie wahrscheinlich in engem Zusammenhange mit den wesentlichen Singularitäten der Integrale stehen"[258]). *R. Lehmann-Filhés* hat entsprechende Untersuchungen für vier Punkte angestellt, die stets ein regelmässiges Tetraeder bilden, und für beliebig viele Punkte, die stets in einer Geraden liegen[259]). Auch die „numerischen Experimente" von *G. H. Darwin* sind hier insofern anzuführen, als die mathematischen Hilfsmittel, deren *Darwin* sich zur Berechnung der Bahn eines Satelliten um zwei Hauptkörper bedient hat, wesentlich elementarer Art sind[260]).

Was andere Kraftgesetze betrifft, so lässt sich das Vielkörperproblem für Anziehung proportional der Entfernung auf elementarem Wege lösen[261]). Ferner ist die Bewegung von drei Punkten,

---

256) *I. Newton*, Principia, lib. I, sectio 11.

257) Paris Prix de l'acad. 9 (1772) = Oeuvres 6, p. 227; vgl. auch *L. Euler*, Petersburg Nov. Comment. 11 ad annum 1765, p. 144 und Nova acta 3 ad annum 1785, p. 126; *P. S. Laplace*, Mécanique céleste 4, p. 307; *J. Liouville*, Connaissance des temps 1845, Additions, p. 3; *E. J. Routh*, Dynamik 1, p. 257; *A. Ljapunoff*, Charkow Ges. (2) 2 (1889), p. 1; *P. Pizzetti*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 13^1 (1904), p. 17. Den speziellen Fall, dass zwei der drei Punkte gleiche Masse haben und der dritte mit ihnen immer ein gleichschenkliges Dreieck bildet, betrachtete *D. Gorjatscheff*, Moskau Ges. der Freunde der Naturkunde, Phys. Section, 7 (1895), 8 (1896).

258) *C. L. V. Charlier*, Die Mechanik des Himmels 2, Leipzig 1905, p. 89; hier findet man auch einen Bericht über die Untersuchungen, die *G. W. Hill* und *H. Poincaré* in diesem Zusammenhange angestellt haben.

259) Astr. Nachr. 127 (1891), p. 137; vgl. *W. Veltmann*, Astr. Nachr. 86 (1875), p. 17 und die Bemerkungen, die *H. Bruns* dazu gemacht hat, Fortschr. d. Math. 7 (1875), p. 568, sowie *R. Hoppe*, Arch. Math. Phys. 64 (1879), p. 218.

260) Acta math. 21 (1897), p. 99; Math. Ann. 51 (1899), p. 523.

261) *H. Pfaff*, Progr. Holzminden 1887, wo auch der Fall behandelt wird,

die sich auf einer Geraden bewegen und einander umgekehrt proportional dem Kubus der Entfernung anziehen, mittels Quadraturen gelöst worden[262]).

21b. Gebundene Systeme. Seitdem *J. d'Alembert* 1743 in dem Traité de dynamique den Weg gebahnt hatte, sind kinetische Probleme, bei denen zwischen den Punkten des Systems *Verbindungen* bestehen, in so grosser Anzahl untersucht worden, dass hier nur einige Beispiele angeführt werden können und im übrigen auf die Lehrbücher und Aufgabensammlungen verwiesen werden muss.

An erster Stelle sei die *Atwood*sche Fallmaschine genannt, die zwar aus dem 18. Jahrhundert stammt[263]), aber als einfachster Typus eines gebundenen Systems auch im 19. Jahrhundert vielfach behandelt worden ist[264]).

V. Puiseux hat die Bewegung einer homogenen, schweren Kette betrachtet, die auf einer festen, ebenen oder räumlichen Kurve gleitet[265]). Es sei $2l$ die Länge der Kette, und man bezeichne mit s die von dem festen Punkte O der Kurve aus bis zu dem Punkte P gemessene Bogenlänge, bei deren Einführung als Parameter die Höhe z von P über der Horizontalen gleich $f(s)$ wird, mit q aber die Bogenlänge von O bis zu dem Mittelpunkte M der Kette, von dem aus sie sich also nach beiden Seiten in der Länge l erstreckt. Alsdann liefert der Satz von der lebendigen Kraft für die Bewegung des Systems mit dem Freiheitsgrade Eins die Differentialgleichung:

$$\ddot{q} = -\frac{g}{2l}\left[f(q+l) - f(q-l)\right],$$

die der Differentialgleichung für die Bewegung eines materiellen Punktes analog ist. Die Bewegung ist von der Länge $2l$ der Kette unabhängig, wenn die feste Kurve entweder eine Schraubenlinie auf einem vertikalen Zylinder oder eine Zykloide mit vertikaler Achse

---

daß die Punkte gezwungen sind, in festen Ebenen zu bleiben; vgl. jedoch schon *I. Newton,* Principia, lib. I, prop. 64.

262) *C. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 29 (1845) = Werke 4, p. 478; dazu eine nachgelassene Abhandlung Werke 4, p. 533; vgl. *H. Eggers,* Arch. Math. Phys. (1) 12 (1849), p. 314; *E. J. Routh,* London Math. Soc. Proc. 6 (1875), p. 86; *F. Rudio,* J. f. Math. 100 (1887), p. 442; 102 (1888), p. 8; *J. Meschtscherskij,* Bull. sciences math. (2) 18 (1894), p. 170.

263) *G. Atwood,* On the rectilinear motion and rotation of bodies, London 1784.

264) Vgl. etwa *E. Mach,* Mechanik, p. 149; es sei auch auf andere Apparate hingewiesen, die zur Veranschaulichung des *d'Alembert*schen Prinzips dienen, ebendaselbst, p. 368.

265) J. de math. (1) 8 (1843), p. 71.

oder deren Abwicklung auf einen vertikalen Zylinder ist. In dem zweiten und dritten Falle ergiebt sich für die Spannung der Kette, wie *P. Appell* bemerkt hat, ein negativer Wert; man müsste die Kette also in eine Röhre von der Gestalt der festen Kurve einschliessen[266]). Die feste Kurve darf auch Ecken haben, und man findet daher auf dem angegebenen Wege zum Beispiel die Bewegung einer Kette, die von einem Tische herabgleitet.

Vielfache Bearbeitung hat seit dem 18. Jahrhundert die Frage nach der Bewegung *zwei- und mehrgliedriger Pendel* gefunden[267]). Als ein zweigliedriges Pendel lässt sich auch das System von Glocke und Klöppel auffassen, das die Aufmerksamkeit erregte, als im Jahre 1875 bei der im Dom zu Cöln aufgehängten Kaiserglocke sich der Klöppel gar nicht relativ zur Glocke bewegte, sondern in deren Mittellinie verharrte; als Bedingung des Versagens ergab sich, dass der Schwingungsmittelpunkt des Klöppels mit dem Schwingungsmittelpunkt des Systems zusammenfällt, das entsteht, wenn Klöppel und Glocke starr mit einander verbunden werden[268]).

Endlich möge noch eine irrtümliche *Anwendung des Flächensatzes* auf die Bewegungen lebender Wesen erwähnt werden. Wenn sich ein Tier, so argumentierte man[269]), ruhend im Raume befindet und keine äusseren Kräfte darauf wirken, so behält sein Schwerpunkt stets dieselbe Lage. Es kann aber auch keine Drehung um den Schwerpunkt ausführen; denn wie es auch seine Muskeln spielen lässt, so werden nur *innere Kräfte* entwickelt, die nach dem Gesetze der Aktion und Reaktion paarweise gleich und entgegengesetzt sind, und die Summe der Drehungsmomente ist Null. War also die Konstante des Flächensatzes zu Anfang Null, so muss sie stets verschwinden. Dasselbe gilt auch, wenn das Tier *aus der Ruhe* auf die Erde fällt; denn

---

266) Mécanique, p. 51.

267) Die ältere Litteratur über zweigliedrige Pendel bei *M. Luxenburg*, Zeitschr. Math. Phys. 28 (1883), p. 309; dazu *E. Jackwitz*, Programm Posen 1881. Für mehrgliedrige Pendel *W. Dumas*, Festschrift Berlin 1874; *G. Lehmann*, Programm Rudolstadt 1881.

268) *W. Veltmann*, Dinglers polyt. J. 220 (1876), p. 481; *A. Föppl*, Technische Mechanik 4 (1899), p. 290; *R. Skutsch*, Berlin Math. Ges. Ber. 4 (1905), p. 54. Diese theoretischen Untersuchungen erklären übrigens nur den Vorgang des *Ausläutens*, nämlich der Bewegung von dem Zeitpunkte ab, wo keine periodischen Anstösse von aussen mehr erfolgen. Der eigentliche Läutevorgang verlangt ganz andere Ansätze, namentlich die Berücksichtigung der Erscheinungen bei dem Stosse zwischen Klöppel und Glocke; vgl. IV 10 (*K. Heun*).

269) Vgl. etwa *Ch. Delaunay*, Mécanique 1856, deutsche Ausgabe, p. 333. Wegen der richtigen Auffassung siehe auch IV 9 (*G. T. Walker*) Anhang, p. 150.

die Wirkung der Schwere kommt allein bei der Bewegung des Schwerpunktes zur Geltung, und für die Drehung um diesen sind keine äusseren Kräfte zu berücksichtigen.

Dass diese Ausführungen, die in viele Lehrbücher übergegangen sind, einen Fehler enthalten, zeigt die nicht zu bezweifelnde Tatsache, dass eine Katze, die mit den Beinen nach oben aus hinreichender Höhe fallen gelassen wird, doch auf ihre Füsse zu stehen kommt. Diese Drehung rührt nicht etwa von einem Drehmoment her, das der Katze im Augenblick des Absturzes erteilt worden ist; denn die photographischen Momentaufnahmen, die *J. Marey* 1894 auf Veranlassung von *M. Deprez* hergestellt[270]) hat, zeigen, dass die Katze zunächst so fällt, als ob sie ein starres System mit reiner Translation wäre. Darauf streckt sie ihre Hinterbeine senkrecht zur Körperachse aus und zieht die Vorderbeine dicht an den Nacken; gleichzeitig dreht die Katze ihr Vorderteil um einen möglichst grossen Winkel, wodurch bewirkt wird, dass ihr Hinterteil sich, im entgegengesetzten Sinne, um einen kleineren Winkel dreht. Nunmehr schmiegt die Katze die Hinterbeine dicht an den Körper, streckt die Vorderbeine senkrecht zur Körperachse aus und dreht ihr Hinterteil, in demselben Sinne, wie vorher ihr Vorderteil, um einen möglichst grossen Winkel, wodurch bewirkt wird, dass ihr Vorderteil sich, in entgegengesetztem Sinne, um einen kleineren Winkel dreht. Auf diese Weise hat sie sich als Ganzes um den Unterschied der beiden Winkel gedreht und kommt durch Wiederholung dieses Verfahrens in die gewünschte Lage mit dem Rücken nach oben. Daraus, dass die Konstante des Flächensatzes Null ist, darf man also nicht schliessen, daß keine Drehung stattfindet; nur bei einem starren Körper wäre dieser Schluss erlaubt[271]).

Dass der Trugschluss, die fallende Katze könne sich, von der Ruhe aus, nicht drehen, so lange unbemerkt geblieben ist, erklärt sich, nach einer Bemerkung von *F. Klein*, wohl aus dem Umstande, dass es sich dabei im Grunde um das Auftreten einer *nichtholonomen Bedingung* handelt. Der analytische Ansatz führt nämlich in seiner

---

270) Paris C. R. 119 (1894) p. 714; dort auch Reproduktionen der Aufnahmen.

271) *E. Guyou*, Paris C. R. 119 (1894), p. 717; vgl. auch die Ausführungen ebenda von *M. Levy*, p. 718, *M. Deprez*, p. 767, *L. Lecornu*, p. 899 sowie *P. Appell*, Bull. soc. math. de France 22 (1894), p, 190; *E. Picard*, ebenda p. 195; *A. de Saint-Germain*, Nouv. ann. (3) 14 (1895), p. 184. Nach *P. Painlevé*, Paris C. R. 139 (1904), p. 1170 gilt dieser Schluss auch für jedes System materieller Punkte, bei dem die inneren Kräfte von einer eindeutigen Kräftefunktion herrühren, die allein von den Entfernungen der Punkte abhängt.

einfachsten Form auf ein System mit vier Graden der Freiheit, bei dem zwischen den Koordinaten $r_1, r_2, \vartheta_1, \vartheta_2$ die nichtholonome Bedingung besteht:

$$m_1 r_1 d\vartheta_1 + m_2 r_2 d\vartheta_2 = 0;$$

diese Gleichung, in der m_1 und m_2 Konstanten bezeichnen, ist nichts anderes als der Flächensatz. Ein solches System kann sich von der Ruhe aus sehr wohl so bewegen, dass es in eine beliebig gegebene Konfiguration übergeht; allein man muss, wie es in Nr. 16 dieses Artikels auseinandergesetzt worden ist, den Übergang geeignet wählen.

C. Zwischenstück: Zusammenhang mit der Mechanik der Kontinua.

22. Übergang zu Systemen von unendlich vielen Punkten. Es giebt zwei wesentlich verschiedene Methoden, die Dynamik der *Kontinua* anzugreifen, die *direkte Methode* und die *Methode des Grenzüberganges*; die Geschichte der Mechanik zeigt, dass diese beiden Methoden von Anfang an nebeneinander hergegangen sind[272]).

Die *direkte Methode* besteht darin, dass man die Grundbegriffe und die Prinzipien der Punktdynamik in sinngemässer Weise auf Kontinua überträgt. Was die Verallgemeinerung der Grundbegriffe angeht, deren Notwendigkeit nicht überall genügend hervorgehoben wird, so wird man zum Beispiel schon bei der direkten Untersuchung der Gleichgewichtsgestalt eines absolut biegsamen, unausdehnbaren Fadens zu dem Begriff der *auf die Längeneinheit bezogenen Kraft* geführt; ebenso ist *der auf die Flächeneinheit bezogene Druck* eine Grösse anderer Dimension als der Druck, den ein materieller Punkt auf eine Unterlage ausübt[273]). In Bezug auf Prinzipien aber ist zu bemerken, dass die Anwendung des *d'Alembert*schen oder des sogenannten *Hamilton*schen Prinzips auf kontinuierlich ausgedehnte Systeme nur dadurch ermöglicht wird, dass man eine Erweiterung der Gültigkeit postuliert[274]).

Bei der *Methode des Grenzüberganges* betrachtet man zuerst ein System von einer grossen Anzahl materieller Punkte, auf die teils eingeprägte Kräfte wirken, teils Kräfte, die aus Verbindungen entspringen; diese Verbindungen denkt man sich durch masselose Fäden

272) Die direkte Methode findet sich schon bei *Brook Taylor,* Phil. Trans. 28 (1713), p. 26, Methodus incrementorum, London 1715, p. 88; die Methode des Grenzüberganges bei *Daniel Bernoulli,* Petersburg Comment. 6 ad annos 1732/33 (1738), p. 116; vgl. auch *H. Burkhardt,* Bericht, erster Abschnitt.

273) Vgl. etwa *P. Appell,* Mécanique 1, p. 177.

274) Vgl. IV 1, Nr. 42 (*A. Voss*).

oder Stangen realisiert[275]). Von einem solchen Systeme diskreter Massenpunkte geht man darauf zu einem Systeme über, das einen Teil des Raumes kontinuierlich erfüllt. Dieser Grenzübergang kann wiederum auf zwei verschiedene Arten vollzogen werden. Man kann *erstens* in dem *Ansatz* die Anzahl der bewegten Punkte über alle Grenzen wachsen lassen; dabei gehen die Summen in Integrale über[276]), und an die Stelle der Differenzengleichungen treten Differentialgleichungen, an die Stelle der gewöhnlichen Differentialgleichungen partielle Differentialgleichungen[277]). Während man aber im 18. Jahrhundert mit solchen Grenzübergängen naiv und sorglos umging[278]), sind sie im 19. Jahrhundert bewusst und mit voller Strenge vorgenommen worden[279]). *Zweitens* kann man zuerst die Gleichungen für die Bewegung oder das Gleichgewicht des Systems diskreter Punkte lösen und nachträglich in den *Schlussergebnissen* die Anzahl der Punkte ins Unendliche wachsen lassen. So ist man zum Beispiel im 18. Jahrhundert bei der Frage nach den kleinen Schwingungen eines Fadens vorgegangen; der Faden wurde durch n Massenpunkte ersetzt, die durch masselose Fäden verbunden sein sollten, und in der Lösung dieses Problems liess man n über alle Grenzen zunehmen[280]).

Die Durchführung der *Mechanik der Kontinua* muss fast ganz dem zweiten Teile dieses Bandes (Hydrodynamik, Elastizitätstheorie) sowie dem Bande V (Mathematische Physik) anheimfallen. Für den vorliegenden Artikel kommen zunächst die Fälle in Betracht, bei denen man zu kontinuierlichen Systemen mit einer endlichen Anzahl von Graden der Freiheit gelangt; im wesentlichen handelt es sich dabei um den *starren Körper* und Systeme, die aus starren Körpern zusammengesetzt sind (*Körperketten*)[281]); diese Theorie wird den Gegenstand des zweiten Teiles des Artikels bilden. Dazu kommen aber an deformierbaren

---

275) Wie man die Verbindungen realisiert, ist insofern gleichgiltig, als die aus den Verbindungen entspringenden Reaktionen nicht in Frage kommen.

276) Den Übergang von den endlichen Summen zu den Integralen untersucht ausführlich *Ph. Gilbert,* Mécanique, Paris und Brüssel 1891.

277) Vgl. *H. Poincaré,* Am. J. of math. 12 (1890), p. 283.

278) Bedenken freilich erhob schon *J. d'Alembert,* Opusc. 1, Paris 1761, p. 45.

279) Vgl. IV 1, Nr. **11** (*A. Voss*).

280) So zum Beispiel *J. L. Lagrange,* Misc. Taur. 1 (1759) = Oeuvres 1, p. 37, ebenda 3^2 (1762/65) = Oeuvres 1, p. 539.

281) Auch die *affin veränderlichen Systeme* besitzen nur eine endliche Anzahl von Graden der Freiheit; sie haben jedoch lediglich ein abstrakt-theoretisches Interesse, und dasselbe würde von Systemen gelten, deren Veränderlichkeit durch irgend eine andere endliche kontinuierliche Gruppe des Raumes als die der starren Bewegungen gegeben wird; vgl. über solche Systeme auch IV 3, Nr. **31** (*A. Schoenflies* und *M. Grübler.*)

kontinuierlichen Systemen noch die unausdehnbaren Fäden und die unausdehnbaren Membranen, die man seit *J. L. Lagrange*[282]) im Anschluss an die Punktdynamik zu behandeln pflegt. Über die betreffenden Untersuchungen soll in den beiden folgenden Nummern berichtet werden.

23. Gleichgewichtsgestalten von Fäden. Während *G. Galilei* geglaubt hatte, eine „feine Kette", die an ihren Endpunkten aufgehängt wird, nehme unter der Wirkung der Schwere die Gestalt einer Parabel an[283]), haben gleichzeitig *Jac.* und *Joh. Bernoulli*, *Chr. Huygens* und *G. W. Leibniz* die richtige Bestimmung der *Kettenlinie*:

$$y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

gegeben[284]). *Jacob Bernoulli* erweiterte das Problem sofort auf Fäden (Seile), deren Dicke eine Funktion der Bogenlänge ist, und liess beliebige Kräfte wirken[285]), *Johann Bernoulli* aber nahm die Bedingung hinzu, dass der Faden auf einer gegebenen krummen Fläche liegen sollte[286]); hieran haben sich im 18. Jahrhundert zahlreiche weitere Untersuchungen geschlossen[287]).

Im 19. Jahrhundert hat man bei freien Fäden zunächst Fälle betrachtet, in denen die wirkenden Kräfte parallel sind; die Fadenkurve (Seilkurve) ist dann eben[288]). Wirkt auf den Faden ausser der eigenen Schwere noch eine konstante Belastung, so erhält man die *Kettenbrückenlinie*[289]). Ebenso ist die Fadenkurve eben, wenn die

---

282) Mécanique, 1. partie, sect. 5, chap. 3.

283) Discorsi, 1638, zweiter Tag, Ostwalds Klassiker, 11, p. 123.

284) Acta erud. Lips. 1691, p. 273—282; einen Beweis für die dort mitgeteilten Konstruktionen lieferte zuerst *D. Gregory*, Phil. Trans. 19 (1697), p. 637.

285) Acta erud. Lips. 1691, p. 289; genauere Ausführung in den Lectiones mathematicae *Johann Bernoullis* aus den Jahren 1691/92 = Opera 3, p. 491.

286) Acta erud. Lips. 1698, p. 466 = Opera 1, p. 262.

287) Genannt seien etwa: *J. Hermann*, Phoronomia, Amsterdam 1716, lib. 1, cap. 3; *P. Varignon*, Paris Mém. année 1717, p. 251; *J. A. Segner*, Antrittsprogramm, Göttingen 1735 (lineae quietis auf Drehungsflächen); *Joh. Bernoulli*, Opera 4 (1742), p. 234 (hier werden zuerst die Gleichgewichtsbedingungen für einen Faden allgemein hergeleitet); *A. Clairaut*, Berlin Miscellanea 7 (1743), p. 270; *G. W. Krafft*, Petersburg Nov. Comment. ad annos 1754/55, p. 143; *L. Euler*, Petersburg Nov. Comment. 15 ad annum 1770, p. 381; 20 ad annum 1775, p. 286; *J. L. Lagrange*, Mécanique 1 (1788); *N. Fuss*, Petersburg Nova acta 12 (1801), p. 145.

288) Viele Beispiele bei *M. Jullien*, Problèmes 2, p. 139; *J. Finger*, Mechanik, Wien 1886 (in der zweiten Auflage ist dieser Abschnitt gekürzt worden); *R. Marcolongo*, Meccanica, Mailand 1905.

289) *L. Navier*, Mémoire sur les ponts suspendus, Paris 1823, p. 64.

Kräfte von einem anziehenden oder abstossenden Zentrum herrühren[290]). Vielfach behandelt wurde auch die Gestalt eines Fadens, der mit den Endpunkten an einer gleichförmig rotierenden Achse befestigt ist; je nachdem der Faden die Achse kein-, ein-, zwei-, ..., n-mal schneidet, ergiebt sich jedesmal eine besondere Gleichgewichtslage[291]). Physikalische Bedeutung hat der Fall, dass ein biegsamer Metalldraht von einem elektrischen Strome durchflossen und gleichzeitig von einem festen Magnetpole beeinflusst wird; nach *G. Darboux* hat er die Form einer geodätischen Linie eines Kreiskegels, dessen Spitze der Magnetpol ist[292]).

Was Fäden auf krummen Flächen betrifft, so hat man vorzugsweise Kettenlinien, d. h. schwere Fäden, auf Drehungsflächen mit vertikaler Achse betrachtet[293]) und daneben auch begonnen, rauhe Flächen zu untersuchen[294]).

Bei dem analytischen Ansatz ersetzt man in der *Methode des Grenzüberganges* die Fadenkurve durch ein Polygon und denkt sich die Masse der Polygonseiten in deren Schwerpunkten konzentriert. Als Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich alsdann Differenzengleichungen. In manchen Fällen, z. B. bei dem Problem der Hängebrücke[294a]), gelingt es, diese Gleichungen Schritt für Schritt zu lösen, und indem man nachträglich die Anzahl der Seiten des Polygons über alle Grenzen wachsen lässt, entsteht die Fadenkurve. Im allgemeinen aber wird man in den Differenzenglei-

---

290) Litteratur siehe Anmerkung 287; dazu *A. F. Möbius*, Statik, Leipzig 1837 (das Moment der Spannung in Bezug auf das Zentrum ist konstant) und *O. Bonnet*, J. de math. (1) 9 (1844), p. 97.

291) *A. Clebsch*, J. f. Math. 57 (1860), p. 93; *Ottomar Müller*, Programm Magdeburg 1875; *P. Plettenberg*, Diss. Halle 1882; *R. Hoppe*, Arch. Math. Phys. 70 (1883), p. 90; *R. Marcolongo*, Napoli Acc. Rend. (2) 6 (1892), p. 71.

292) Bull. sciences math. (2) 2 (1878), p. 433; vgl. auch *J. Larmor*, London, Proc. Math. Soc. 15 (1884), p. 158.

293) Sphärische Kettenlinie: *Chr. Gudermann*, Grundriß der analytischen Sphärik, Cöln 1830; J. f. Math. 11 (1834), p. 394; 33 (1846), p. 189, 281; *F. Minding*, J. f. Math. 12 (1834), p. 179; *A. Clebsch*, J. f. Math. 57 (1860), p. 93; *W. Biermann*, Diss. Berlin 1865; *M. Schlegel*, Programm Wilhelms-Gymnasium Berlin 1884; *R. Marcolongo*, Napoli Rend. (2) 6 (1892), p. 89; *P. Appell*, Bull. soc. math. de France 13 (1885), p. 65; *A. G. Greenhill*, Lond. Math. Soc. Proc. 27 (1896), p. 123 (im Anschluß hieran hat *J. Dewar* ausgezeichnete Stereoskopbilder sphärischer Kettenlinien angefertigt). Kreiskegel: *B. Peirce*, Astron. J. 4 (1856). Kreiszylinder, Kreiskegel, Rotationsparaboloid: *H. Dannehl*, Diss. Königsberg 1887.

294) *J. H. Jellett*, Reibung, p. 62; *F. August*, Arch. Math. Phys. 70 (1883), p. 225.

294a) Vgl. *P. Appell*, Mécanique 1, p. 169.

chungen selbst zur Grenze übergehen und wird so dieselben Differentialgleichungen finden, die sich bei der *direkten Methode* ergeben.

Diese Differentialgleichungen (vgl. Nr. **11** dieses Artikels) lauten bei freien homogenen Fäden:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X ds = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y ds = 0, \quad d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z ds = 0,$$

und bei homogenen Fäden, die auf einer krummen Fläche $f(x, y, z) = 0$ liegen:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

dazu tritt noch die Relation:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

Die Integration liefert sechs Konstanten, zu deren Bestimmung *Grenzbedingungen* dienen. Ursprünglich hatte man angenommen, dass die Enden des Fadens fest sind[295]), später aber wurden auch andere Grenzbedingungen gewählt: ein Endpunkt kann an einem Ringe über eine feste Kurve gleiten oder sich, indem etwa eine Kugel daran befestigt ist, über eine feste krumme Fläche bewegen[296]). Man hat ferner beachtet, dass eine Lösung der Aufgabe nur dann auf einen Faden anwendbar ist, wenn der erhaltene Wert der Spannung T positiv ist. Wenn aber T auf einem Kurvenbogen negativ ausfällt, so gewinnt die Lösung eine mechanische Bedeutung, indem man den Faden durch eine Reihe fester Kügelchen ersetzt, die auf Druck beansprucht werden[297]); die so gewonnenen Kurven heissen auch *Druck-* oder *Stützlinien* und spielen in der Lehre von den Gewölben eine Rolle[298]).

Wie schon das Beispiel der Drucklinien zeigt, lässt sich die Fragestellung auf mannigfache Art abändern und verallgemeinern. So hat man angenommen, dass die Kräfte nicht auf die Elemente

295) Dabei findet man für den Fall der Kettenlinie transzendente Gleichungen, die zuerst *B. Goldschmidt*, Preisschrift Göttingen 1831, untersucht hat; vgl. *F. M. Moigno* und *L. Lindelöf*, Calcul des variations, Paris 1861, sowie *P. Appell*, Mécanique 1, p. 188.

296) *G. Schubring*, Programm Erfurt 1880; *P. Appell*, Mécanique 1, p. 181.

297) *A. M. Legendre*, Paris Mém. de math. et phys., année 1786 (1788) = Ostwalds Klassiker, Heft 47, p. 77.

298) Vgl. IV 5, Nr. **10** (*L. Henneberg*), sowie für die technischen Anwendungen IV 27 (*H. Reissner*) und beispielsweise *Fr. J. Gerstner*, Handbuch der Mechanik, Prag 1831, 1, p. 415.

ds des Fadens wirken, sondern an Ringen angreifen, die über den Faden gezogen sind und auf ihm gleiten können[299]). Bei ungleichmässig dicken Ketten hat man gefragt, wie die Massenverteilung einzurichten ist, damit eine gegebene Fadenkurve bei gegebenen Kräften Gleichgewichtsgestalt wird[300]), oder damit bei gegebenen Kräften in der Gleichgewichtslage die Dicke proportional der Spannung ist[301]), so dass die Kette überall gleiche Zugfestigkeit besitzt (Kettenlinie gleichen Widerstandes). Endlich hat man anstatt der absolut biegsamen, unausdehnbaren Fäden elastische Fäden betrachtet[302]).

In einigen Fällen ist es gelungen, die Frage nach der Stabilität des Gleichgewichtes zu erledigen, z. B. bei der gewöhnlichen Kettenlinie[303]). Diese Frage leitet über zu der Lehre von den kleinen Schwingungen und allgemeiner von den Bewegungen der Fäden, auf die hier nicht eingegangen werden kann; da es jedoch zweifelhaft ist, ob sich an andrer Stelle der Encyklopädie dafür Platz finden wird, sei wenigstens unten einiges aus der umfangreichen Litteratur angeführt[304]). Für die Bewegungen

299) *G. Emery,* Modena Mem. (3) 7 (1889), Nr. 8.

300) *F. Sludskij,* Lehrbuch der theoretischen Mechanik (russisch), Moskau, 1881.

301) *E. E. Bobillier,* Ann. de Gergonne 17 (1829), p. 61; *D. Gilbert,* Phil. Trans. 1826 [3], p. 225; *G. Coriolis,* J. de math. (1) 1 (1836), p. 175; *G. M. Minchin,* Statics, Oxford 1872.

302) *Joh. Bernoulli,* Opera 3, p. 505; *M. Jullien,* Problèmes 2, p. 167. Hierher gehören auch die Untersuchungen über den Einfluss der Steifigkeit der Fäden.

303) *A. Mayer,* Math. Ann. 13 (1878), p. 65; *A. Kneser,* J. f. Math. 125 (1903), p. 189. Eine besondere Behandlung erfordern die rauhen Flächen, bei denen *F. August,* Arch. Math. Phys. 70 (1883), p. 225 den Begriff des *zähen* Gleichgewichtes eingeführt hat. Hierbei wird der Faden einerseits wegen der Reibung durch ein System sehr kleiner Kräfte nicht in Bewegung gesetzt, andererseits hat er aber auch, falls er durch grössere Kräfte in eine Nachbarlage gebracht worden ist, nicht das Bestreben, in die ursprüngliche Lage zurückzukehren. Ehe solch ein zähes Gleichgewicht aufhört, tritt eine Grenzlage ein, bei der der Faden sich gewissen Antrieben gegenüber zäh verhält, während andere beliebig kleine Antriebe eine endliche Bewegung einleiten; vgl. auch *J. H. Jellett,* Reibung, Kap. 3: Äusserste Gleichgewichtslagen.

304) Kleine Schwingungen eines Fadens um eine Gleichgewichtslage behandelten: *J. L. Lagrange,* Misc. Taur. 3 (1763), p. 243 = Oeuvres 1, p. 539; *L. Euler,* Petersburg Comment. 8 ad annum 1736, p. 30, Nov. Comment. 9 ad annos 1762/63, p. 215; *F. Minding,* J. f. Math. 50 (1855), p. 243; *H. Resal,* Mécanique 1 (1873), p. 321; *L. Henneberg,* Ann. di mat. (2) 9 (1878), p. 58; *H. Léauté,* Paris C. R. 90 (1880), p. 290, 354; J. de math. (3) 6 (1880), p. 215; *G. A. Maggi,* Giorn. di mat. 19 (1881), p. 1; Milano Ist. Lomb. Rend. (2) 19 (1886), p. 682; *E. Padova,* Giorn. di mat. 23 (1885), p. 235. Für endliche Be-

der elastischen Fäden oder der schwingenden Saiten kann dagegen auf IV 26 (*H. Lamb*) verwiesen werden.

24. Gleichgewichtsgestalten von Membranen. Von dem Bestreben beseelt, die Kurven zu bestimmen, „que la nature nous met tous les jours devant les yeux" stellte *Jacob Bernoulli* bald nach der Ermittelung der Kettenlinie die Aufgabe, man solle die Gestalt eines Segels finden, das vom Winde aufgebläht wird; er dachte sich das Segel an zwei vertikalen Stangen befestigt und nahm an, dass alle Flächenteile durch den Wind gleich grosse, gleich gerichtete Drucke erfahren. Als erzeugende Kurve der so entstehenden Zylinderfläche ergiebt sich wieder die Kettenlinie[305]). Eine andere Aufgabe betraf die Gestalt eines Tuches, das den Boden eines kastenförmigen, mit Wasser gefüllten Gefässes bildet; die so entstehende Zylinderfläche hat zur erzeugenden Kurve die sogenannte elastische Kurve, die ein in zwei Punkten aufliegender, elastischer, gleichförmig belasteter Stab annimmt[306]).

Einen neuen Anstoss zur Untersuchung der Gestalt von biegsamen Flächen oder Membranen gaben *E. F. Chladnis* Experimente über Klangfiguren[307]), die am Anfange des 19. Jahrhunderts grosses Aufsehen erregten. Auf Veranlassung *Napoléons* stellte das Institut national im Jahre 1808 die Preisaufgabe, man solle eine mathematische Theorie der Schwingungen elastischer Platten entwickeln[308]), und hierdurch wurde *J. L. Lagrange* angeregt, in der zweiten Auflage der Mécanique analytique die Frage zu behandeln, welche Gestalt eine elastische

---

wegungen sind zu nennen: *J. L. Lagrange*, Misc. Taur. (2) (1762) = Oeuvres 1, p. 405 (Herleitung der Differentialgleichungen der Bewegung mittels des Prinzips der kleinsten Wirkung); *S. D. Poisson*, J. éc. polyt. 7 (1807), p. 385; *H. Resal*, Paris C. R. 75 (1872), p. 1010; *P. Appell*, Paris C. R. 103 (1886), p. 991; Acta math. 12 (1888), p. 1; *G. Flocquet*, Paris C. R. 108 (1889), p. 661; 115 (1892), p. 449; 130 (1900), p. 1745; 131 (1900), p. 27, 97, 666. Für den ganzen Gegenstand vgl. auch den Bericht bei *E. J. Routh*, Dynamik 2, Kapitel 13; hier wird zum Beispiel der Fall der stationären Bewegungen eines Fadens betrachtet, bei denen der Faden immer dieselbe Gestalt behält, und eine Anwendung gemacht auf die Frage, welche Gestalt ein elektrisches Kabel annimmt, das von einem gleichförmig fortschreitenden Schiffe verlegt wird.

305) Paris, J. des savans 1692, p. 189; vgl. auch die Lectiones mathematicae von *Joh. Bernoulli* (1692), veröffentlicht Opera 3 (1742), p. 510.

306) Acta erud. Lips. 1694 = Opera, p. 639; Paris Mém. année 1705 = Opera, p. 976; vgl. auch *Joh. Bernoulli*, Opera 3, p. 512—516 und *L. Euler*, Methodus inveniendi, Lausanne 1744, p. 241 und Appendix I.

307) Akustik, Leipzig 1802; Traité d'acoustique, Paris 1809.

308) Den Preis erhielt 1816 *Sophie Germain*. Vgl. im Übrigen *H. Burkhardt*, Bericht, p. 447, sowie die Artikel IV 25 (*O. Tedone* und *A. Timpe*) und IV 26 (*H. Lamb*).

Membran annimmt, um sich gegen gegebene Kräfte ins Gleichgewicht zu setzen. Er spezialisierte die erhaltenen Gleichungen auch dahin, dass das Oberflächenelement bei den Deformationen denselben Flächeninhalt bewahren solle[309]), und bald darauf untersuchte *S. D. Poisson* die Gleichgewichtsgestalt einer biegsamen unausdehnbaren Fläche, bei der also die Länge der Linienelemente erhalten bleibt[310]). Biegungen krummer Flächen mit Erhaltung des Linienelementes behandelte von geometrischen Gesichtspunkten aus *C. F. Gauss;* über die umfangreiche geometrische Litteratur, die sich an seine Disquisitiones generales circa superficies curvas (1827) angeschlossen hat, vgl. III D 6a *Abbildung und Abwicklung zweier Flächen aufeinander (A. Voss).* Aber auch die Statik biegsamer Flächen ist im 19. Jahrhundert gefördert worden; so hat z. B. *F. Kötter* die Gestalt eines Tuches bestimmt, das der Schwere unterworfen und an zwei parallelen oder sich schneidenden Geraden befestigt ist[311]). Es ist nicht möglich, in dem vorliegenden Referate über elementare Dynamik auf diesen Gegenstand genauer einzugehen, der grosse mathematische Schwierigkeiten bietet; einige Litteraturangaben findet man unten[312]). Ebenso können auch die Untersuchungen *S. Finsterwalders* über Netze von Fäden und im besonderen über die *Tschebyschoff-Voss*schen Rhombennetze hier nur erwähnt werden[313]). Für die Verallgemeinerungen auf die Gleichgewichtsgestalten und die Schwingungen elastischer Platten oder Membrane möge auf IV 25 (*O. Tedone* und *A. Timpe*) und IV 26 (*H. Lamb*) verwiesen werden.

309) Ausgabe von *Darboux,* 1, p. 112.

310) Paris, Mém. de l'Institut 1812, Part. 2 (1814), p. 173; Bull. soc. philomat. 1814, p. 47; vgl. *G. Lamé,* Leçons sur l'élasticité, 2. éd., Paris 1866, p. 107.

311) Diss. Halle 1883; J. f. Math. 103 (1888), p. 44; 121 (1901), p. 300.

312) *O. F. Mossotti,* Meccanica, Florenz 1851; *F. Brioschi,* Ann. di mat. (1) 3 (1852), p. 322; *L. Lecornu,* J. éc. polyt. cah. 48 (1880), p. 1; Paris C. R. 122 (1896), p. 218; Ann. éc. norm. (3) 17 (1900), p. 501; *A. Cayley,* Lond. Math. Soc. Proc. 12 (1881), p. 103 = The collected math. papers 11, London 1896, p. 317; *E. Beltrami,* Bologna Mem. (4) 3 (1882), p. 218; *G. Morera,* Rom Acc. Linc. Atti (3) 7 (1883), p. 268; Torino Atti 20 (1884), p. 43 (Ausdehnung auf unausdehnbare dreidimensionale Gebilde); *V. Volterra,* Rom Acc. Linc. Atti (3) 8 (1884), p. 214, 244; *G. A. Maggi,* Lomb. Rend. (2) 17 (1884), p. 683; Rom Acc. Linc. Rend. (4) 1 (1885), p. 269, 306; *G. Picciati,* Giorn. di mat. 30 (1892), p. 1; *J. Rachmaninoff,* Moskau Math. Sammlung (russisch) 19 (1896), p. 110; *G. Pennacchietti,* Palermo Circ. mat. Rend. 9 (1895), p. 87; Catania Acc. Gioenia Atti (4) 8 (1895); *M. Lévy,* Paris C. R. 126 (1898), p. 1844; *D. de Francesco,* Napoli Acc. Rend. (3) 9 (1903), p. 227; Napoli Acc. Atti (2) 12 (1905), Nr. 5, 6.

313) Jahresber. d. D. M.-V. 6^2, 45; nach der statischen Seite hat diese Untersuchungen weitergeführt *W. Schlink,* Diss. München 1902; Jahresber. d. D. M.-V. 12 (1903), p. 309.

II. Dynamik starrer Körper.

25. Allgemeine Bemerkungen und Geschichtliches über die Dynamik starrer Körper.

25a. Allgemeine Bemerkungen. In der Erfahrung sind uns zahlreiche Körper gegeben, die mannigfaltige Bewegungen ausführen, ohne dass sich dabei ihre Gestalt, das heisst die relative Lage ihrer einzelnen Teile gegen einander, in merkbarer Weise änderte. Man nennt solche Körper *fest*. Aus der Vorstellung von festen Körpern hat sich der Begriff von *starren*, das heisst ihrer Gestalt nach völlig unveränderlichen Körpern entwickelt[314]).

Da jeder wirkliche Körper durch die an ihm angreifenden Kräfte Formänderungen erfährt, so ist *der starre Körper*, um einen Ausdruck *A. Föppls* zu gebrauchen[315]), *ein zur Abkürzung und Vereinfachung eingeführtes Bild der Mechanik*[316]). Auch eine Äusserung *L. Poinsots* verdient hier angeführt zu werden: Ma canne n'est pas un corps solide; non-seulement elle peut rompre, mais elle plie ce qui est cent fois pis. Deux molécules d'un corps solide sont placées par la rigidité à distance invariable l'une de l'autre; nulle force n'est capable de les écarter ou des les rapprocher, nulle influence ne peut les faire vibrer. Les corps élastiques ou ductiles ne sont pas des solides; leur définition grossière ne peut s'exprimer par des équations; elle est incompatible avec la pureté géométrique. Le vrai géomètre doit s'établir solidement sur un terrain inébranlable et ne pas heurter ses instruments délicats à une réalité confuse et mal définie, qui se dérobe et se dissipe quand on veut la serrer de près[317]).

Das Bild des starren Körpers ist zunächst *geometrischer* Natur und hat daher zu der Ausbildung umfangreicher geometrischer Theorien Anlass gegeben. Hierher gehört die sogenannte *Geometrie der Bewegung*, aber auch umfangreiche Gebiete der Statik und der Kinematik

---

314) Vgl. etwa *L. Boltzmann*, Mechanik 1, p. 115. Die Begriffe: starrer, fester, elastischer Körper haben wohl erst im 17. Jahrhundert eine bestimmtere Bedeutung bekommen; eine historisch-kritische Darstellung dieser Entwicklung steht noch aus.

315) Einführung, p. 110.

316) Man könnte sogar den starren Körper als das Bild bezeichnen, das sich bei der Betrachtung der Ortsveränderungen der Körper zuerst einstellt. Einen Versuch, von diesem Bilde ausgehend die ganze Mechanik zu entwickeln, hat *L. Boltzmann* gemacht, Populäre Schriften, Leipzig 1905, p. 273; vergleiche jedoch schon *F. Reech*, Mécanique, Paris 1852.

317) Bull. scienc. math. (1) 4 (1873), p. 28.

tragen einen rein geometrischen Charakter; vgl. IV 2 (*H. E. Timerding*) und IV 3 (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*); für den Zusammenhang der Lehre vom starren Körper mit den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie vgl. III A 1 (*F. Enriques*). Aber auch die Lehre von der Zusammensetzung der auf einen starren Körper wirkenden statischen Kräfte hat insofern einen geometrischen Charakter, als der Begriff der Masse dabei unmittelbar gar nicht in Frage kommt[318]); denn diese Lehre beruht auf dem Prinzip, dass eine Kraft, die auf einen Punkt eines starren Körpers wirkt, ohne Änderung ihrer Wirkung in ihrer Richtungslinie beliebig verlegt werden darf[319]). Bei der Zusammensetzung der am starren Körper wirkenden Kräfte tritt also das *Prinzip der Verlegbarkeit des Angriffspunktes* geradezu an die Stelle der Definition des starren Körpers.

In der *Kinetik des starren Körpers* tritt der Begriff der *Masse* hinzu, jedoch ist die Massenverteilung insofern gleichgiltig, als es hier nur auf die Werte von sieben bestimmten Summen ankommt, nämlich auf die Gesamtmasse und die Trägheits- und Deviations-

---

318) Dementsprechend unterscheidet *A. Voss* (IV 1, Nr. 18) eine *statische* und eine *dynamische* Vorstellung des starren Körpers. Die statische Vorstellung beruht lediglich auf dem Axiom von der Verlegbarkeit des Angriffspunktes der Kraft in ihrer Richtungslinie; für die dynamische Vorstellung vergleiche die weiteren Ausführungen in dieser Nummer.

319) *P. Varignon* scheint dieses Axiom zuerst klar formuliert zu haben; in der Bezeichnung von *E. Budde* (Mechanik 2, p. 556) sind also die an einem starren Körper wirkenden Kräfte *linienflüchtige Vektoren*. Der dabei gebrauchte Ausdruck *Wirkung einer Kraft* bedarf allerdings einer Erläuterung, da unter Wirkung in der Dynamik sehr verschiedene Dinge verstanden werden (Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, Prinzip der kleinsten Wirkung). Hier bedeutet Wirkung die Arbeit, die von der Kraft bei einer elementaren Verrückung des betrachteten Systems geleistet wird; vgl. *M. Grübler,* Taschenbuch der Hütte, 16. Aufl., Berlin 1896, p. 155.

320) Die für die ganze Dynamik grundlegende Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte, die auf einen starren Körper wirken (vgl. IV 2, *H. E. Timerding,* Abschnitt III), wird nicht selten schlechthin als Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte bezeichnet, während doch die Linienflüchtigkeit nicht eine Eigenschaft der Kräfte, sondern eine Eigenschaft des starren Körpers darstellt. Hieraus sind manche Unklarheiten entstanden, besonders in den Lehrbüchern der graphischen Statik; so heisst es, um ein Beispiel anzuführen, bei *J. Schlotke,* Graphische Statik, 2. Aufl., Dresden 1902, p. 1: „Der Angriffspunkt einer Kraft kann in der Richtungslinie beliebig verlegt werden". Aber auch *E. Dühring* (Principe, 1. Aufl., p. 370) verwechselt gelegentlich die Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper mit denen für ein beliebiges System, und dieselbe Verwechslung findet sich in modernen Lehrbüchern der Mechanik (vgl. etwa *H. Lorenz,* Mechanik, p. 583).

momente in bezug auf irgend einen Punkt der Körpers; die zahlreichen Untersuchungen über diese und über ähnlich gebildete Summen, die man jetzt unter dem Namen einer *Geometrie der Massen* zusammenzufassen pflegt, haben in dem Artikel IV 4 (*G. Jung*) eine ausführliche Darstellung gefunden. Es ist charakteristisch für die Kinetik des starren Körpers, dass sie durchaus unabhängig von jeglicher Annahme über die *physikalische Konstitution* des starren Körpers aufgebaut wird; wenn man bei der *Methode des Grenzüberganges* (vgl. Nr. 22 dieses Artikels) von einem System mit einer endlichen Anzahl materieller Punkte ausgeht, die starr mit einander verbunden sind, so ist es für das Endergebnis der Rechnung gleichgültig, wie man sich diese starren Verbindungen realisiert denkt, bei den Rechnungen hat man es nämlich lediglich mit den *Gleichungen* zu tun, die ausdrücken, dass der Körper sich genau wie ein Raumteil bewegt, dessen Punkte mit Masse belegt sind. Die Frage nach der Konstitution eines festen Körpers gehört demnach nicht mehr in die abstrakte, sondern in die physikalische Mechanik[321]); sie leitet über zu der Untersuchung der Grenzen, innerhalb deren das Bild des starren Körpers zur Beschreibung der Erscheinungen ausreicht, und man gelangt so aus der *Stereodynamik*[322]) in die *Festigkeitslehre.*

Eine solche Grenze tritt bereits in der Statik des starren Körpers auf, weil man selbst in einfachen Fällen die Reaktionen, die ein starrer Körper von seiner Unterlage erfährt, allein unter Benutzung der Gleichungen, die die *Stereostatik*[322]) liefert, nicht berechnen kann. Diese Schwierigkeit löst sich, wenn man die Unterlage bez. den aufliegenden Körper als *elastisch* ansieht; durch die Auflagerdrucke entstehen nämlich Deformationen, die etwa nach dem Hookeschen Gesetze ermittelt werden können; Näheres in Nr. 27 dieses Artikels. Ebenso wie von kleinen Formänderungen sieht man in der Stereodynamik ab von den Einflüssen der Wärme, der Elektrizität, des

321) Vgl. IV 23 (*C. H. Müller* und *A. Timpe*). Man kann zum Beispiel annehmen, dass der Körper ein System von sehr vielen, dichtgedrängten Molekülen sei, die man als materielle Punkte ansehen darf, und dass bei einer Normallage dieser Punkte die Resultierende aller inneren Kräfte für jeden der Punkte verschwinde, dass aber, sobald die Entfernung zweier Punkte nur ein wenig geändert wird, sofort ausserordentlich grosse innere Kräfte auftreten, die sie wieder in die Normalentfernung zurücktreiben. Man kann aber auch eine stetige Erfüllung des Raumes mit starrer Materie annehmen; vgl. hierfür etwa die Mechanik von *G. Kirchhoff* sowie IV 1, Nr. 11 (*A. Voss*).

322) Diese sehr zweckmässigen Ausdrücke für Statik und Dynamik eines starren Körpers hat *A. G. A. Maggi* eingeführt (Principii di stereodinamica, Mailand 1903).

Magnetismus, Einflüssen, die sich unter Umständen sehr wohl bemerklich machen können.

25b. Zur Entstehungsgeschichte der Dynamik starrer Körper. Die *Statik des starren Körpers* ist schon im Altertum in gewissem Masse entwickelt worden (*Archimedes*, *Hero:* Hebelgesetz, einfache Maschinen). Anders steht es mit der *Kinetik des starren Körpers*, die erst im 17. Jahrhundert in Angriff genommen worden ist. Nicht lange, nachdem *G. Galilei* die Kinetik des materiellen Punktes begründet hatte, stellte *M. Mersenne* im Jahre 1646 die Aufgabe, man solle den *Schwingungsmittelpunkt* eines physikalischen Pendels bestimmen, das heisst den Punkt eines um eine feste horizontale Axe drehbaren schweren Körpers, der auf dem vom Schwerpunkte auf die Drehaxe gefällten Lote liegt und dessen Entfernung von der Axe die Länge des isochronen mathematischen Pendels angiebt. Nachdem *R. Descartes* einen vergeblichen Versuch gemacht hatte, wurde die Aufgabe 1673 von *Chr. Huygens* gelöst, der sich, nicht ohne Widerspruch zu erfahren, des Prinzips von der Erhaltung der lebendigen Kraft bediente[323]). *Huygens* wurde dabei auf die Ausdrücke geführt, die man jetzt, nach dem Vorgange von *L. Euler*, als *Trägheitsmomente* bezeichnet[324]), und hat auch die wichtige Beziehung zwischen Trägheitsmomenten in Bezug auf parallele Axen abgeleitet; ebenso hat er schon die Vertauschbarkeit von Schwingungsmittelpunkt und Aufhängungspunkt erkannt.

Das Problem des Schwingungsmittelpunktes hat die Geometer noch bis weit ins 18. Jahrhundert hinein beschäftigt, und indem es von den verschiedensten Seiten her betrachtet wurde, hat es befruchtend auf die ganze Dynamik gewirkt[325]); im besonderen hat man dabei gelernt, das *Prinzip von der Gleichheit der Aktion und Reaktion*, das *I. Newton* (1687) bei freien Punktsystemen betrachtet hatte, auf gebundene Systeme anzuwenden, und es ist so die Aufstellung des *d'Alembertschen Prinzips* (1743) vorbereitet worden, auf dem die weiteren Fortschritte in der Kinetik des starren Körpers beruhen[326]). In die

---

323) Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato, Paris 1673; ein Patent auf Pendeluhren hatte *Huygens* schon am 16. Juni 1657 genommen.

324) Scientia navalis, Petersburg 1749, 1, p. 70: Momentum inertiae corporis respectu axis cuiusdam fixi voco aggregatum omnium corporis particularum per suarum respective ab hoc axe distantiarum quadrata multiplicatarum; vgl. auch *Eulers* Vorrede, p. 25.

325) Für diese Untersuchungen, an denen sich zum Beispiel *Jacob* und *Johann Bernoulli* und *Brook Taylor* beteiligten, vgl. etwa *E. Mach*, Mechanik Kapitel 3.

326) Neben *J. d'Alembert* selbst ist hier *A. Fontaine* zu erwähnen, der in

Zwischenzeit fällt die Ausbildung der *Statik des starren Körpers*, die besonders durch *P. Varignon* gefördert worden ist[327]). *Varignon* hat die Lehre von den *einfachen Maschinen* in grösster Allgemeinheit aufgefasst und ist dazu gelangt, die Mittel zu entwickeln, die man zur Zusammensetzung beliebiger, auf einen starren Körper wirkender Kräfte nötig hat, also im besonderen die Zusammensetzung der Momente; er hat diese Untersuchungen in geometrischer Form und unter ausschliesslicher Benutzung des statischen Kraftbegriffes durchgeführt. Wenn hiernach *Varignon* auch alle Mittel besass, die zur Aufstellung der sechs Bedingungen für das Gleichgewicht eines starren Körpers erforderlich sind, so hat er doch diese Bedingungen niemals analytisch formuliert. Diesen wichtigen Schritt hat erst *J. d'Alembert* (1749) gethan[328]). Freilich hat es auch dann noch erheblicher Anstrengungen bedurft, bis die Statik des starren Körpers ausgestaltet wurde; so bewies erst *L. Euler* (1765), dass man das System der auf einen starren Körper wirkenden Einzelkräfte stets durch ein System von zwei Kräften ersetzen könne[329]), und *G. Monge* (1786) fügte die Einsicht hinzu, dass diese Reduktion sich stets so ausführen lässt, dass die beiden Kräfte senkrecht auf einander stehen[330]). Welche Schwierigkeiten hier zu überwinden waren, zeigt sehr deutlich der Umstand, dass *d'Alembert* es 1749 noch für angebracht hielt, ausführlich auseinander zu setzen, wie es möglich sei, dass auf einen starren Körper wirkende Kräfte, deren Resultante verschwindet, trotzdem eine Bewegung, nämlich eine Drehung des Körpers, hervorrufen[331]).

Den Anstoss zu ihrer weiteren Entwicklung hat die *Stereokinetik* von drei Seiten erfahren: von Seiten der *Astronomie*, der Lehre von der *Schiffsbewegung* und der *Kreiseltheorie*.

---

einem 1739 „allen Mathematikern mitgeteilten", aber erst 1764 veröffentlichten Abriss einer Mechanik (Mémoires des mathématiques, Paris 1764, p. 305) die Kinetik eines Systems starr miteinander verbundener Punkte (points massifs dans un espace roide) mittels derselben Überlegungen aufzubauen versucht hat, die dem d'Alembertschen Prinzipe zu Grunde liegen.

327) Projet d'une nouvelle mécanique, Paris 1687; Nouvelle mécanique ou statique, Paris 1725 (posthum).

328) Recherches sur la précession des équinoxes, Paris 1749.

329) Theoria motus, Rostock und Greifswald 1765, § 620.

330) Traité élémentaire de statique, Paris 1786.

331) Recherches, p. 120. Zu diesen Schwierigkeiten in der *Dynamik* kam, daß auch die *Kinematik* des starren Körpers damals noch ganz unausgebildet war; hat doch erst *L. Euler* den Begriff der instantanen Drehaxe bei der Drehung um einen festen Punkt zu voller Klarheit herausgearbeitet, und erst *A. L. Cauchy* (1827) bewiesen, dass jede unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers eine Schraubenbewegung ist; vgl. IV 2, Nr. 11 (*H. E. Timerding*).

Bei der Astronomie war es das Problem der *Präzession der Tag- und Nachtgleichen*, das schon *I. Newton* (1687) behandelt hatte, ohne jedoch zu einer befriedigenden Lösung zu gelangen[332]), und das besonders dringend wurde, nachdem *J. Bradley* (1748) durch seine genauen Fixsternbeobachtungen das Vorhandensein der *Nutation* entdeckt hatte[333]). Schon ein Jahr darauf gab *J. d'Alembert* in seinen *Recherches* die mechanische Erklärung dieser Erscheinungen und zwar im wesentlichen in der Form, die noch heute als gültig angesehen wird. Er leistete dies, indem er die sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht eines starren Körpers aufstellte und zeigte, wie man daraus auf Grund des Prinzipes, das er 1743 in seiner Dynamik dargelegt hatte, die Differentialgleichungen für die Bewegung des Körpers unter dem Einflusse gegebener Kräfte herleiten könne; freilich erscheinen diese der Sache nach einfachen Gleichungen bei *d'Alembert* in einer recht unübersichtlichen und schwerfälligen Form[334]). — Das Problem der Bewegung der Erde, als eines starren Körpers, um ihren Schwerpunkt hat auch im 19. Jahrhundert förderlich auf die Stereodynamik eingewirkt; es genüge, an die Bestrebungen *L. Poinsots* zu erinnern, dessen anschauliche Auffassungen der Bewegungen eines starren Körpers in dem Wunsche wurzelten, eine gute Beschreibung der Präzessionserscheinungen zu gewinnen.

Nicht minder wichtig sind die Anregungen, die die Lehre von den *Schiffsbewegungen* geliefert hat. Hierbei ist man wohl zuerst auf die Trennung der Bewegung eines starren Körpers in eine *Translationsbewegung* und eine *Drehung um den Schwerpunkt* geführt worden. *P. Bouguer*[335]) und *L. Euler*[336]) sind unabhängig von einander zu dieser grundlegenden Einsicht gelangt; sie haben ohne Weiteres angenommen, dass man diese beiden Bewegungen getrennt von einander behandeln dürfe, was allerdings bei einem allein der Schwere unterworfenen Körper

332) Principia, liber 3, sectio 4; eine eingehende Kritik findet man in den Recherches von *d'Alembert* und bei *P. S. Laplace*, Mécanique céleste 5, p. 275.

333) Phil. Trans. 45 (1748), p. 1: On the apparent motion observed in some of the fixed stars.

334) *A. Cayley* (Collect. math. papers 4, p. 567) sagt von ihnen: the equations of motion are obtained in a cumbrous und unmanageable form.

335) Traité du navire, de sa construction et de ses mouvements, Paris 1746 (verfasst 1735 auf der Reise zur Gradmessung in Peru).

336) Scientia navalis, 2 Bände, Petersburg 1749 (fertiggestellt bereits Ende 1738, siehe *Eulers* Brief an *Johann Bernoulli* vom 20. Dezember 1738, Bibl. math. (3) 5 (1904), p. 287; Mitteilungen über *Eulers* Ergebnisse finden sich schon in den Opera *Johann Bernoullis* 4 (1742), p. 288).

gestattet ist, aber nicht mehr richtig ist, wenn Reibungskräfte oder Druckkräfte einer umgebendenden Flüssigkeit ins Spiel kommen. *Euler* erkannte zunächst, dass ein freier Körper sich beständig um eine *freie Axe* durch den Schwerpunkt drehen kann, wenn sich nämlich die Zentrifugalkräfte, die die Stellung der Axe zu ändern streben, gegenseitig aufheben, und legte den weiteren Betrachtungen die folgende *Hypothese* zu Grunde: *Bei einem jeden auf dem Wasser schwimmenden Körper giebt es drei auf einander senkrechte, durch den Schwerpunkt gehende Axen, um die eine freie, beständige Drehung möglich ist; eine beliebige* (*kleine*) *Schwingung um den Schwerpunkt lässt sich in drei Schwingungen um je eine dieser drei Axen zerlegen, und jede dieser drei Schwingungen verläuft unabhängig von den beiden anderen*[337]). *Euler* meinte, diese Hypothese gelte bei den Schiffen, mit denen er sich beschäftigte, immer genau oder doch mit grosser Annäherung. Damit aber war die Drehbewegung eines Schiffes auf das Problem des Schwingungsmittelpunktes für eine einzelne Drehachse, also die Ermittelung isochroner Pendel zurückgeführt worden.

Die Abhandlungen *Eulers* aus den Jahren 1749 und 1750[338]) sind beeinflusst von den inzwischen erschienenen *Recherches* von *d'Alembert*. Im besonderen gelingt es ihm, zu einer durchsichtigeren Form der Differentialgleichungen der Bewegung zu gelangen. Diese Gleichungen sagen aus, dass die Komponenten der Resultante und des resultierenden Momentes der eingeprägten Kräfte bezogen auf im Raume feste Koordinatenaxen gleich sind den entsprechenden Komponenten der Effektivkräfte[338a]). Auffallend ist, dass *Euler* es nicht versucht hat, aus diesen Gleichungen seine Hypothese von der Existenz der drei freien, unabhängigen Drehaxen abzuleiten. Diesen Schritt hat erst *J. A. Segner* (1755), und zwar veranlasst durch die Beschäftigung mit der Kreiseltheorie[339]).

Die Erscheinungen, die das Kinderspielzeug des *Kreisels* darbietet, dass er sich, in Drehung versetzt, der Schwere entgegen aufrichtet, und dass er in dieser Stellung verharrt, so lange die Drehung anhält, dann aber umfällt, diese paradoxen Erscheinungen sind geeignet, die

337) Scientia navalis 1, p. 76.

338) Berlin Mém. Année 1749 (1751), p. 289; Année 1750 (1752), p. 185, 412.

338a) Für diese Formulierung vgl. etwa *J. Petersen*, Dynamik, p. 58.

339) Specimen theoriae turbinum, Halle 1755. Unter *turbo* versteht *Segner* allgemein einen um einen festen Punkt drehbaren starren Körper; der Ausdruck *turbinari* für die kreiselnde Bewegung eines starren Körpers tritt schon bei *Johann Bernoulli* auf, Acta Erudit., Lips. 1715, p. 242 = Opera 2, p. 187: De centro turbinationis inventa nova (*J. Bernoulli* beweist hier die von *Huygens* am Schlusse des Horologiums ohne Beweis aufgestellten Sätze über das konische Pendel).

Aufmerksamkeit eines jeden zu erregen, der ein offenes Auge für die mechanischen Vorgänge in seiner Umgebung hat. Eine wissenschaftliche Behandlung scheint der Kreisel zuerst durch *J. A. Segner* erfahren zu haben, der schon die Bedeutung der Reibung für das Aufrichten der Kreiselachse richtig erkannte. Veranlassung zu seinen Untersuchungen hatte die Bemerkung eines Engländers *Serson* gegeben, dass man die spiegelnde Oberfläche eines rasch gedrehten Kreisels auf Schiffen als künstlichen Horizont benutzen könne[340]). *Segner* hat auch den um seinen Schwerpunkt drehbaren starren Körper betrachtet und als Bedingung für das Verschwinden des Momentes der Zentrifugalkräfte, die die Stellung einer freien Axe zu verändern streben, oder, wie man jetzt nach *W. J. M. Rankine* sagt, des betreffenden *Deviationsmomentes*[341]), eine Gleichung dritten Grades gefunden; er hat mit Hilfe dieser Gleichung bewiesen, dass die so gefundenen drei Axen senkrecht auf einander stehen[342]). In zwei Abhandlungen aus dem Jahre 1758 hat *L. Euler* diese Ergebnisse *Segners* von neuem abgeleitet und *Segners Hauptaxen* in die allgemeine Kinetik des starren Körpers eingeführt[343]). Die Benutzung dieser *im Körper festen Axen* führte *Euler* auf die fundamentalen Differentialgleichungen für die Drehungskomponenten nach den Hauptaxen, die jetzt seinen Namen tragen[344]). Auf diese Weise gelang es ihm nunmehr, die Differentialgleichungen für die Be-

---

340) Phil. Trans. 47 (1752), p. 352; *Segner* erhielt davon Kenntnis durch eine Notiz in der Zeitschrift The Gentleman's Magazine, October 1754. Der Gedanke ist im 19. Jahrhundert von *G. Fleuriais* verwirklicht worden, Revue maritime et coloniale 91 (1886), p. 412; 94 (1887), p. 225 (auch als besondere Schrift Gyroscope collimateur, Paris 1887), Horizon gyroscopique, modèle définitif, Paris 1891; vgl. ferner VI 2 3, Nr. 39 (*C. W. Wirtz*).

341) A manual of applied mechanics, London 1858; von anderen Autoren werden die Deviationsmomente nach dem Vorgange von *G. Coriolis* auch *Zentrifugalmomente* genannt.

342) Dass diese Gleichung dritten Grades, die im wesentlichen mit der Gleichung dritten Grades identisch ist, welche bei der Bestimmung der Hauptaxen der Flächen zweiter Ordnung auftritt, stets drei reelle Wurzeln hat, hat in voller Strenge erst *J. L. Lagrange* gezeigt, Berlin Mém. Année 1773 = Oeuvres 3, p. 605; vgl. *R. Baltzer*, Theorie und Anwendung der Determinanten, 5. Aufl., Leipzig 1881, p. 212.

343) Berlin Mém. Année 1758 (1765), p. 132: Recherches sur la connaissance mécanique des corps; mit dieser Abhandlung beginnt die sogenannte *Geometrie der Massen*, vgl. IV 4 (*G. Jung*); ebenda, p. 154: Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable; diese Abhandlung ist auf Veranlassung von *A. Cayley* wiederabgedruckt worden in dem Quarterly Journ. 9 (1868), p. 361.

344) Berlin Mém. Année 1758 (1765), p. 170.

wegung eines kräftefreien Kreisels mittels elliptischer Integrale zu lösen, was er nach seinem Geständnis vorher für unmöglich gehalten hatte.

Damit war der Grund für die Stereodynamik als einer selbständigen Wissenschaft gelegt worden, und *Euler* beeilte sich, sie in der *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* ausführlich darzustellen; dieses Werk hatte er schon 1760 vollendet, es ist aber erst 1765 zum Druck gelangt[345]). In einer Reihe von Abhandlungen ist *Euler* auf den Gegenstand zurückgekommen und hat Ergänzungen zu dem Hauptwerke gegeben[346]).

Da in den folgenden Nummern dieses Artikels ein eingehender Bericht über die Fortschritte gegeben werden soll, die die Dynamik starrer Körper durch und seit *J. L. Lagrange* gemacht hat, so möge es genügen, hierüber nur einige orientierende Bemerkungen vorauszuschicken.

Was die Anregungen von aussen betrifft, so ist vor allem *L. Foucaults Gyroskop* (1851) anzuführen. Ferner haben am Schlusse des 19. Jahrhunderts *Probleme der angewandten Mechanik* dazu geführt, dass die *Dynamik der Systeme starrer Körper* erheblich gefördert wurde, und es ist zu erwarten, dass bei der weiteren Entwicklung diese Systeme immer mehr in den Vordergrund treten und die jetzt erst vorhandenen zerstreuten Ansätze zu einer umfassenden Theorie vereinigt werden.

Was die theoretische Dynamik selbst betrifft, so hat *Lagrange* nicht nur einen neuen Spezialfall gefunden, in dem sich die Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers durch Quadraturen integrieren lassen, nämlich die Drehung eines der Schwere unterworfenen, homogenen Rotationskörpers um einen beliebigen Punkt seiner Axe, sondern auch die prinzipielle Seite tiefer erfasst und im besonderen bei der Herleitung der Eulerschen Gleichungen nichtholonome Differentialausdrücke mit voller Erkenntnis des Sachverhalts benutzt. Neben *Lagrange* ist *S. D. Poisson* zu nennen, der die Dynamik des starren Körpers mit zahlreichen Einzeluntersuchungen bereichert hat; um einiges anzuführen, hat er unabhängig von *Lagrange* denselben Sonderfall des Rotationsproblems erledigt[346a]), die Theorie des Kreisels, der auf der Ebene spielt, nachdem sich *Euler* daran versucht hatte

345) Siehe die Vorrede zur Theoria motus von *W. J. G. Karsten*, der den Druck besorgt hatte.

346) Hier sei nur genannt Berlin Mém. Année 1760 (1767), p. 176; Petersburg Nov. Comment. 20 ad annum 1775, p. 189, 208; weitere Angaben bei *J. G. Hagen*, Index operum L. Euleri, Berlin 1896, p. 35—45.

346a) J. de l'éc. polyt. cah. 16 (1813), p. 247.

(Theoria motus p. 377, 538 der Ausgabe von 1790), mit Erfolg in Angriff genommen und zuerst eine allgemeine Theorie der Stösse starrer Körper aufgestellt.

Gegenüber dem vorwiegend analytischen Verfahren von *Lagrange* und *Poisson* kommt bei *L. Poinsot* (1834) die geometrische Anschauung zu ihrem Rechte; er hat, um nur das Wichtigste zu nennen, die Begriffe des Kräftepaares, des Impulses, des Trägheitsellipsoides und der auf einander rollenden Kegel zur Geltung gebracht; eine weitere Ausbildung dieser Gedanken ist *R. Balls* Schraubentheorie Auch in dem Werke von *F. Klein* und *A. Sommerfeld* über die Theorie des Kreisels[346b]) wird auf die anschauliche Erfassung des Bewegungsverlaufes in Raum und Zeit grosser Wert gelegt und eine Übersicht über die Anwendungen des Kreisels gegeben; aber dieses Werk geht insofern weiter als das Poinsotsche Vorbild, als auch die numerische Berechnung der Lage mit den Methoden der Präzisions- und der Approximationsmathematik durchgeführt wird. Eine andere Ergänzung zu *Lagrange* bilden die Untersuchungen, die *V. Poncelet*[347]) und *S. D. Poisson*[348]) über die bei Systemen starrer Körper auftretenden Spannungen und Auflagerdrucke angestellt haben. Später traten solche Betrachtungen in den Hintergrund; sie sind aber neuerdings, veranlasst durch die Bedürfnisse der Technik, besonders von *K. Heun*[349]) wieder aufgenommen worden. Für die Dynamik der Systeme starrer Körper kommen endlich auch die Begriffsbildungen in Betracht, die *H. Hertz* in seinen Prinzipien der Mechanik, Leipzig 1894 gegeben hat.

Einen gewissen Gegensatz zu den im Vorhergehenden charakterisierten Bestrebungen bilden die rein analytischen Untersuchungen zur Dynamik starrer Körper, die mit *A. St. Rueb* (1834) und *C. G. J. Jacobi* (1849) beginnen und für die aus dem Ende des 19. Jahr-

346b) Unter einem *Kreisel* wird in diesem Werke ein der Schwere unterworfener starrer Körper verstanden, dessen Masse symmetrisch um eine Axe des Körpers verteilt ist, und bei dem mittels einer geeigneten Vorrichtung ein auf der Symmetrieaxe gelegener Punkt im Raume festgehalten wird. Der wohlbekannte, als Spielzeug benutzte Kreisel ist in diesem Sinne des Wortes kein Kreisel; seine Bewegung ist jedoch auch von *Klein* und *Sommerfeld* ausführlich betrachtet worden. In neuester Zeit hat man begonnen, unter Kreisel einen beliebigen starren Körper zu verstehen, auf den irgend welche Kräfte wirken, wenn nur mittels geeigneter Vorrichtungen ein beliebiger Punkt des Körpers im Raume festgehalten wird, und hat zum Unterschiede den *Klein-Sommerfeld*schen Kreisel als *schweren symmetrischen Kreisel* bezeichnet.

347) Cours de mécanique appliquée, Metz 1826.

348) J. de l'éc. polyt. cah. 21 (1832), p. 187.

349) Jahresber. d. D. M.-V. 9 (1901), Heft 2; Arch. Math. Phys. (3) 2 (1901/1902), p. 57, 298.

hunderts besonders *Sonja Kowalewski* (1888) und ihre Nachfolger zu nennen sind. Sie erfordern jedoch so erhebliche funktionentheoretische Hilfsmittel, dass sie die Grenzen einer elementaren Dynamik überschreiten; vgl. für sie IV 13 (*P. Stäckel*).

26. Bedeutung der Mechanik starrer Körper für die gesamte Mechanik und Physik. Wenn der Punktmechanik eine weitgehende Bedeutung für die gesamte Mechanik und Physik zukommt (vgl. Nr. 2 dieses Artikels), so gilt dasselbe für die Mechanik starrer Körper.

Diese Bedeutung zeigt sich zunächst in der *Mechanik der deformierbaren Kontinua*, in der man sich vielfach auf die Mechanik der starren Körper stützt. Hat nämlich ein deformierbarer Körper unter dem Einflusse der von Aussen her auf ihn wirkenden Kräfte solche Formänderungen vollzogen, dass Gleichgewicht eingetreten ist, so denkt man sich zur Bestimmung des Gleichgewichtszustandes aus dem Körper einen beliebig begrenzten Teil abgesondert und sieht diesen vorübergehend als starr an. Wenn der herausgegriffene Teil starr gemacht wird, so erfährt in der Tat das Gleichgewicht keine Störung, und die Bedingungen für das Gleichgewicht des erstarrten Teiles sind daher notwendige Bedingungen für das Gleichgewicht des betrachteten Kontinuums[350]. Die Hauptaufgabe bei der Anwendung dieses *Prinzipes der Solidifikation* besteht in der Bestimmung der Kräfte, die auf den herausgegriffenen, als starr gedachten Teil des Kontinuums wirken. Vielfach macht man die Annahme, dass für diesen Teil zu den von Aussen her wirkenden Kräften nur noch Kräfte hinzutreten, die ihren Sitz in der Oberfläche des abgegrenzten Teiles haben, und die man als *Spannungen* bezeichnet, oder dass dies doch gilt, wenn man den herausgegriffenen Teil unendlich klein werden lässt[351]).

Betrachtet man zum Beispiel das unendlich kleine Parallelepiped, das sich ergiebt, wenn man von dem Punkte x, y, z in der Richtung der Koordinatenaxen beziehungsweise um dx, dy, dz fortgeht, so erhält man die sechs *Grundgleichungen*, die in der *Statik der deformierbaren Körper* zwischen den neun Komponenten der Spannungen in den von dem Punkte x, y, z ausgehenden Seitenflächen des Parallel-

350) Dass man notwendige Gleichgewichtsbedingungen eines beliebigen Systems erhält, wenn man es starr macht, wird schon von *J. L. Lagrange* in der Mécanique analytique benutzt. Das Herausgreifen eines *Teiles* des betrachteten Körpers aber scheint zuerst *A. L. Cauchy* angewandt zu haben, Bull. soc. philomath. 1823, p. 9; Exerc. de math. 2 (1827), p. 108; vgl. auch *W. Thomson* und *P. G. Tait*, Handbuch 2, p. 96.

351) Vgl. IV 23 (*C. H. Müller* und *A. Timpe*), sowie etwa *A. Föppl*, Festigkeitslehre, 3. Aufl. Leipzig 1905, erster Abschnitt.

epipeds bestehen. Sind σ_x, σ_y, σ_z die Normalspannungen, wobei die Indizes die Richtungen angeben, in denen sie stattfinden, τ_{xy}, τ_{xz}; τ_{yz}, τ_{yx}; τ_{zx}, τ_{zy} die Tangential- oder Schubspannungen, wobei die ersten Indizes die Normale des betreffenden Flächenelementes, die zweiten die Richtungen angeben, in denen sie stattfinden, und bezeichnet man noch mit X, Y, Z die Komponenten der im Punkte x, y, z von Aussen her wirkenden Kraft, so lauten die Grundgleichungen:

$$(1) \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz},$$

Bedingungen für das Gleichgewicht gegen Drehung;

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0, \end{cases}$$

Bedingungen für das Gleichgewicht gegen Verschiebung[351a]).

Aus diesen Gleichungen gewinnt man sofort die Grundgleichungen der *Kinetik der deformierbaren Körper*, indem man postuliert, dass auf jeden einzelnen Massenpunkt das *d'Alembert*sche Prinzip anwendbar sein soll:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = \mu \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = \mu \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = \mu \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \end{cases}$$

in denen μ die spezifische Masse im Punkte x, y, z bedeutet[352]).

Die sechs Gleichungen (1) und (2) sind für sich allein nicht ausreichend zur Bestimmung der neun unbekannten Spannungskomponenten, und man hat daher in jedem einzelnen Falle zu fragen, wie sich aus der besonderen Beschaffenheit des betrachteten Kontinuums weitere Gleichungen für die Spannungskomponenten gewinnen lassen, und dasselbe gilt in der Kinetik für die Gleichungen (1) und (3);

351a) Man vergleiche auch die ausführlichere Darstellung bei *W. Voigt*, Kompendium der theoretischen Physik 1, Leipzig 1895, p. 219—225.

352) Wesentlich verschieden von der im Texte dargelegten Betrachtungsweise sind die Untersuchungen, bei denen man aus dem Ausdrucke der kinetischen Energie eines deformierbaren Systems die zugehörigen Lagrangeschen Differentialgleichungen ableitet; vgl. Nr. 2 dieses Artikels.

auch treten noch *kinematische* Bedingungsgleichungen hinzu, die den *Zusammenhang* des Kontinuums zum Ausdruck bringen.

In der *Elastizitätslehre* besteht die besondere Voraussetzung über die Beschaffenheit der betrachteten Körper darin, dass zwischen den Spannungen und den mit ihnen verknüpften Deformationen lineare Beziehungen angenommen werden, also im einfachsten Falle das Hookesche Gesetz; vgl. IV 23 (*C. H. Müller* und *A. Timpe*). Dasselbe gilt für die klassische Optik, die ja durchweg auf Betrachtungen aus der Elastizitätstheorie beruht, und auch die Gleichungen für die Polarisationen des Äthers, die in der *Faraday-Maxwell*schen Theorie des Elektromagnetismus auftreten, lassen sich in das Schema der Gleichungen (3) einordnen; für die Einzelheiten muss auf Band V (Mathematische Physik) verwiesen werden.

Aber nicht nur bei der Untersuchung *kontinuierlich ausgedehnter Körper*, sondern auch bei den *Molekulartheorien* der Materie kommt die Mechanik der starren Körper zur Geltung. In der Elastizitätstheorie hat sich die Annahme, dass ein elastischer Körper ein dichtgedrängter Haufen punktförmiger Anziehungs- und Abstossungszentren sei, als unzureichend erwiesen[353]), und es hat daher schon *S. D. Poisson* die Vorstellung ausgebildet, dass man die Moleküle als starre Körper anzusehen habe, zwischen denen nicht nur Zentralkräfte, sondern auch Kräftepaare wirken[354]); diesen Gedanken hat neuerdings *W. Voigt* mit Erfolg wieder aufgenommen[355]). Zu erwähnen ist ferner, dass man das Bild, die kleinsten Teilchen der Materie seien Drehkreisel, zur Erklärung der Elastizitätserscheinungen[356]) und der optischen Erscheinungen, im besonderen der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes im magnetischen Felde benutzt hat[357]). Auch

353) Die Entwicklungsgeschichte dieser Ideen findet man in dem Artikel IV 23 (*C. H. Müller* und *A. Timpe*).

354) J. de l'éc. polyt. cah. 20 (1831), p. 1; Paris Mém. 18 (1842), p. 3.

355) Gött. Abh. 34 (1887), p. 1.

356) *W. J. M. Rankine*, Edinburgh Roy. Soc. Trans. 20 (1850), part. 2; Phil. Mag. (4) 2 (1851), p. 509.

357) Auf dieser Grundlage hat *W. J. M. Rankine*, Phil. Mag. (4) 6 (1853), p. 403 = Misc. scient. papers, London 1881, p. 156 im Gegensatz zu der alten *Vibrationstheorie* eine *Oszillationstheorie des Lichtes* entwickelt. Für die Anwendung auf die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes siehe *C. Neumann*, Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes, Halle 1863 und *W. Voigt*, Ann. d. Phys. 23 (1884), p. 493; für diese Auffassung überhaupt vgl. die populäre Darstellung bei *J. Perry*, Spinning tops, London 1890, deutsch von *A. Walzel*: Drehkreisel, Leipzig 1904, sowie *O. J. Lodge*, Neueste Anschauungen der Elektrizität, deutsche Ausgabe, Leipzig 1896 und *H. E. J. G. du Bois*, Ann. d. Phys. (4) 13 (1904), p. 289.

W. Thomsons kinetische Theorie der Materie ist hier zu nennen; dieser konstruierte Systeme durch Gelenke verbundener Gyrostaten, die sich äusserlich genommen wie elastische Körper verhalten, und stellte ähnliche Betrachtungen für die Gravitation an[358]). Endlich werden in der neuesten Phase der theoretischen Physik die Elementarbestandteile der Materie, die *Elektronen*, gelegentlich wieder als starre Körper (Kugeln oder Ellipsoide) angesehen.

A. Der einzelne starre Körper: Allgemeine Theorie.

Vorbemerkung. Da es leider in der Dynamik des starren Körpers keine allgemein angenommenen *Bezeichnungen* giebt, sollen die hier benutzten Bezeichnungen vorweg übersichtlich zusammengestellt werden; für die genauere Erklärung werde auf die folgenden Nummern 28 und 29 verwiesen.

1) Die im Raume festen rechtwinkligen *Cartesischen Koordinaten* heissen ξ, η, ζ, die im Körper festen Koordinaten x, y, z; ihre Anfangspunkte Ω und O brauchen nicht zusammenzufallen. Die gegenseitigen *Richtungscosinus* zeigt das folgende Schema:

	x	y	z
ξ	a_1	a_2	a_3
η	b_1	b_2	b_3
ζ	c_1	c_2	c_3

Die neun Richtungscosinus sind Funktionen der drei *Eulerschen Winkel* ϑ, ψ, φ, und zwar bedeutet (wenn die Anfangspunkte Ω und O zusammenfallen):

ϑ die *Neigung* der ζ-Axe gegen die z-Axe,

ψ die sogenannte *Länge der Knotenlinie*, nämlich den Winkel, den die Schnittgerade der $\xi\eta$- und der xy-Ebene mit der ξ-Axe bildet,

φ das *Azimut* des Körpers, nämlich den Winkel, um den man die Knotenlinie drehen muss, damit sie mit der x-Axe zusammenfällt.

Für alle konkreten Anwendungen ist es unerlässlich, Verabredungen über den Sinn dieser Drehungen zu treffen; in der theoretischen Mechanik ist es üblich, den Sinn des Uhrzeigers zu wählen, und an dieser Gewohnheit soll auch hier festgehalten werden; die Astronomen bevorzugen den umgekehrten Sinn.

---

358) Brit. Ass. Reports (Montreal 1884), London 1885, p. 613; vgl. auch V 1, Nr. 26 (*A. Voss*) sowie V 27 (*A. Sommerfeld* und *G. Mie*).

Mit den *Euler*schen Winkeln sind die neun Richtungscosinus durch die Gleichungen verbunden:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta,\\
a_2 &= -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta,\\
a_3 &= \sin\psi\sin\vartheta;\\
b_1 &= \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta,\\
b_2 &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta,\\
b_3 &= -\cos\psi\sin\vartheta;\\
c_1 &= \sin\varphi\sin\vartheta,\\
c_2 &= \cos\varphi\sin\vartheta,\\
c_3 &= \cos\vartheta.
\end{aligned}$$

Dreht sich der starre Körper um einen im Raume *festen Punkt*, so heisse dieser immer O; wenn nicht ausdrücklich etwas anderes verabredet wird, sollen alsdann die Axen der x, y, z immer die *Hauptaxen* des Körpers für den Punkt O sein.

2) Die *Gesamtmasse* des Körpers sei m. Ferner seien die Koordinaten seines *Schwerpunktes* S gleich ξ_0, η_0, ζ_0; x_0, y_0, z_0, und seine *Hauptträgheitsmomente* in bezug auf O gleich A, B, C.

3) Die *Schraubungsgeschwindigkeit* des starren Körpers habe in bezug auf die ξ, η, ζ die Koordinaten $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$; π, $\varkappa$, ϱ und in bezug auf die x, y, z die Koordinaten u, v, w; p, q, r. Sie setzt sich aus der *Translationsgeschwindigkeit* $\mathfrak{v}$ und der *instantanen Drehgeschwindigkeit* $\mathfrak{w}$ zusammen.

4) Die *Impulsdyname* habe beziehungsweise die Koordinaten Ξ_1, H_1, Z_1; Λ_1, M_1, N_1 und X_1, Y_1, Z_1; L_1, M_1, N_1; der Impuls setzt sich aus dem *Schiebestoss* $\mathfrak{S}$ und dem *Drehstoss* $\mathfrak{D}$ zusammen.

5) Die *Dyname der äusseren Kräfte* habe beziehungsweise die Koordinaten Ξ, H, Z; Λ, M, N und X, Y, Z; L, M, N; diese Dyname setzt sich aus der *resultierenden Einzelkraft* $\mathfrak{K}$ und dem *resultierenden Drehmomente* $\mathfrak{M}$ zusammen.

27. Bemerkungen zur Statik des starren Körpers. Da über die elementare Statik des starren Körpers bereits in dem dritten Abschnitt des Artikels IV 2 (*H. E. Timerding*) berichtet worden ist, sollen hier nur einige ergänzende Bemerkungen hinzugefügt werden.

In der elementaren Statik wird gelehrt, wie man bei gegebenen Bedingungen die *Gleichgewichtslagen* des starren Körpers bestimmen kann. Aus den Gleichungen, die sich dabei ergeben, kann man jedoch

schon bei einfachen Aufgaben die zugehörigen Reaktionen nicht berechnen. Dies gilt zum Beispiel bei dem Gleichgewicht eines mit Gewichten belasteten vierbeinigen Tisches für die Reaktionen, die zwischen den Tischbeinen und dem Fussboden stattfinden[359]). Früher hat man sich öfters bemüht, diese Unbestimmtheit durch die Aufstellung besonderer Gesetze, zum Beispiel in der Gewölbetheorie durch das sogenannte Gesetz des kleinsten Widerstandes, zu beseitigen, ohne das Bild des starren Körpers aufzugeben; heute weiss man, dass alle solche Bemühungen, wenigstens in dieser Form, verfehlt waren[360]). Bei den sogenannten *statisch unbestimmten* Problemen hat man eben die Idealisierung zu weit getrieben, und die Lösung ergiebt sich, wie schon *L. Euler* erkannt hat, wenn das betrachtete System nicht als starr, sondern als elastisch angesehen wird, wenn man also zum Beispiel bei dem vierbeinigen Tische annimmt, der Fussboden erfahre Deformationen, die den Drucken proportional sind[361]). Dabei ist der Umstand von besonderer Wichtigkeit, dass die Gleichungen zwischen den Reaktionen, die die Statik des starren Körpers liefert, auch wenn man das betrachtete System als elastisch ansieht, als *notwendige* Bedingungen des Gleichgewichtes bestehen bleiben; der Ausdruck *statisch unbestimmt* bedeutet also nicht etwa, dass man über die Reaktionen beim starren Körper gar nichts aussagen kann, vielmehr ist, wie es der Natur des starren Körpers entspricht, die resultierende Einzelkraft und das resultierende Moment der Reaktionen stets vollständig bestimmt.

Dass man sich bei gewissen Problemen aus der Statik des

---

359) Dass die Statik des starren Körpers versagt, wenn sich ein schwerer starrer Körper in mehr als drei Punkten auf eine horizontale Ebene stützt, und bei drei Punkten, wenn diese in gerader Linie liegen, hat wohl zuerst *J. d'Alembert* bemerkt, Opuscules math. 8, Paris 1780, p. 36—40. Das im Text angeführte Beispiel des mit Gewichten belasteten vierbeinigen Tisches ist schon von *L. Euler* untersucht worden, Hindenburgs Archiv der reinen und angewandten Mathematik 1 (1795), p. 74. Dann hat *N. H. Abel*, J. f. Math. 1 (1826) = Oeuvres, 2. éd. 1, p. 95, im Anschluss an eine Abhandlung von *A. L. Crelle*, von neuem darauf hingewiesen, dass die Aufgabe, den Druck in den drei Stützpunkten einer mit Gewichten belasteten horizontalen Ebene zu finden, keine bestimmte Lösung habe, sobald die drei Stützpunkte in eine Gerade fallen. Es verdiente genauer festgestellt zu werden, wie sich die Lehre von den sogenannten statisch unbestimmten Systemen im Laufe des 19. Jahrhunderts entwickelt hat; eine unerlässliche Vorbedingung dafür wäre freilich, dass erst einmal eine *Geschichte der Statik des starren Körpers im 18. Jahrhundert* geschrieben würde.

360) Vgl. etwa *A. Föppl*, Festigkeitslehre, 3. Aufl., Leipzig 1905, p. 4.

361) Vgl. die Darstellung bei *P. Appell*, Mécanique 1, p. 148, wo sich auch noch andere Beispiele finden.

starren Körpers genötigt sieht, die Elastizitätstheorie heranzuziehen, wird manchmal mit der Behauptung begründet, bei absolut festen Körpern könne von Reaktionen überhaupt nicht die Rede sein; denn die Begriffe *starr* und *reagieren* widersprächen einander. Hier liegt jedoch eine Verwechslung zwischen *Mechanik* (im engeren Sinne des Wortes) und *Physik* vor. In die Physik gehört nämlich die Frage, wie die Reaktionen eines festen Körpers, den man zu einem starren idealisiert hat, tatsächlich zustande kommen. In der Mechanik aber liegt gerade der grosse Fortschritt, den wir *d'Alembert* verdanken, darin, dass die aus den Verbindungen hervorgehenden Reaktionen eingeführt werden, *ohne dass nach ihrer physikalischen Legitimation gefragt wird.*

E. Budde hat die Lehre von den Fällen, in denen das Gleichgewicht eines starren Körpers statisch unbestimmt wird, in grosser Allgemeinheit behandelt[362]). Zwischen den sechs Lagrangeschen Koordinaten eines starren Körpers, etwa den drei Cartesischen Koordinaten seines Schwerpunktes und den drei Eulerschen Winkeln, mögen n voneinander unabhängige Bedingungsgleichungen bestehen, wo n kleiner als sechs ist; sie mögen dadurch realisiert werden, dass vorgeschrieben wird, n im Körper feste Flächen (die sich auch auf Punkte reduzieren können) sollen stets n im Raume feste Flächen berühren. Jede dieser Bedingungen liefert eine Zwangskraft, so dass man $3n$ Zwangskomponenten zur Verfügung hat. Als Bedingungen des Gleichgewichts (ohne Reibung) ergeben sich aber $6 + 2n$ Gleichungen, und da in diesen die Werte der $6 - n$ freien Koordinaten und der $3n$ Zwangskomponenten als Unbekannte anzusehen sind, so hat man ein statisch bestimmtes Problem.

Jetzt kann man weitere Bedingungsgleichungen in endlicher oder auch unendlicher Zahl hinzufügen, die, analytisch betrachtet, bereits aus den n ursprünglichen Bedingungsgleichungen folgen, also keine neue Beschränkung der Beweglichkeit des Körpers bedeuten, die aber, mechanisch gedeutet, die Forderung enthalten, dass gewisse neue, im starren Körper feste Flächen stets gewisse im Raume feste Flächen berühren. Derartige Bedingungen bezeichnet *Budde* als *tautologische Kontakte.* Sie liefern je drei Zwangskomponenten. Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben jedoch immer nur $6 + 2n$ Gleichungen zwischen den freien Koordinaten und den Zwangskräften, und man hat daher jetzt mehr Unbekannte als Gleichungen. Aus diesen Gleichungen lassen sich stets die Gleichungen herleiten,

362) Mechanik 2, p. 930.

die zwischen den $6 - n$ freien Koordinaten bestehen und *die Gleichgewichtslagen* liefern[362a]). Die übrigen $3n$ Gleichungen zwischen den Zwangskomponenten reichen zu deren vollständiger Bestimmung nicht aus. Da jedoch in dem System dieser $3n$ Gleichungen Untersysteme enthalten sein können, in denen ebensoviele Unbekannte wie Gleichungen vorkommen, so kann es sich im Falle tautologischer Kontakte ergeben, dass ein Teil der Zwangskomponenten bestimmte Werte hat; allein es muß stets wenigstens bei einem Teil der Zwangskomponenten Unbestimmtheit eintreten.

Auch bei Aufgaben mit Reibung wird durch tautologische Kontakte im allgemeinen Unbestimmtheit der Reaktionen hervorgerufen[363]).

28. Vorbereitungen zur Kinetik des starren Körpers.

In dieser Nummer sollen die Begriffe und Lehrsätze aus der Geometrie, Massengeometrie und Kinematik, die zum Aufbau der Kinetik des starren Körpers erforderlich sind, übersichtlich zusammengestellt werden. Dabei wird sich zugleich die Möglichkeit ergeben, diese Disziplinen, über die in den Artikeln IV 2 (*H. E. Timerding*), IV 3 (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*) und IV 4 (*G. Jung*) getrennt berichtet worden ist, miteinander in Verbindung zu bringen: auch sollen einige Ergänzungen hinzugefügt werden.

28a. Lage und Beweglichkeit. Die *Lage* eines Massenpunktes P_a des starren Körpers lässt sich durch seine rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten in bezug auf ein im Raume festes System der ξ, η, ζ mit dem Anfangspunkte Ω bestimmen. Wenn man drei Punkte des starren Körpers durch ihre Koordinaten festlegt, ergiebt die Forderung der Starrheit drei Bedingungsgleichungen zwischen den neun Koordinaten, und da für jeden weiteren Punkt drei Koordinaten und drei Bedingungsgleichungen der Starrheit hinzutreten, so hat ein starrer Körper höchstens sechs *Grade der Freiheit*, d. h. die Mannigfaltigkeit der mit den etwa vorgeschriebenen Zwangsbedingungen verträglichen Lagen im Raume, die er einnehmen kann, hängt höchstens von sechs unabhängigen Veränderlichen oder *Lagekoordinaten* ab: ist der Körper im Raume *frei beweglich*, so sind es genau sechs. Die Mannigfaltigkeiten der zulässigen Lagen liefern einen *ersten Grund zur Einteilung* der Probleme der Stereokinetik.

362a) Diese Gleichgewichtslagen können in der Mannigfaltigkeit der $6 - n$ freien Koordinaten *diskrete Stellen* bilden; es giebt aber auch Fälle, wo *kontinuierliche Folgen* von Gleichgewichtslagen vorhanden sind, so dass schon bei der Bestimmung der Gleichgewichtslagen eine gewisse *Unbestimmtheit* eintreten kann.

363) Über die Schwierigkeiten bei der Reibung vgl. *E. Budde*, Mechanik 2, p. 934.

Einer jeden Mannigfaltigkeit von zulässigen Lagen entspricht eine Schar von *Bewegungen* des freien starren Körpers. Aus diesen Scharen wird man diejenigen herausheben, denen die „*Gruppeneigenschaft*" zukommt; das gilt zum Beispiel für die Gesamtheit aller Translationen und für die Gesamtheit aller Drehungen um einen festen Punkt. *C. Jordan* hat alle kontinuierlichen Gruppen aufgestellt, die sich aus reellen Bewegungen des Raumes bilden lassen[364]), und *F. Klein* empfiehlt, bei einem jeden Problem aus der Kinetik des gebundenen starren Körpers zunächst die kleinste Gruppe von Bewegungen zu ermitteln, die die zugehörige Schar zulässiger Bewegungen umfasst, und bei der Aufstellung der kinetischen Gleichungen jeweils von dieser Gruppe auszugehen[365]).

Während die grosse Menge von Möglichkeiten, die bei den *endlichen Bewegungen* eines starren Körpers vorhanden sind, bisher noch keine systematische Untersuchung erfahren hat, ist die Lehre von den infinitesimalen oder, wie man hier zu sagen pflegt, den *elementaren Bewegungen* zu einem gewissen Abschlusse gelangt, wenigstens soweit die *linearen* Glieder ausschlaggebend sind. Bei dieser wesentlichen Beschränkung bildet die Gesamtheit der mit den Bedingungen verträglichen infinitesimalen Bewegungen, die ein starrer Körper von einer gegebenen Lage aus vollführen kann, im Sinne von *R. St. Ball* ein lineares Schraubensystem erster bis sechster Stufe[366]); die von *Ball* begonnene Diskussion der linearen Schraubensysteme ist neuerdings von *E. Study* vollständig erledigt worden[367]). *F. Klein* hatte eine Ausgestaltung dieser geometrischen Untersuchung nach der mechanischen Seite hin angeregt[368]), indem er auf den Mechanismus hinwies, durch den *W. Thomson* und *P. G. Tait* die elementaren Bewegungen eines starren Körpers mit fünf Graden der Freiheit realisiert haben[369]), und aufforderte, ähnliche Konstruktionen für die anderen Fälle anzugeben. In der Tat hat *A. Grünwald* bald darauf einfache Mechanismen konstruiert, mittels deren

364) Ann. di mat. (2) 2 (1868), p. 168, 320; vgl. *E. Study*, Math. Ann. 39 (1891), p. 486 und *S. Lie*, Theorie der Transformationsgruppen 3, Leipzig 1893, p. 385.

365) Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 265.

366) Eine zusammenfassende Darstellung seiner Untersuchungen hat *R. St. Ball* in dem Werke: Theory of screws, Cambridge 1900, gegeben; vgl. im übrigen IV 2, Abschnitt II (*E. H. Timerding*).

367) Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903 (die erste Lieferung, auf die es hier ankommt, war schon 1901 erschienen); vgl. für die linearen Schraubensysteme auch *A. Grünwald*, Zeitschr. Math. Phys. 48 (1902), p. 48; 49, (1903), p. 211.

368) Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 258.

369) Treatise, 2. ed. 1, p. 155.

man die linearen infinitesimalen Bewegungen für alle Freiheitsgrade erhält; es sind für den Grad 1: Schraubenmutter und Schieber, für den Grad 2: Schraubenzwilling, Schraubenschieber und Doppelschieber, für den Grad 3: Schraubendrilling, flacher Drilling und Schraubenzwillingsschieber, für den Grad 4: Muff am Stift, Kreuzdoppelschieber und Muffdoppelschieber, für den Grad 5: Mutter am Doppelstift und Prisma am Doppelstift[370]).

H. Hertz hat die Aufmerksamkeit darauf gelenkt, dass der Grad der Beweglichkeit im *Unendlichkleinen* mit dem Grade der Beweglichkeit im *Endlichen* nicht notwendig übereinstimmt[371]). Die Übereinstimmung findet statt, wenn sich die Zwangsbedingungen durch endliche Gleichungen zwischen den Lagekoordinaten des Körpers ausdrücken lassen (*holonome Systeme*). Wenn jedoch, wie beim Rollen eines starren Körpers auf einer Unterlage (siehe Nr. **31** und **38** dieses Artikels) die Bedingungen in der Form nichtintegrabler linearer Gleichungen zwischen den Differentialen der Lagekoordinaten erscheinen (*nichtholonome Systeme*), wird durch die Beschränkung im Infinitesimalen keine Verminderung der Grade der Freiheit im Endlichen bewirkt; durch den Zwang wird dann nur die Art der Überführung des Körpers von einer zulässigen Lage in eine andere beschränkt, vgl. Nr. **16** dieses Artikels. In der Unterscheidung zwischen holonomen und nichtholonomen Problemen liegt ein *zweiter Einteilungsgrund* für die Probleme der Stereokinetik.

Es wäre unzweckmässig, als Lagekoordinaten eines frei beweglichen starren Körpers sechs unabhängige Koordinaten aus den neun Koordinaten der vorher erwähnten drei Punkte zu nehmen. Bei den Problemen der elementaren Kinetik pflegt man vielmehr in dem Körper zunächst einen *Bezugspunkt* O zu wählen, dessen Koordinaten nach den Axen der ξ, η, ζ mit ξ^*, η^*, ζ^* bezeichnet werden mögen. Kennt man die Bewegung des Bezugspunktes, so bleibt es übrig, die Lage des Körpers gegen ein Koordinatensystem der ξ_1, η_1, ζ_1 zu bestimmen, dessen Anfangspunkt der Punkt O ist, und dessen Axen den Axen der ξ, η, ζ parallel laufen. Zu diesem Zwecke betrachtet man ein im Körper festes System der x, y, z mit dem Anfangspunkte O und bestimmt seine Lage gegen die Axen der ξ, η, ζ durch die sogenannten *Eulerschen Winkel* ϑ, ψ, φ; vgl. die *Vorbemerkung* zu diesem Abschnitt. *L. Euler*, der dieses Verfahren in einer Abhandlung aus dem Jahre 1758 angegeben hat[372]), war übrigens zu den Winkeln, die die gegenseitige

370) Zeitschr. Math. Phys. 52 (1905), p. 229.
371) Mechanik, Leipzig 1894.
372) Berlin Mém. Année 1758 (1765), p. 154.

Lage zweier rechtwinkliger Koordinatensysteme mit demselben Anfangspunkte festlegen, schon 1748 bei der Lehre von der Koordinatentransformation im Raume gelangt[373]).

Die *Euler*schen Winkel lassen sich sehr einfach durch die sogenannte *Cardanische Aufhängung* veranschaulichen[374]), vermittels deren sich ein starrer Körper um einen festen Punkt beliebig drehen kann[375]).



Fig. 4.

Als Lagekoordinaten des frei beweglichen starren Körpers erscheinen bei dem soeben entwickelten Verfahren die drei Koordinaten des Bezugspunktes ξ^*, η^*, ζ^* und die drei *Euler*schen Winkel ϑ, ψ, φ; sind Zwangsbedingungen vorhanden, so hat man diese durch Gleichungen zwischen den Veränderlichen allein oder zwischen den Veränderlichen und deren Differentialen auszudrücken.

Statt der drei Eulerschen Winkel hat *J. L. Lagrange* 1773 die neun Richtungscosinus der beiden Koordinatenkreuze $a_1, \ldots, c_3$ eingeführt[376]). In der *elementaren* Kinetik des starren Körpers wird man bei der Veranschaulichung des Bewegungsverlaufes mit Vorteil die Eulerschen Winkel beibehalten; dagegen ist es nützlich, die in der *Vorbemerkung* zu diesem Abschnitt angegebenen Gleichungen zwischen den Richtungscosinus und den Eulerschen Winkeln zu kennen.

Statt des im Körper festen Koordinatensystems der x, y, z führt man auch gelegentlich Koordinatensysteme ein, die gegen den Körper

373) Introductio in analysin infinitorum, Lausanne 1748, Appendix, cap. 4: De immutatione coordinatarum; die *Euler*schen Winkel ergeben sich, indem das System der ξ_1, η_1, ζ_1 in das System der x, y, z durch drei auf einander folgende *Drehungen um eine Axe* übergeführt wird.

374) Vgl. *H. v. Helmholtz*, Dynamik, p. 331.

375) *H. Cardanus*, De subtilitate, Nürnberg 1550, liber 17, bezeichnet die Aufhängung als eine alte Erfindung. Nach *M. Berthelot*, Paris C. R. 111 (1890), p. 935, ist sie schon im 12. Jahrhundert nachzuweisen; vgl. auch *M. Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik 2, 2. Aufl., Leipzig 1900, p. 516.

376) Berlin Nouv. Mém. année 1773 = Oeuvres 3, p. 579; vgl. auch *L. Euler*, Petersburg Nov. Comment. 20 ad ann. 1775 (1776), p. 189 = Theoria motus, deutsche Übersetzung von *J. Ph. Wolfers*, p. 557.

eine *bekannte* Bewegung haben, zum Beispiel sich um eine im Körper feste Axe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit drehen; vgl. Nr. 30 und 38. An die Stelle der Eulerschen Winkel treten dann andere Grössen, die die Lage des beweglichen Koordinatensystems gegen das im Raume feste System der ξ, η, ζ festlegen.

28b. Massenverteilung. Zu den geometrischen Begriffen tritt jetzt der Begriff der *Masse* hinzu; vgl. IV 4, Nr. 1, 2, 21 (*G. Jung*). Befindet sich im Punkte P_a das Massenelement dm_a, so liefert das über den Körper zu erstreckende Integral

$$\int dm_a$$

die *Gesamtmasse* m des Körpers[377]). Die Momente erster Ordnung in Bezug auf den Punkt O:

$$\int x_a dm_a, \quad \int y_a dm_a, \quad \int z_a dm_a$$

verschwinden für den *Massenmittelpunkt* oder *Schwerpunkt* S des Körpers[378]). Bildet man die Momente zweiter Ordnung in Bezug auf O:

$$\int (y_a^2 + z_a^2) dm_a = A, \quad \int (z_a^2 + x_a^2) dm_a = B, \quad \int (x_a^2 + y_a^2) dm_a = C,$$

$$\int y_a z_a dm_a = D, \quad \int z_a x_a dm_a = E, \quad \int x_a y_a dm_a = F,$$

so ist das *Trägheitsmoment* K des Körpers in bezug auf eine beliebige durch O gehende Axe gleich dem reziproken Quadrat des auf der Axe liegenden Halbmessers des *Cauchyschen Ellipsoides*:

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1.$$[379])

377) Das Zeichen m ist gewählt worden, weil M bereits eine Komponente des resultierenden Drehmomentes $\mathfrak{M}$ der äußeren Kräfte bedeutet. Bei manchen Autoren ist dieser Umstand übersehen worden, und es finden sich alsdann Gleichungen, wie

$$M = - Mgl \sin\vartheta \sin\varphi$$

(*A. G. Webster*, Dynamics, p. 276, Gl. 66), in denen derselbe Buchstabe auf der linken und auf der rechten Seite zwei ganz verschiedene Bedeutungen hat.

378) Die französischen Autoren sagen häufig *centre d'inertie;* centrum inertiae scheint von *S. König*, Nova Act. Erudit. Lips. 1738, p. 34, eingeführt worden zu sein, der sich für den Ausdruck inertia auf *J. Kepler* und *Chr. Wolf* beruft; auch *L. Euler* gebraucht in seiner grundlegenden Abhandlung Berlin Mém. année 1758 (1765), p. 134, die Bezeichnungen *centre d'inertie* und *centre de masse.* Englische Autoren sagen *centre of mass* oder auch *centroid.*

379) Exercices de math. 2. année, Paris 1827 = Oeuvres (2) 7, p. 127; wie es scheint, ist *L. Poinsot* unabhängig von *Cauchy* ebenfalls zu diesem Ellipsoid gelangt, siehe Théorie nouvelle de la rotation des corps, Paris 1834 = J. de math. (1) 16 (1851), p. 58.

Bei dem einzelnen starren Körper ist es vorteilhaft, als Axen der x, y, z drei auf einander senkrechte *Hauptaxen* des Ellipsoids zu nehmen, sodass die A, B, C die *Hauptträgheitsmomente* für O werden, während die D, E, F verschwinden; wenn dagegen der Körper als Glied eines Systemes auftritt, so ist diese Wahl im Allgemeinen nicht zweckmäßig. Nach dem Vorgange von *L. Euler*[380]) setzt man häufig $K = mk^2$; k wird als *Gyrationsradius*, Trägheitsradius oder auch, nach *L. Poinsot*, als *Trägheitsarm* bezeichnet[381]).

Im folgenden sollen die Ausartungen der Massenverteilung ausgeschlossen werden, bei denen eines oder mehrere der Hauptträgheitsmomente verschwinden; Körper dieser Art sind etwa eine unendlich dünne Scheibe oder ein unendlich dünner Stab. In diesen Grenzfällen, die für die Elastizitätstheorie von Bedeutung sind, lässt sich das stereodynamische Problem leicht durch ein äquivalentes Problem der Punktdynamik ersetzen.[382])

Die Grössenbeziehungen zwischen den Hauptträgheitsmomenten liefern einen *dritten Einteilungsgrund* für die Probleme der Kinetik des starren Körpers, der besonders bei der Bewegung um einen festen Punkt zur Geltung gelangt. Abweichend von dem Sprachgebrauche des täglichen Lebens bezeichnet man in der Dynamik einen solchen Körper als einen *Kreisel*[346b]); um Verwechslungen zu verhüten, soll im Gegensatze hierzu der auf horizontaler Ebene spielende, unten in eine Spitze auslaufende Rotationskörper ein *Spielkreisel* genannt werden.

Nach den Grössenbeziehungen zwischen den Hauptträgheitsmomenten A, B, C in bezug auf den festen Punkt O unterscheidet man drei Arten von Kreiseln.

Ist $A = B = C$, so hat man einen *Kugelkreisel*[383]) vor sich. Man sagt dann auch, der Körper besitze *kinetische Symmetrie in bezug auf den Punkt O*[384]). Körper dieser Art sind, in bezug auf ihren Mittelpunkt, die homogene Kugel und die homogenen regulären Körper. Mit ihnen sind jedoch die Fälle der kinetischen Symmetrie noch nicht erschöpft. Bei der Untersuchung der Frage, ob ein gegebener Körper Punkte besitzt, in bezug auf die die Gleichung $A = B = C$ gilt, kommt

380) Theoria motus, cap. 5.

381) Théorie nouvelle, Paris 1834 = J. de math. (1) 16 (1851), p. 73.

382) Vgl. etwa *P. Stäckel*, J. f. Math. 107 (1890), p. 343.

383) Der Sache nach tritt der Kugelkreisel schon bei *L. Euler* auf, der ihm die Kapitel 11 und 14 der Theoria motus gewidmet hat; der Name aber scheint zuerst von *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, p. 234, eingeführt worden zu sein.

384) *W. Thomson* und *P. G. Tait*, Handbuch 1, p. 223.

es auf die Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt an. Sind diese ungleich, so giebt es überhaupt keinen solchen Punkt. Sind alle drei einander gleich, so ist der Schwerpunkt der einzige Punkt der verlangten Art[385]). Sind aber nur zwei einander gleich, so giebt es solche Punkte dann und nur dann, wenn das ungleiche Moment grösser ist als die beiden gleichen, wie das z. B. bei dem homogenen abgeplatteten Rotationsellipsoid zutrifft, und zwar erhält man zwei Punkte, die auf der Axe des grösseren Moments in gleicher Entfernung zu beiden Seiten des Schwerpunkts liegen[386]).

Sind nur zwei der Hauptträgheitsmomente für O einander gleich, also etwa $A = B$, so heisst der Kreisel ein *symmetrischer Kreisel*; ist A grösser als C, so hat man einen *verlängerten*, ist A kleiner als C, einen *abgeplatteten* Kreisel. Die Axe des Moments C wird die *Figurenaxe* des symmetrischen Kreisels genannt, die darauf senkrechte Ebene, in der der Büschel der Axen gleichen Moments liegt, die *Äquatorebene*[387]). Man sagt auch, dass der Kreiselkörper *kinetische Symmetrie in bezug auf die Figurenaxe* besitze. Körper dieser Art sind alle homogenen Rotationskörper in bezug auf die Rotationsaxe und für jeden Punkt dieser Axe. Bei einem beliebigen starren Körper sind die geometrischen Orte der Punkte, in denen zwei der Hauptträgheitsmomente einander gleich werden, nach *J. Binet*[386]) je eine Ellipse und eine Hyperbel, die demselben konfokalen Systeme angehören.

F. Klein und *A. Sommerfeld* gebrauchen den Ausdruck *symmetrischer Kreisel* in dem engeren Sinne, dass auch noch *der Schwerpunkt auf der Figurenaxe liegen soll*[388]); in dieser Bedeutung soll in Nr. 35 dieses Artikels von symmetrischen Kreiseln geredet werden.

Sind endlich die Hauptträgheitsmomente alle von einander verschieden, so hat man es mit einem *unsymmetrischen Kreisel* zu tun. Spricht man aber Sätze aus, die gelten, gleichgültig, wie sich die

385) Die Gestalt solcher Körper untersuchten *J. d'Alembert*, Opusc. math. 4, Paris 1768, p. 20; 5, Paris 1768, p. 501; *P. S. Laplace*, Paris Mém. année 1783 (1786), p. 17; *A. M. Legendre*, Paris Mém. année 1789 (1793), p. 372; *R. Mayr*, Diss. München 1901, Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 479.

386) *S. D. Poisson*, Mécanique, 1. éd., Paris 1811, p. 496; *J. Binet*, J. de l'éc. polyt. cah. 16 (1813), p. 41 (lu 1811); *L. Poinsot*, Théorie nouvelle, Paris 1834 = J. de math. (1) 16 (1851), p. 71.

387) *S. D. Poisson*, Mécanique 2, 2. éd., Paris 1833, p. 163.

388) Theorie des Kreisels, p. 1; vgl. auch Anmerkung 346b. Ein Beispiel für einen symmetrischen Kreisel im weiteren Sinne des Wortes ist der *Kowalewskische Kreisel*, bei dem der Schwerpunkt in der Äquatorebene *ausserhalb* der Figurenachse liegt; vgl. Nr. 36 dieses Artikels.

Grössenbeziehungen der Hauptträgheitsmomente gestalten, so wird der Kreisel als *allgemeiner Kreisel* bezeichnet.

28c. Geschwindigkeitszustand. 1) Zu den Lagekoordinaten und der Massenverteilung treten jetzt die Begriffe hinzu, die sich auf den Verlauf der Bewegung in der Zeit beziehen, und zwar handelt es sich hier zunächst um die Bestimmung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_\alpha$, mit der sich ein beliebiger Punkt $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ des Körpers zur Zeit t bewegt. Zu diesem Zwecke genügt es, die vektoriell aufgefasste Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Bezugspunktes O und die vektoriell aufgefasste instantane Drehungsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$[389]) des Körpers um diesen Punkt zu kennen.

Werden die Komponenten jener vektoriell aufgefassten Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ nach den Axen der x, y, z mit u, v, w und p, q, r bezeichnet, so sind die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes P_α nach denselben Axen:

$$(2)\quad u_\alpha = u + qz_\alpha - ry_\alpha, \quad v_\alpha = v + rx_\alpha - pz_\alpha, \quad w_\alpha = w + py_\alpha - qx_\alpha;$$

vgl. IV 2, Nr. **11** (*H. E. Timerding*). Wird noch der Vektor $OP_\alpha = \mathfrak{r}_\alpha$ eingeführt, so erscheint der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_\alpha$ als die Summe der Vektoren $\mathfrak{v}$ und $[\mathfrak{w}\mathfrak{r}_\alpha]$, wo die eckige Klammer das vektorielle Produkt bezeichnet.

Verlegt man den Bezugspunkt nach einer anderen Stelle O' des Körpers, so bleibt der *Drehvektor* $\mathfrak{w}$ ungeändert, während der *Vektor der Translationsgeschwindigkeit* übergeht in

$$(3)\quad \mathfrak{v}' = \mathfrak{v} + [\mathfrak{w}\mathfrak{a}];$$

hierin soll $\mathfrak{a}$ den Vektor OO' bedeuten. Bei geeigneter Wahl von O' fällt der Vektor $\mathfrak{v}'$ in die Axe des Vektors $\mathfrak{w}$, und man erhält so die Axe der unendlich kleinen *Schraubung*, die der Körper im Zeitelemente dt vollführt.

Da durch die Grössen p, q, r; u, v, w der *Geschwindigkeitszustand* des Körpers vollständig bestimmt ist, werden sie auch als seine *Geschwindigkeitskoordinaten* bezeichnet. Das System der sechs Grössen

---

389) Die Darstellung der instantanen Drehgeschwindigkeit durch einen Vektor verdankt man *L. Poinsot*, Théorie nouvelle, Paris 1834 = J. de math. (1) 16 (1851), p. 13. Neben dem *Vektor* $\mathfrak{w}$ gebraucht man häufig die instantane *Winkelgeschwindigkeit* ω der Drehung um die Axe, in der dieser Vektor liegt. Dem *Betrage* nach stimmt ω mit dem *Betrage* (der Länge) des Vektors $\mathfrak{w}$, also mit $|\mathfrak{w}|$ überein, ω ist jedoch je nach dem Sinn der Drehung positiv oder negativ zu nehmen. Es wäre vielleicht zweckmässig, solche Skalare wie ω, bei denen in der Axe des Vektors ein Sinn gegeben ist, zum Unterschiede von den stets positiven *Beträgen* der betreffenden Vektoren als *Intensitäten* zu bezeichnen; jedenfalls ist es erforderlich, die drei Begriffe $\mathfrak{w}$, $|\mathfrak{w}|$ und ω genau aus einander zu halten.

p, q, r; u, v, w soll die *Schraubungsgeschwindigkeit* des Körpers heissen. In der Bezeichnung von *R. St. Ball*[390]) wird durch die Verhältnisse der p, q, r; u, v, w eine *Schraube* (*screw*) festgelegt. Zu einer solchen *Ballschen Schraube* gehören unendlich viele *Schraubungen* (*twists on a screw*), die sich von einander durch ihre Intensität unterscheiden und auch verschiedenen Sinn (Rechts- oder Linksschraubung) haben können. Die Axe der infinitesimalen Schraubung $p\,dt, q\,dt, r\,dt$; $u\,dt, v\,dt, w\,dt$ im Zeitelemente dt hat die Linienkoordinaten

$$p : q : r : (u - kp) : (v - kq) : (w - kr),$$

wo der *Parameter* (*pitch*):

$$k = \frac{pu + qv + rw}{p^2 + q^2 + r^2}$$

ist; die *Winkelgeschwindigkeit* ω *der Drehung* um die Axe ist gleich $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ und die *Translationsgeschwindigkeit* $\mathfrak{v}^*$ längs der Axe der Grösse nach gleich $k\omega$.

Betrachtet man im besonderen die drei Punkte, die auf den Axen der ξ_1, η_1, ζ_1 in der Entfernung Eins liegen, die also im Systeme der x, y, z der Reihe nach die Koordinaten:

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{matrix}$$

haben, und drückt aus, dass die absoluten Geschwindigkeiten dieser Punkte gleich Null sind, so ergeben sich für die neun Richtungscosinus die oft benutzten neun Differentialgleichungen[391]):

$$(4)\quad \frac{da_1}{dt} = a_2 r - a_3 q, \quad \frac{da_2}{dt} = a_3 p - a_1 r, \quad \frac{da_3}{dt} = a_1 q - a_2 p \quad \text{usw.}$$

Werden hierin für die Richtungscosinus ihre Ausdrücke mittels der *Euler*schen Winkel eingesetzt, so erhält man für die Komponenten p, q, r der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ nach den Axen der x, y, z die sogenannten *kinematischen Gleichungen:*

$$(5)\quad \begin{cases} p = \dot\psi \sin\vartheta \sin\varphi + \dot\vartheta \cos\varphi, \\ q = \dot\psi \sin\vartheta \cos\varphi - \dot\vartheta \sin\varphi, \\ r = \dot\psi \cos\vartheta + \dot\varphi; \end{cases}$$

390) Vgl. die zusammenfassende Darstellung der Untersuchungen *Balls:* Theory of screws, Cambridge 1900.

391) *S. D. Poisson,* Mécanique 2, 1. éd., Paris 1811, p. 135. Die Herleitung ist hier rein rechnerisch. Die im Texte gegebene kinematische Herleitung scheint von *P. Saint-Guilhem,* J. de math. (1) 16 (1851), p. 364 herzurühren; sie findet sich auch zum Beispiel bei *P. Appell,* Mécanique 2, p. 200 und *A. G. Webster,* Dynamics, p. 248.

man kann diese Gleichungen auch leicht unmittelbar durch geometrische Überlegungen ableiten[392]).

Für die Komponenten $\pi, \varkappa, \varrho$ von $\mathfrak{w}$ nach den Axen der ξ, η, ζ erhält man aus (5) die Werte:

$$(5^*)\quad \begin{cases} \pi = \dot\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \dot\vartheta \cos\psi, \\ \varkappa = -\dot\varphi \sin\vartheta \cos\psi + \dot\vartheta \sin\psi, \\ \varrho = \dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi. \end{cases}$$

2) Ist der Geschwindigkeitszustand des Körpers durch die Geschwindigkeitskoordinaten p, q, r; u, v, w als Funktion der Zeit gegeben, so hat man, um seine Lage zu ermitteln, zunächst aus den kinematischen Gleichungen die Eulerschen Winkel zu bestimmen. Nach *G. Darboux* geht man jedoch hierfür besser zu den Gleichungen (4) zurück, die zeigen, dass alles auf die Integration der drei simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \varphi_2 r - \varphi_3 q, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \varphi_3 p - \varphi_1 r, \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = \varphi_1 q - \varphi_2 p$$

ankommt. Diese besitzen immer das Integral

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = \text{const.}$$

Da in dem vorliegenden Falle die Konstante den Wert Eins haben muss, setze man

$$\varphi_1 = \frac{1 - xy}{x - y}, \quad \varphi_2 = i\,\frac{1 + xy}{x - y}, \quad \varphi_3 = \frac{x + y}{x - y}.$$

Alsdann sind x und y Integrale der *Riccatischen Differentialgleichung*

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}(q - ip) - ir\sigma + \frac{1}{2}(q + ip)\sigma^2;$$

diese lässt sich durch Quadraturen integrieren, sobald ein partikuläres Integral von ihr bekannt ist[393]).

Kennt man die *Eulerschen Winkel* als Funktionen der Zeit, so ergeben sich die *Koordinaten* ξ^*, η^*, ζ^* *des Bezugspunktes* O durch Quadraturen aus den Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi^*}{dt} = a_1 u + a_2 v + a_3 w, \\ \dfrac{d\eta^*}{dt} = b_1 u + b_2 v + b_3 w, \\ \dfrac{d\zeta^*}{dt} = c_1 u + c_2 v + c_3 w. \end{cases}$$

392) *L. Euler*, Berlin Mém. année 1760 (1767), p. 205; vgl. auch *P. Appell*, Mécanique 2, p. 144.

393) Leçons sur la théorie générale des surfaces 1, livre 1, Paris 1887.

Dieser analytischen Behandlung tritt die synthetische zur Seite; vgl. IV 3, Nr. **15—17** (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*). Nach *A. L. Cauchy*[394]) betrachtet man hierbei die Gesamtheit der Axen, die zu den instantanen Schraubungen des Körpers gehören. Diese bilden, allgemein gesprochen, im Raume und im Körper zwei windschiefe Regelflächen, die *Axenflächen*, die sich in jedem Augenblicke berühren und dabei eine erzeugende Gerade, nämlich die betreffende Schraubungsaxe, gemeinsam haben. Während der Bewegung des Körpers wickeln sie sich gleitend und rollend in der Weise auf einander ab, dass die Gleitung immer längs der gemeinsamen erzeugenden Geraden erfolgt; diese Bewegungsart wird auch eine *Schrotung* genannt[395]).

Sehr einfach gestaltet sich dieses Bild, wenn der Körper ein *Kreisel* ist. Die Axenflächen sind alsdann zwei *Kegel*, deren gemeinsamer Scheitel in dem festen Punkte O des Körpers liegt. Der eine Kegel geht durch die Kurve hindurch, die der Endpunkt P des von O aus abgetragenen Vektors $\mathfrak{w}$ der Drehgeschwindigkeit im Körper, oder, nach *L. Poinsot*, der *Drehpol* P beschreibt, und die *Polweg* oder *Polhodie* genannt wird; der andere Kegel geht durch die Kurve, die der Drehpol P im Raume beschreibt und die *Herpolhodie* heisst. Diese beiden Kurven und ebenso die beiden Kegel rollen während der Bewegung auf einander ab[396]).

Ebenso wie man in der Kinetik des materiellen Punktes berührende und oskulierende Bewegungen betrachtet, wird man auch in der Kinetik des starren Körpers vorgehen. Die berührende Bewegung ist beim Kreisel die gleichförmige Drehung um die instantane Axe mit der Winkelgeschwindigkeit ω, als oskulierende Bewegung aber ergiebt sich das Abrollen von zwei *Kreiskegeln*, Krümmungskegeln, um die sich die Polhodie und Herpolhodie in immer weiter bezw. immer enger werdenden Windungen herumziehen. Wenn man jedoch darauf verzichtet, die Grösse der vektoriellen Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ wiederzugeben, und nur ein Bild von ihrer Richtung zu haben wünscht, kommt man mit zwei Kreiskegeln aus, die sich in gleichförmiger Drehung auf einander abwickeln. Man hat in diesem Falle die Bewegung der *regulären Präzession*, die schon in der Astronomie der Griechen eine Rolle spielt. Diese lässt sich auch so beschreiben, dass, bei geeigneter Wahl der Koordinaten, die z-Axe um die ζ-Axe mit der gleichförmigen *Präzessionsgeschwindigkeit* v einen Kreiskegel, den *Präzessionskegel*, beschreibt,

394) Exercices année 2, Paris 1827, p. 87 = Oeuvres (2) 7, p. 140.

395) *F. Reuleaux*, Theoretische Kinematik, Braunschweig 1877; *G. Koenigs*, Leçons de cinématique, Paris 1897, übersetzt Schrotung mit *viration*.

396) *L. Poinsot*, Théorie nouvelle, Paris 1834 = J. de math. (1) 16 (1851), p. 89, 303.

während gleichzeitig der Körper sich mit der konstanten *Eigengeschwindigkeit* μ um die z-Axe dreht. Bei dieser Bewegung ist $\vartheta = \vartheta_0$, $\psi = \nu t$, $\varphi = \mu t$ und die Komponenten der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ werden

$$(7)\qquad \begin{cases} p = \nu \sin \vartheta_0 \sin \mu t \\ q = \nu \sin \vartheta_0 \cos \mu t \\ r = \nu \cos \vartheta_0 + \mu; \end{cases}$$

mithin ist $\omega^2 = \mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu \cos \vartheta_0$. Beispiele für die reguläre Präzession liefern Bewegungen des kräftefreien symmetrischen und des schweren symmetrischen Kreisels; auch die Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt gehört hierher.

Die Präzession heisst *progressiv*, wenn μ und ν dasselbe Vorzeichen haben, *retrograd*, wenn ihr Verhältnis negativ ist. Eine genaue Diskussion aller möglichen Fälle hat *L. Poinsot* gegeben[397]); die Figuren 5—8 veranschaulichen die vier Hauptfälle der regulären Präzession.

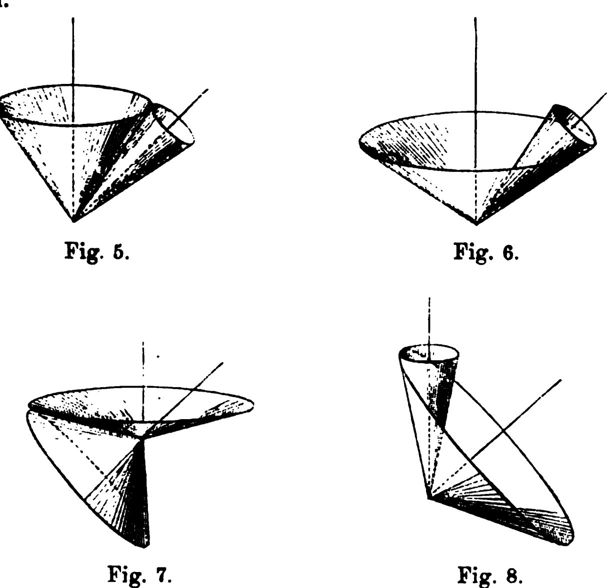


Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8.

28d. Lebendige Kraft und Impuls. Indem man die Geschwindigkeiten mit den Massenelementen in Verbindung bringt, wird man zu den Begriffen der lebendigen Kraft und des Impulses geführt.

1) Die *lebendige Kraft* T des starren Körpers erscheint zunächst in der Form des über den Körper zu erstreckenden dreifachen Inte-

397) J. de math. (1) 18 (1853), p. 41; vgl. auch *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, p. 47.

grals über das halbe Produkt aus dem Massenelement dm_α und dem Quadrate der zugehörigen Geschwindigkeit; das Integral wird jedoch vermöge der Ausdrücke (3) für die Komponenten dieser Geschwindigkeit nach den im Körper festen Axen eine quadratische Form, deren Koeffizienten *absolute* Konstanten sind, d. h. auch die Lagekoordinaten des Körpers nicht enthalten.

Diese quadratische Form erhält eine sehr einfache Gestalt, wenn man als Bezugspunkt O den Schwerpunkt S und als Axen der x, y, z die Hauptaxen von S nimmt; es wird nämlich

$$T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \tfrac{1}{2}m(u^2 + v^2 + w^2). \tag{8}$$

Das zweite Glied $\frac{1}{2}m(u^2+v^2+w^2)$ ist die lebendige Kraft der im Schwerpunkte vereinigten Gesamtmasse des Körpers, wenn ihr die Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Schwerpunktes S erteilt wird; durch das erste Glied $\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)$ wird die lebendige Kraft der Kreiselung um S dargestellt. Man hat also hier einen besonderen Fall des Satzes von *Samuel König*; vgl. Nr. **10** dieses Artikels.

Bedeuten x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Schwerpunktes in bezug auf die Axen der x, y, z, *deren Anfangspunkt und deren Richtungen im Körper willkürlich gewählt worden sind*, so gilt für die lebendige Kraft die verwickeltere Gleichung:

$$(8^*)\quad \left\{\begin{aligned} T = {} & \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq) \\ & + m[(wy_0 - vz_0)p + (uz_0 - wx_0)q + (vx_0 - uy_0)r] \\ & + \tfrac{1}{2}m(u^2 + v^2 + w^2). \end{aligned}\right.$$

2) Unter dem *Gesamtimpuls* eines Systems materieller Punkte versteht man die Dyname, deren sechs Koordinaten in bezug auf die Axen der ξ, η, ζ durch die Summen

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \Sigma\dot{\xi}_\alpha m_\alpha, & \Lambda_1 &= \Sigma(\eta_\alpha\dot{\zeta}_\alpha - \zeta_\alpha\dot{\eta}_\alpha)m_\alpha, \\ \mathrm{H}_1 &= \Sigma\dot{\eta}_\alpha m_\alpha, & \mathrm{M}_1 &= \Sigma(\zeta_\alpha\dot{\xi}_\alpha - \xi_\alpha\dot{\zeta}_\alpha)m_\alpha, \\ \mathrm{Z}_1 &= \Sigma\dot{\zeta}_\alpha m_\alpha; & \mathrm{N}_1 &= \Sigma(\xi_\alpha\dot{\eta}_\alpha - \eta_\alpha\dot{\xi}_\alpha)m_\alpha \end{aligned}$$

dargestellt werden; vgl. Nr. 7 dieses Artikels. Bei dem starren Körper werden aus den Summen dreifache Integrale, die über alle Massenelemente dm_α zu erstrecken sind. Bildet man die sechs Koordinaten der so entstehenden *Impulsdyname* nach den im Körper festen Axen der x, y, z, so erhält man mit Hülfe des Ausdruckes (8*) der lebendigen Kraft die einfachen Formeln:

$$(9^*)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial T}{\partial u}, & Y_1 &= \frac{\partial T}{\partial v}, & Z_1 &= \frac{\partial T}{\partial w}; \\ L_1 &= \frac{\partial T}{\partial p}, & M_1 &= \frac{\partial T}{\partial q}, & N_1 &= \frac{\partial T}{\partial r}. \end{aligned}\right.$$

Im besonderen ist, wenn T durch den Ausdruck (8) dargestellt wird:

$$(9)\quad \begin{cases} X_1 = Mu, & Y_1 = Mv, & Z_1 = Mw; \\ L_1 = Ap, & M_1 = Bq, & N_1 = Cr. \end{cases}$$

Verlegt man den Bezugspunkt von O nach einer anderen Stelle O' des Körpers, so bleibt der Vektor $\mathfrak{S}$ des *Schiebestosses* (X_1, Y_1, Z_1) ungeändert, während der Vektor $\mathfrak{D}$ des *Drehstosses* (L_1, M_1, N_1) übergeht in

$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} + [\mathfrak{S}\mathfrak{a}],$$

wo $\mathfrak{a}$ wieder den Vektor OO' bezeichnet. Bei geeigneter Wahl von O' fällt der Vektor $\mathfrak{D}'$ in die Axe des Vektors $\mathfrak{S}$, und man erhält die Axe des *Schraubestosses*, der dem Gesamtimpuls des starren Körpers äquivalent ist. Der Schraubestoss setzt sich aus dem Schiebestoss $\mathfrak{S}$ mit den Komponenten X_1, Y_1, Z_1 und einem Drehstoss $\mathfrak{D}^*$ mit den Komponenten kX_1, kY_1, kZ_1 zusammen, wobei der Parameter

$$k = \frac{X_1 L_1 + Y_1 M_1 + Z_1 N_1}{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$$

ist; die Linienkoordinaten der *Zentralaxe*, in die die beiden Vektoren $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{D}^*$ fallen, werden durch die Verhältnisse

$$X_1 : Y_1 : Z_1 : (L_1 - kX_1) : (M_1 - kY_1) : (N_1 - kZ_1)$$

gegeben.

Auf diese Art werden der *Ballschen Schraube*, die durch die Verhältnisse der sechs Grössen X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1, also durch Axe und Parameter, festgelegt ist, unendlich viele *Schraubestösse* (*wrenches about a screw*) zugeordnet, die sich durch ihre Intensität unterscheiden und auch verschiedenen Sinn haben können.

Der Schraubestoss des Gesamtimpulses und die Schraubungsgeschwindigkeit des Körpers sind Grössen ähnlicher Art. Wenn man sie mit einander vergleicht, hat man die Vektoren $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{v}$ in Parallele zu stellen, und es ist daher ein Missverständnis, wenn manche Autoren es so darstellen, als ob es sich bei dieser Zuordnung um einen *kausalen* Zusammenhang handle[398]).

In der That besteht zwischen *Schraubungsgeschwindigkeit* und *Schraubestoss* derselbe Unterschied, wie zwischen Vektoren, die Translations- und Drehungsgeschwindigkeiten oder die Einzelkräfte und Momente darstellen. Die Vektoren der ersten Art (polare Vektoren) wechseln bei einer Inversion des Koordinatensystems das Vorzeichen, während die Vektoren der zweiten Art (axiale Vektoren) unverändert

398) Vgl. die Ausführungen in IV 2, Nr. 27 (*H. E. Timerding*).

bleiben[399]). Dem entsprechend gehören, nachdem Zeit- und Krafteinheit festgesetzt sind, zu einem Schraubestosse noch immer zwei entgegengesetzt gleiche Schraubungsgeschwindigkeiten, und die Zuordnung wird erst dann eindeutig, wenn man noch eine Verabredung getroffen hat, *welcher Sinn um die Axe einem die Axe entlang weisenden Sinn entsprechen soll.* Um diesem Unterschiede einen Ausdruck zu geben, hat *F. Klein* vorgeschlagen, den Inbegriff der $(p, q, r; u, v, w)$ eine *Schraubengrösse erster Art*, den Inbegriff der $(X_1, Y_1, Z_1; L_1, M_1, N_1)$ eine *Schraubengrösse zweiter Art* zu nennen[400]).

Dem starren Körper kommt die Eigentümlichkeit zu, dass umgekehrt aus dem Gesamtimpuls die Geschwindigkeitskoordinaten und insbesondere auch die lebendige Kraft berechnet werden können, und es hat daher die Impulsdyname für den starren Körper eine ähnliche Bedeutung, wie der Impulsvektor für den einzelnen materiellen Punkt; wirken zum Beispiel keine äusseren Kräfte, so wird der Gesamtverlauf der Bewegung durch die Angabe bestimmt, dass beim materiellen Punkte der Impulsvektor und beim starren Körper die Impulsdyname im Raume stehen bleiben. Auf dieser Eigenschaft des starren Körpers beruht die synthetische Ableitung der Differentialgleichungen der Bewegung, die in Nr. 29 gegeben werden wird.

Beim Kreisel wird der Vektor des Drehstosses $\mathfrak{D}$ für den festen Punkt O, der für ihn allein in Betracht kommt, häufig einfach als *Impulsvektor des Kreisels* bezeichnet. Dieser Impulsvektor, der von O aus abgetragen werden möge, beschreibt bei irgend einer Bewegung des Kreisels einen Kegel, den *Impulskegel*, und der geometrische Ort seiner Endpunkte ist eine Kurve, die *Impulskurve* heißt.

Aus den Eigenschaften des Impulses ergiebt sich ein *vierter Einteilungsgrund* für die Bewegungen starrer Körper. Man wird vor allem nach solchen Bewegungsformen fragen, bei denen die Impulsdyname einfach ausfällt. Allerdings wird man dabei vielfach auf Fälle zurückgeführt, die schon bei den drei anderen Einteilungsgründen aufgetreten waren; es hat sich aber auch Neues ergeben. In dieser Beziehung seien genannt die Untersuchungen *L. Poinsots*[401]) über die Bewegungen, die ein kräftefreier Körper bei einem Anfangsstosse annimmt, und der *Hess*sche Fall bei dem schweren symmetrischen

---

399) Vgl. IV 14, Nr. 2 und 3 (*M. Abraham*).

400) Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 242; vgl. IV 2, Nr. 13 und 23 (*H. E. Timerding*).

401) J. de math. (2) 2 (1857), p. 281; (2) 4 (1859), p. 161, 171, 421; vgl. auch Nr. 44 dieses Artikels.

Kreisel, der dadurch charakterisiert ist, dass der Impulsvektor stets in einer Ebene liegt, die im Körper fest bleibt[402]).

3) Bei den Gleichungen (9) tritt eine Beziehung zwischen der instantanen Schraubungsgeschwindigkeit und der Impulsdyname zu Tage. Für den entsprechenden Zusammenhang zwischen den *Ball*schen Schrauben, die zu der Schraubungsgeschwindigkeit und der Impulsdyname des Körpers gehören, hat *R. St. Ball* den Namen der *chiastischen Homographie* eingeführt[403]). Ferner wird die lebendige Kraft mit den beiden genannten Begriffe verknüpft durch die Gleichung:

$$(10) \qquad T = \tfrac{1}{2}(uX_1 + vY_1 + wZ_1 + pL_1 + qM_1 + rN_1),$$

die aussagt, dass die lebendige Kraft gleich dem halben Momente jener beiden Schrauben auf einander ist; im besonderen wird beim Kreisel

$$(10') \qquad T = \tfrac{1}{2}(pL_1 + qM_1 + rN_1),$$

d. h. T ist das halbe skalare Produkt der Vektoren $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{D}$. Für die *elementare Arbeit* dW der Dyname X, Y, Z; L, M, N im Zeitelemente dt hat man endlich die häufig benutzte Gleichung

$$(11) \qquad dW = (uX + zY + wZ + pL + qM + rN)dt.$$ [404])

29. Allgemeine Kinetik des starren Körpers.

Die in der vorhergehenden Nummer dargelegten Begriffe und Sätze ermöglichen es, die Differentialgleichungen der Bewegung für den starren Körper aufzustellen. Das soll zunächst in synthetischer und darauf in analytischer Behandlung geschehen. Bei der üblichen Form dieser Differentialgleichungen sind die aus den Bedingungen entspringenden Reaktionen eliminiert worden, und es folgt daher hinterher zur Ergänzung ein kurzer Bericht über die Kinetostatik des starren Körpers. Den Schluss der Nummer bilden Ausführungen über die Bedeutung der Schraubentheorie für die Kinetik des starren Körpers.

29a. Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung in synthetischer Behandlung. In der Kinetik der *Systeme materieller Punkte* wird gezeigt, dass sich bei einem Stosse, der auf das System ausgeübt wird, die Dyname der Stosskräfte mit der Dyname des Gesamtimpulses additiv zusammensetzt. Erfährt also ein freier starrer Körper mit der Impulsdyname (Ξ_1, H_1, Z_1; Λ_1, M_1, N_1) einen Stoss,

---

402) *W. Hess*, Math. Ann. 37 (1894), p. 318; näheres in Nr. 36 dieses Artikels.

403) Vgl. IV 2, Nr. 19 (*H. E. Timerding*).

404) Vgl. IV 2, Nr. 14 und 26 (*H. E. Timerding*).

der durch die Dyname ($[\Xi]$, $[\mathsf{H}]$, $[\mathsf{Z}]$; $[\Lambda]$, $[\mathsf{M}]$, $[\mathsf{N}]$) dargestellt sein möge, so hat seine Impulsdyname nach dem Stosse die Koordinaten

$$\Xi_1 + [\Xi],\ \mathsf{H}_1 + [\mathsf{H}],\ \mathsf{Z}_1 + [\mathsf{Z}];\ \Lambda_1 + [\Lambda],\ \mathsf{M}_1 + [\mathsf{M}],\ \mathsf{N}_1 + [\mathsf{N}].$$

Auf die Frage, wie sich ein solcher Stoss realisieren lässt, kann hier nicht eingegangen werden, da ihre Beantwortung auf die Lehre von dem Stosse *fester* Körper führen würde.

Wirken kontinuierliche Kräfte, die sich in bezug auf den Punkt Ω und die Axen der ξ, η, ζ zu einer resultierenden Einzelkraft $\mathfrak{K}$ mit den Komponenten Ξ, H, Z und einem resultierenden Kräftepaare des Momentes $\mathfrak{M}$ mit den Komponenten Λ, M, N vereinigen lassen, so setzt sich im Zeitelemente dt die Impulsdyname mit der unendlich kleinen Stossdyname Ξdt, $\mathsf{H} dt$, $\mathsf{Z} dt$; Λdt, $\mathsf{M} dt$, $\mathsf{N} dt$ zusammen; für den Übergang von endlichen zu unendlich kleinen Stössen vgl. Nr. **18** dieses Artikels. Dieser *Impulssatz* gilt zunächst für den freien starren Körper; wenn zu den gegebenen Kräften noch Bedingungen hinzutreten, so hat man die Reaktionen hinzuzunehmen.

Der genannte *Impulssatz* findet beim freien starren Körper seinen analytischen Ausdruck in den fundamentalen Gleichungen:

$$(1)\qquad d\Xi_1 = \Xi dt,\quad d\mathsf{H}_1 = \mathsf{H} dt,\quad d\mathsf{Z}_1 = \mathsf{Z} dt;$$

$$(2)\qquad d\Lambda_1 = \Lambda dt,\quad d\mathsf{M}_1 = \mathsf{M} dt,\quad d\mathsf{N}_1 = \mathsf{N} dt.$$

Man kann sie auch zu den beiden vektoriellen Gleichungen

$$(1\text{a})\qquad d\mathfrak{S} = \mathfrak{K} dt,$$

$$(2\text{a})\qquad d\mathfrak{D} = \mathfrak{M} dt$$

vereinigen; die Nummern der vektoriellen Gleichungen sollen hier, wie im Folgenden, durch den Zusatz des Buchstabens a gekennzeichnet werden. Die Differentialgleichungen (1) und (2) bestimmen die Änderung der *Impulsdyname* im Laufe der Zeit; da aber beim starren Körper durch die Impulsdyname die *Schraubungsgeschwindigkeit* eindeutig festgelegt wird (siehe Nr. 28d), bestimmen sie auch die Änderung des Geschwindigkeitszustandes im Laufe der Zeit. Die Gleichungen (1) und (2) in Verbindung mit den Gleichungen (9) von Nr. 28d sind somit als die *Differentialgleichungen der Bewegung des freien starren Körpers* anzusprechen.

Die Impulsgleichungen (1) und (2) gelten unter der Voraussetzung, dass die Dynamen auf den im Raume festen Punkt Ω und die im Raume festen Axen der ξ, η, ζ bezogen werden; für die Anwendungen ist es jedoch erforderlich, Gleichungen herzustellen, die für einen beweglichen Anfangspunkt O und für die beweglichen Axen der

x, y, z gelten. Der Einfachheit halber soll im folgenden nur der wichtigste Fall betrachtet werden, dass O ein bestimmter Punkt des Körpers und die Axen der x, y, z im Körper feste Axen sind.

Zunächst sei nur der Anfangspunkt O beweglich, nämlich als Bezugspunkt des Körpers; durch ihn mögen die Axen der ξ_1, η_1, ζ_1 parallel zu den im Raume festen Axen der ξ, η, ζ gelegt werden. Wenn der Punkt O während des Zeitelementes dt in die Lage O' übergeht, so ist der Vektor OO' gleich $\mathfrak{v}\,dt$; der Vektor $\mathfrak{S}$ bleibt bei dieser Verlegung ungeändert, der Vektor $\mathfrak{D}$ aber geht in $\mathfrak{D} + [\mathfrak{S}\mathfrak{v}]dt$ über. Wenn man Änderungen im Zeitelemente dt relativ zu dem beweglichen Punkte O durch das Symbol d' bezeichnet, so ist daher:

$$d'\mathfrak{S} = \mathfrak{K}dt, \quad d'\mathfrak{D} + [\mathfrak{v}\mathfrak{S}]dt = \mathfrak{M}dt.$$

Nunmehr werde statt des Systems der ξ_1, η_1, ζ_1 das im Körper feste System der x, y, z eingeführt, das um den Punkt O die Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ hat. Denkt man sich von O aus die Vektoren $OS = \mathfrak{S}$ und $OD = \mathfrak{D}$ abgetragen, so sind die Differentialquotienten $\frac{d'\mathfrak{S}}{dt}$ und $\frac{d'\mathfrak{D}}{dt}$ die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Punkte S und D, bei festgehaltenem O, zur Zeit t bewegen. Nach der Lehre von den relativen Bewegungen (siehe IV 3, Nr. **26** (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*) sowie Nr. **10** dieses Artikels) setzen sich diese Geschwindigkeiten aus den Fortführungsgeschwindigkeiten der Punkte S und D im Körper und ihren relativen Geschwindigkeiten gegen den Körper zusammen. Die Fortführungsgeschwindigkeiten sind aber (siehe Nr. 28c) gleich $[\mathfrak{w}\mathfrak{S}]$ und $[\mathfrak{w}\mathfrak{D}]$, und als die relativen Geschwindigkeiten ergeben sich, wenn Änderungen im Zeitelemente dt relativ gegen den Körper durch das Symbol d^* bezeichnet werden, die Differentialquotienten $\frac{d^*\mathfrak{S}}{dt}$ und $\frac{d^*\mathfrak{D}}{dt}$. Hieraus folgen die vektoriellen Gleichungen:

$$\text{(3a)} \qquad \frac{d^*\mathfrak{S}}{dt} + [\mathfrak{w}\mathfrak{S}] = \mathfrak{K},$$

$$\text{(4a)} \qquad \frac{d^*\mathfrak{D}}{dt} + [\mathfrak{w}\mathfrak{D}] + [\mathfrak{v}\mathfrak{S}] = \mathfrak{M},$$

die in der Sprache der analytischen Geometrie so lauten:

$$\text{(3)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= X + rY_1 - qZ_1, \\ \frac{dY_1}{dt} &= Y + pZ_1 - rX_1, \\ \frac{dZ_1}{dt} &= Z + qX_1 - pY_1; \end{aligned} \right.$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dL_1}{dt} = L + wY_1 - wZ_1 + rM_1 - qN_1, \\ \dfrac{dM_1}{dt} = M + uZ_1 - wX_1 + pN_1 - rL_1, \\ \dfrac{dN_1}{dt} = N + vX_1 - uY_1 + qL_1 - pM_1. \end{cases}$$

Wählt man im besonderen als Bezugspunkt O den Schwerpunkt S des Körpers, so ist

$$\mathfrak{S} = m\mathfrak{v},$$

und die Gleichung $d'\mathfrak{S} = \mathfrak{K}\,dt$ geht über in den *Schwerpunktssatz*:

$$(5\text{a})\qquad m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{K}.$$

Da ferner das vektorielle Produkt $[\mathfrak{v}\mathfrak{v}]$ verschwindet, so lautet jetzt die Gleichung (4a):

$$(6\text{a})\qquad \frac{d^*\mathfrak{D}}{dt} + [\mathfrak{w}\mathfrak{D}] = \mathfrak{M},$$

d. h. es gilt der *Satz von L. Euler*, dass sich *der Körper so um den Schwerpunkt bewegt, als ob dieser fest wäre*[405]). *Kinematisch* ist es bei *jedem* Bezugspunkte O möglich, die Bewegung des Körpers in die Translation des Bezugspunktes und die Drehung um den Bezugspunkt zu zerlegen, aber nur der Schwerpunkt besitzt die *kinetische* Eigenschaft, dass die Bewegung um ihn so erfolgt, als ob er ruhte. Der Satz von *Euler* wird häufig so ausgelegt, als könne man die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung (3) und (4), wenn der Schwerpunkt als Bezugspunkt gewählt wird, in der Weise ausführen, dass man die Bewegung des Schwerpunktes und die Drehung um ihn jede für sich ermittelt. Diese Auslegung trifft allerdings in einigen besonderen Fällen zu, zum Beispiel, wenn auf den Körper als äussere Kraft nur die Schwere wirkt. Allein sie enthält einen prinzipiellen Irrtum; denn im allgemeinen werden die Differentialgleichungen (5a) und (6a), sobald darin die Lagekoordinaten eingeführt werden, ein irreduzibles simultanes System in allen sechs Veränderlichen bilden.

Eine ähnliche Vereinfachung der Gleichung (4a) wie beim Schwerpunkte ergiebt sich auch bei dem *Kreisel*, d. h. bei einem starren Körper, der sich um einen festen Punkt dreht[346b]). Da nämlich die in dem festen Punkte O angreifende Reaktion keinen Beitrag zu dem Momente $\mathfrak{M}$ liefern kann, so darf man von ihr absehen, und erhält jetzt, indem $\mathfrak{v} = 0$ ist, wieder die Gleichung (6a).

405) Dieser Satz findet sich schon in *L. Eulers* Scientia navalis, 1, § 128, Petersburg 1749.

In der Sprache der analytischen Geometrie tritt an die Stelle der *einen* Vektorgleichung (6a) das System der *drei* Gleichungen:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{dL_1}{dt} = L + rM_1 - qN_1, \\ \dfrac{dM_1}{dt} = M + pN_1 - rL_1, \\ \dfrac{dN_1}{dt} = N + qL_1 - pM_1. \end{cases}$$

Wenn man hierin für die Komponenten des Drehstosses $\mathfrak{D}$ ihre Werte

$$L_1 = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad M_1 = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad N_1 = \frac{\partial T}{\partial r}$$

einsetzt, so entstehen die sogenannten *Eulerschen Gleichungen:*

$$(6')\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial p} = L + r\dfrac{\partial T}{\partial q} - q\dfrac{\partial T}{\partial r}, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q} = M + p\dfrac{\partial T}{\partial r} - r\dfrac{\partial T}{\partial p}, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial r} = N + q\dfrac{\partial T}{\partial p} - p\dfrac{\partial T}{\partial q}, \end{cases}$$

die bei Einführung von *Hauptaxen* für den Schwerpunkt des freien starren Körpers bez. für den festen Punkt des kreiselnden starren Körpers die einfache Gestalt annehmen:

$$(6'')\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = L + (B - C)qr, \\ B\dfrac{dq}{dt} = M + (C - A)rp, \\ C\dfrac{dr}{dt} = N + (A - B)pq. \end{cases}$$

Über die verschiedenen Methoden, diese Eulerschen Gleichungen herzuleiten, wird in Nr. **30** ausführlich berichtet werden.

Der Bedeutung der Gleichungen (2) entsprechend lassen sich die Eulerschen Gleichungen auffassen als die *Flächensätze*, bezogen auf bewegliche Axen; nur hat man dabei den Ausdruck Flächensatz nicht, wie es vielfach üblich ist, in dem Sinne der *Erhaltung* der Flächen zu verstehen (vgl. Nr. **5**, p. 464 dieses Artikels), sondern so, dass sich der elementare Drehstoss des Impulses zu dem Drehstoss der äusseren Kräfte geometrisch addiert. Es findet also eine genaue Analogie mit den Schwerpunktssätzen statt, die aussagen, dass der Schiebestoss des Impulses zu dem Schiebestoss der äusseren Kräfte hinzutritt[406]).

---

406) Vgl. *F. Klein* und *A. Sommerfeld,* Theorie des Kreisels, p. 110—115. Statt der dort gebrauchten Ausdrücke *Impulsschraube* und *Stossschraube* sind hier,

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, dass man die allgemeine Kinetik des starren Körpers auch aufbauen kann, indem man von den Schwerpunktssätzen und den allgemeiner aufgefassten Flächensätzen ausgeht. Bei speziellen Problemen wird diese Art des Vorgehens besonders dann von Nutzen sein, wenn aus diesen Sätzen folgt, dass eine oder mehrere der Komponenten der Impulsdyname während der Bewegung konstant bleiben. Indem man noch den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft hinzunimmt, der fast bei allen Problemen der theoretischen Mechanik gilt, ist es häufig möglich, Gleichungen zu erhalten, durch die man auf elementare Art zur Integration der Bewegungsgleichungen gelangt oder aus denen man doch Schlüsse auf den Verlauf der Bewegung ziehen kann.

29b. Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung in analytischer Behandlung. Die Verheissung *J. L. Lagranges*, dass seine Methode, ohne Konstruktionen oder geometrische Überlegungen zu erfordern, alle Gleichungen liefere, die zur Lösung einer jeden Aufgabe der Dynamik nötig sind, geht auch bei der Kinetik des starren Körpers in Erfüllung. Der Ansatz der Differentialgleichungen der Bewegung gestaltet sich sogar bei diesem analytischen Verfahren sehr einfach.

Es handle sich zunächst um den freien starren Körper. Nach der Vorschrift von *Lagrange* hat man zuerst Lagekoordinaten einzuführen. Das seien die in Nr. 28a definierten Grössen $\xi^*, \eta^*, \zeta^*; \vartheta, \psi, \varphi$, also die Koordinaten des Bezugspunktes O und die *Euler*schen Winkel. Darauf hat man die Ausdrücke der lebendigen Kraft T und der elementaren Arbeit δW der äusseren Kräfte zu bilden. Nach Nr. 28d wird T eine quadratische Form der Grössen $p, q, r; u, v, w$ mit absolut konstanten Koeffizienten. Wenn man nun aus den kinematischen Gleichungen für p, q, r, Nr. 28c, Gleichungen (5), und aus den Gleichungen für die Ableitungen der Koordinaten ξ^*, η^*, ζ^* nach der Zeit, Nr. 28c, Gleichungen (6), die Werte für $p, q, r; u, v, w$ einsetzt, so ergiebt sich T als eine quadratische Form der verallgemeinerten *Geschwindigkeitskoordinaten* $\dot\xi^*, \dot\eta^*, \dot\zeta^*, \dot\vartheta, \dot\psi, \dot\varphi$, deren Koeffizienten von den *Lagekoordinaten* $\xi^*, \eta^*, \zeta^*; \vartheta, \psi, \varphi$ abhängen. Die elementare Arbeit dW der Dyname der äusseren Kräfte $(X, Y, Z; L, M, N)$ bei der unendlich kleinen Schraubung des Körpers im Zeitelemente dt, nämlich $(udt, vdt, wdt; pdt, qdt, rdt)$, ist aber nach Gleichung

---

damit das Wort *Schraube* den *Ballschen Schrauben* vorbehalten bleibt, die Ausdrücke *Impulsdyname* und *Stossdyname* benutzt worden.

(11) in Nr. 28d:

$$dW = (Xu + Yv + Zw + Lp + Mq + Nr)\,dt.$$

Werden wiederum hierin für u, v, w; p, q, r ihre Ausdrücke in den Geschwindigkeits- und Lagekoordinaten eingesetzt und noch die Zeichen d durch die Zeichen δ ersetzt, so ergiebt sich ein Ausdruck der Form:

$$\delta W = \Xi\,\delta\xi^* + \mathrm{H}\,\delta\eta^* + \mathrm{Z}\,\delta\zeta^* + \Theta\,\delta\vartheta + \Psi\,\delta\psi + \Phi\,\delta\varphi;$$

hierin bedeuten Θ, Ψ, Φ die senkrechten Projektionen des Vektors $\mathfrak{M}$ auf die ζ-Axe, die Knotenlinie und die z-Axe.

Nach diesen Vorbereitungen kann man sofort die *Lagrangeschen Differentialgleichungen* aufstellen, und zwar erhält man:

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot\xi^*} = \Xi, & \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot\eta^*} = \mathrm{H}, & \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot\zeta^*} = \mathrm{Z}; \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot\vartheta} - \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta} = \Theta, & \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot\psi} - \dfrac{\partial T}{\partial \psi} = \Psi, & \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot\varphi} - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = \Phi. \end{cases}$$ [407]

Die Glieder $\dfrac{\partial T}{\partial \vartheta}, \dfrac{\partial T}{\partial \psi}, \dfrac{\partial T}{\partial \varphi}$ lassen sich deuten als die Komponenten des Vektors $\mathfrak{D}$ nach der ζ-Axe, der Knotenlinie und der z-Axe.

Wählt man im besonderen als Bezugspunkt O den Schwerpunkt und als Axen der x, y, z die zugehörigen Hauptaxen, so wird

$$T = \tfrac{1}{2} m(\dot\xi^{*2} + \dot\eta^{*2} + \dot\zeta^{*2}) + \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

und die erste Zeile der Gleichungen (7) geht über in den *Schwerpunktssatz:*

$$m\ddot\xi^* = \Xi, \quad m\ddot\eta^* = \mathrm{H}, \quad m\ddot\zeta^* = \mathrm{Z},$$

die zweite Zeile aber liefert Gleichungen, in denen auf den linken Seiten nur die *Euler*schen Winkel und deren Ableitungen nach der Zeit auftreten. Wie man aus den Gleichungen der zweiten Zeile die *Eulerschen Gleichungen* ableiten kann, wird in Nr. **30** gezeigt werden.

Ebenso schnell führt das Lagrangesche Verfahren zum Ziele, falls Zwangsbedingungen vorhanden sind, die sich durch holonome oder nichtholonome Gleichungen der Form

$$\delta W_\alpha \equiv \Xi_\alpha\delta\xi^* + \mathrm{H}_\alpha\delta\eta^* + \mathrm{Z}_\alpha\delta\zeta^* + \Theta_\alpha\delta\vartheta + \Psi_\alpha\delta\psi + \Phi_\alpha\delta\varphi = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$$

---

407) Auf die im Texte angegebene Art hat *Lagrange* die Differentialgleichungen der Bewegung schon 1760 hergeleitet, Misc. Taur. 2 (1760/61) = Oeuvres 1, p. 417; er hat hier auch schon den Fall betrachtet, dass Bedingungsgleichungen vorgeschrieben sind. Später hat *Lagrange* in der Mécanique analytique die Anwendung seiner Methode auf den starren Körper ausführlich dargestellt; vgl. auch Nr. **30** dieses Artikels.

darstellen lassen; man hat dann nur bei der Bildung der Gleichungen (7) statt δW den Ausdruck

$$\delta W + \lambda_1 \delta W_1 + \lambda_2 \delta W_2 + \lambda_3 \delta W_3 + \cdots$$

zu benutzen. Hierin bedeuten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ die *Euler-Lagrangeschen Multiplikatoren*, die den aus den Bedingungen entspringenden Drucken entsprechen. Es möge noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass bei diesen Verfahren d'Alembertsche Reaktionen vorausgesetzt werden, die keine Arbeit leisten oder absorbieren; falls Dissipation der Energie stattfindet, sind die Reibungswiderstände den äusseren Kräften zuzurechnen, siehe Nr. **31** dieses Artikels.

In den Differentialgleichungen der Bewegung, die man auf diese Art erhält, kommen Multiplikatoren vor, die man erst eliminieren muss, wenn man Gleichungen für die Lagekoordinaten allein oder die sogenannten *reinen Gleichungen* erhalten will. Bei holonomen Bedingungen kann man sich die Eliminationen ersparen, indem man von vornherein Lagekoordinaten einführt, bei denen die Gleichungen $\delta W_\alpha = 0$ identisch erfüllt sind. Wie man die reinen Gleichungen in allen Fällen *unmittelbar* erhalten kann, hat neuerdings *P. Appell* gezeigt[408]).

Besteht die Zwangsbedingung im besonderen darin, dass ein Punkt O des Körpers festgehalten wird, so nehme man ihn zum Bezugspunkt. Dann sind die Koordinaten ξ^*, η^*, ζ^* konstant, und man kann daher den Ansatz der *Lagrange*schen Gleichungen von vorn herein unter der Voraussetzung vornehmen, dass die *Euler*schen Winkel die drei Lagekoordinaten des Kreisels sind. Wählt man noch als Axen der x, y, z drei auf einander senkrechte Hauptaxen des Punktes O, so ist:

$$T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \tag{8}$$

und man wird daher beim *Kreisel* Differentialgleichungen genau derselben Form erhalten, wie bei der Kreiselung eines *freien* starren Körpers um seinen *Schwerpunkt*.

29c. Kinetostatik. Aufgabe der *Kinetostatik* ist es, die Drucke und die Mittelwerte der inneren Spannungen zu bestimmen, die bei einem in *Bewegung* befindlichen Systeme auftreten; siehe Nr. **42** dieses Artikels.

Es möge hier genügen, als Beispiel die Bestimmung des kinetostatischen Druckes $\mathfrak{R}$ zu geben, den beim *Kreisel* der feste Punkt O erfährt. Die Komponenten dieser Einzelkraft $\mathfrak{R}$ nach den Axen der x, y, z seien U, V, W. Wäre der Kreisel in Ruhe, so wären die Kom-

408) Mécanique 2, p. 374; siehe auch Nr. 30 dieses Artikels.

ponenten von $\mathfrak{R}$ der Reihe nach gleich X, Y, Z, da ja der feste Punkt die Wirkung der resultierenden Einzelkraft $\mathfrak{K}$ der äusseren Kräfte aufhebt; dieser Druck wird daher als *statischer Druck* bezeichnet. Bei der Bewegung kommt aber zu dem statischen Druck (X, Y, Z) ein *kinetischer Druck* hinzu, den man folgendermaßen findet. Wird den äusseren Kräften die Einzelkraft $-\mathfrak{R}$ hinzugefügt, so darf man den Körper als frei beweglich ansehen, und es gelten daher für ihn die Differentialgleichungen (3), die in dem vorliegenden Falle so lauten:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{dX_1}{dt} + qZ_1 - rY_1 = X - U, \\ \dfrac{dY_1}{dt} + rX_1 - pZ_1 = Y - V, \\ \dfrac{dZ_1}{dt} + pY_1 - qX_1 = Z - W; \end{cases}$$

die linken Seiten dieser Gleichungen sind, abgesehen vom Vorzeichen, die Komponenten des kinetischen Druckes.

Um die hier auftretenden Impulskoordinaten X_1, Y_1, Z_1 aus den Gleichungen (9), Nr. 28d zu berechnen, hat man in ihnen zunächst für die lebendige Kraft T den Ausdruck zu benutzen, der bei einem *freien* starren Körper mit beliebigem Bezugspunkt O gilt, von diesem die partiellen Ableitungen nach u, v, w zu nehmen und erst hinterher, wie es der Bewegung des Kreisels entspricht, $u = v = w = 0$ zu setzen. Auf diese Art findet man die Werte:

$$(10)\qquad \begin{cases} X_1 = m(qz_0 - ry_0), \\ Y_1 = m(rx_0 - pz_0), \\ Z_1 = m(py_0 - qx_0), \end{cases}$$

in denen x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Schwerpunktes S bedeuten. Berechnet man jetzt U, V, W, so ergiebt sich für den *kinetostatischen Druck* $\mathfrak{R}$ die Vektorgleichung:

$$(11)\qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{K} + \mathfrak{w}^2 \cdot \mathfrak{a} - \mathfrak{w} \cdot (\mathfrak{w}\mathfrak{a}) + \left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,\mathfrak{a}\right];$$

hierin bezeichnet $\mathfrak{a}$ den Vektor OS, und es ist, wie üblich, das skalare Produkt durch runde Klammern, das vektorielle durch eckige Klammern gekennzeichnet worden[409]).

Nicht weniger wichtig für die Anwendungen wäre die Ermittelung der inneren Spannungen, die in dem Kreiselkörper eintreten; denn wenn diese bei rascher Drehung eine gewisse Grenze übersteigen,

409) *P. Appell*, Mécanique 2, p. 151; *A. Legoux*, Toulouse Ann. (1) 8 (1894), I, p. 13.

wird der Kreisel zerspringen. Hierfür möge jedoch auf die Angaben in Nr. 42 verwiesen werden.

Ebenso wie in der Statik des starren Körpers ereignet es sich auch in der Kinetik, dass die vollständige Bestimmung der aus den Bedingungen entspringenden Drucke mittels der hier gegebenen Gleichungen nicht gelingt; das tritt zum Beispiel ein, wenn ein starrer Körper gezwungen ist, sich um eine im Raume feste Axe zu drehen, siehe Nr. 32 dieses Artikels. Wie schon in Nr. 27 bemerkt wurde, muss man, um ein bestimmtes Resultat zu erhalten, in solchen Fällen die Annahme der Starrheit aufgeben und den Körper als elastisch ansehen.

29d. Bedeutung der Schraubentheorie für die Kinetik des starren Körpers. Nachdem in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts die Statik des starren Körpers bei der Zusammensetzung der Kräfte und der Momente, die Kinematik bei der Darstellung der Drehungen Veranlassung zur Ausbildung der Vektorentheorie gegeben hatte, ist am Anfange seiner zweiten Hälfte durch *J. Plücker* und *F. Klein* die Theorie der Linienkomplexe und Linienkongruenzen begründet und sogleich für die Dynamik des starren Körpers verwertet worden. Daneben kam es in England zu der Ausbildung der sogenannten *Schraubentheorie* durch *R. St. Ball*, der namentlich den Impulsproblemen einen ungeahnten Grad der Anschaulichkeit gegeben hat. Während dementsprechend in der allgemeinen Kinetik des einzelnen starren Körpers die Begriffe der Schraubentheorie, allerdings in beschränktem Masse, herangezogen worden sind, wird diese bei den speziellen Ausführungen, die den Gegenstand des Abschnittes II B bilden, ganz zurücktreten. Bei den elementaren Problemen der Stereokinetik ist es nämlich immer möglich, die translatorische Bewegung und die rotatorische Bewegung jede für sich zu behandeln, und es entfällt daher die Notwendigkeit, im Sinne der Schraubentheorie eine Synthese dieser Bewegungen vorzunehmen. Anders steht es bei höheren Problemen, wo die Differentialgleichnngen der Bewegung ein irreduzibles simultanes System in sechs Veränderlichen bilden. Das gilt zum Beispiel, wenn ein freier starrer Körper sich in einem widerstehenden Mittel bewegt. Auf Gleichungen dieser Art führt auch das Problem der Bewegung eines starren Körpers in einer reibungslosen inkompressiblen Flüssigkeit; analytische Entwicklungen, die den geometrischen Entwicklungen der Schraubentheorie entsprechen, waren hier schon vor *Ball* von *Lord Kelvin* und *G. Kirchhoff* gegeben worden[410]. Übrigens hat sich *Ball* selbst mit solchen höheren Problemen nicht beschäftigt. Er beschränkt sich vielmehr, dem anschau-

410) Vgl. IV 16, Nr. 2 (*A. E. H. Love*).

lichen und elementaren Charakter seiner Darlegungen entsprechend, auf solche Fragen, bei denen die Koordinaten der Schraubungsgeschwindigkeit wie Lagrangesche Geschwindigkeitskoordinaten gebraucht werden können; hierbei denkt sich *Ball* irgend welche Bedingungsgleichungen für den starren Körper vorgeschrieben, die dessen Bewegungsfreiheit einschränken. Man vgl. hierzu auch Nr. 7, 18 und 31 dieses Artikels[411]).

30. Drehung um einen festen Punkt: Die Eulerschen Gleichungen. Die schon in der vorhergehenden Nummer unter (6″) angegebenen *Eulerschen Gleichungen*

$$(1)\qquad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = L, \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = M, \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = N \end{cases}$$

haben wegen ihrer eigenartigen Stellung unter den Differentialgleichungen der analytischen Mechanik seit ihrer Entdeckung lebhaftes Interesse erregt. Man hat sich mit ihnen immer wieder beschäftigt und ihnen in der Tat bis in die neueste Zeit neue Seiten abgewonnen. Es scheint daher angebracht, in zusammenhängender Weise über die Methoden zu der Aufstellung der Eulerschen Gleichungen zu berichten, soweit diese einen elementaren Charakter haben; für die Methoden, die der höheren Dynamik angehören, vgl. IV 13 (*P. Stäckel*).

1) *L. Euler* ist im Jahre 1758 zu den Differentialgleichungen, die jetzt seinen Namen tragen, durch folgende Überlegung gelangt[412]). Ist $P_\alpha(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha)$ ein materieller Punkt des Kreisels mit der Masse dm_α, so hat seine Geschwindigkeit die Komponenten

$$(2)\qquad \dot\xi_\alpha = \varkappa\zeta_\alpha - \varrho\eta_\alpha,\quad \dot\eta_\alpha = \varrho\xi_\alpha - \pi\zeta_\alpha,\quad \dot\zeta_\alpha = \pi\eta_\alpha - \varkappa\xi_\alpha,$$

und hieraus folgen durch Differentiation die Komponenten der Beschleunigung:

$$(3)\qquad \begin{cases} \ddot\xi_\alpha = \varkappa\dot\zeta_\alpha - \varrho\dot\eta_\alpha + \dot\varkappa\zeta_\alpha - \ddot\varrho\eta_\alpha, \\ \ddot\eta_\alpha = \varrho\dot\xi_\alpha - \pi\dot\zeta_\alpha + \dot\varrho\xi_\alpha - \ddot\pi\zeta_\alpha, \\ \ddot\zeta_\alpha = \pi\dot\eta_\alpha - \varkappa\dot\xi_\alpha + \dot\pi\eta_\alpha - \ddot\varkappa\xi_\alpha. \end{cases}$$

411) Eine ausführliche Analyse dieser Untersuchungen *Balls* gab *F. Klein*, Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 259.

412) Berlin Mém. année 1758 (1765), p. 154. Die Eulerschen Gleichungen findet man Seite 170; die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit werden dabei auffallenderweise mit x, y, z bezeichnet. In der Theoria motus, § 792, hat *Euler* diese Herleitung mit dem Unterschiede wiederholt, dass er statt p, q, r die Grössen $\omega\cos\alpha$, $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$ zu Grunde legt; für ω, α, β, γ erhält er natürlich recht verwickelte Differentialgleichungen.

Vermöge dieser Gleichungen werden die Momente

$$(\eta_\alpha \ddot{\zeta}_\alpha - \zeta_\alpha \ddot{\eta}_\alpha) dm_\alpha, \quad (\zeta_\alpha \ddot{\xi}_\alpha - \xi_\alpha \ddot{\zeta}_\alpha) dm_\alpha, \quad (\xi_\alpha \ddot{\eta}_\alpha - \eta_\alpha \ddot{\xi}_\alpha) dm_\alpha$$

quadratische Formen der ξ_α, η_α, ζ_α. Aus ihnen gehen durch Integration über alle Punkte des Körpers Momente hervor, die nach dem *d'Alembert*schen Prinzip den Drehmomenten der äusseren Kräfte Λ, M, N gleich sind. Jetzt nehme man an, dass zur Zeit t das System der ξ, η, ζ mit den im Körper festen Hauptaxen von O, also den x, y, z, zusammenfalle und ersetze dem entsprechend ξ, η, ζ; $\pi, \varkappa, \varrho$; Λ, M, N durch x, y, z; p, q, r; L, M, N. Da nun:

$$\int (y^2 + z^2) dm = A, \quad \int (z^2 + x^2) dm = B, \quad \int (x^2 + y^2) dm = C,$$
$$\int yz\, dm = 0, \quad \int zx\, dm = 0, \quad \int xy\, dm = 0$$

ist, so ergeben sich für L, M, N die Werte

$$A\dot{p} + (C - B)qr, \quad B\dot{q} + (A - C)rp, \quad C\dot{r} + (B - C)pq$$

und damit hat man die *Euler*schen *Gleichungen* erhalten.

Nach einer Bemerkung von *P. Saint-Guilhem*[413]) gelangt man kürzer zum Ziel, wenn man davon ausgeht, dass zwischen den Komponenten des Drehimpulses Λ, M, N nach den im Raume festen Axen und den Komponenten $L_1 = Ap$, $M_1 = Bq$, $N_1 = Cr$ nach den im Körper festen Hauptaxen die Gleichungen bestehen:

$$(4) \quad \begin{cases} \Lambda_1 = Apa_1 + Bqa_2 + Cra_3, \\ M_1 = Apb_1 + Bqb_2 + Crb_3, \\ N_1 = Apc_1 + Bqc_2 + Crc_3. \end{cases}$$

Nach dem Impulssatze gelten nun die Gleichungen

$$(5) \quad \frac{d\Lambda_1}{dt} = \Lambda, \quad \frac{dM_1}{dt} = M, \quad \frac{dN_1}{dt} = N,$$

in denen Λ, M, N die Komponenten des resultierenden Momentes der äusseren Kräfte bezeichnen. Auf den linken Seiten möge man die Werte der Λ_1, M_1, N_1 aus (4) einsetzen und die Differentiation ausführen. Jetzt lasse man die Hauptaxen mit den im Raume festen Axen zusammenfallen. Dann wird

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0.$$

Ferner ist nach den Formeln Nr. 28c, Gl. 4) für die Ableitungen der

413) J. de math. (1) 19 (1854), p. 363; benutzt von *Ch. Sturm*, Mécanique, 3e éd. Paris 1875, p. 250. Vgl. auch *D. Chelini*, Bologna Mem. 10 (1860) und *Ph. Gilbert*, Bruxelles Soc. scientif. Ann. 2B (1878), p. 287.

Richtungscosinus nach der Zeit:

$$\dot{a}_1 = 0, \quad \dot{a}_2 = -r, \quad \dot{a}_3 = +p,$$

und es entsteht daher aus der ersten der Gleichungen (5) die erste Eulersche Gleichung

$$A\dot{p} + (C - B)qr = L$$

u. s. w.

Euler selbst scheint Bedenken gegen sein Verfahren gehegt zu haben; denn er rechtfertigt den Übergang von den im Raume festen Axen zu den im Körper festen Hauptaxen mit den Worten *differentiatione rite instituta*[414]). In der Tat könnte man dagegen einwerfen, dass bei der Identifizierung von ξ, η, ζ mit x, y, z die Geschwindigkeiten $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ nicht in die Geschwindigkeiten $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ übergehen, die ja gleich Null sind. *Eulers* Verfahren, auf *beliebige* im Raume bewegliche Axen angewandt, würde in der Tat zu falschen Ergebnissen führen, vgl. Abschnitt 5 dieser Nummer. Dass *Euler* trotzdem zu richtigen Gleichungen gelangt ist, beruht auf dem Umstande, dass bei den im Körper festen Axen nicht nur die π, $\varkappa$, ϱ in p, q, r übergehen, sondern auch die $\dot{\pi}$, $\dot{\varkappa}$, $\dot{\varrho}$ in $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$; die Gleichungen $\dot{\pi} = \dot{p}$, $\dot{\varkappa} = \dot{q}$, $\dot{\varrho} = \dot{r}$ besagen nämlich, dass zur Zeit t der Herpolhodiekegel den Polhodiekegel und gleichzeitig die Herpolhodiekurve die Polhodiekurve *berührt*.

Bald darauf hat *Euler* einen zweiten einwandfreien Beweis geliefert[415]). Mittels des d'Alembertschen Prinzips stellt er nämlich die Differentialgleichungen auf, denen die drei Eulerschen Winkel ϑ, ψ, φ genügen. Alsdann setzt er

$$(6) \qquad \begin{cases} \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi = p, \\ \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi = q, \\ \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi} \qquad\qquad\quad = r, \end{cases}$$

und zeigt durch eine umständliche Rechnung, dass jene drei Differentialgleichungen für ϑ, ψ, φ bei Einführung der „*Abkürzungen*" p, q, r den Eulerschen Gleichungen äquivalent sind; dass die p, q, r die Komponenten der *Drehgeschwindigkeit* $\mathfrak{w}$ sind, wird erst nachträglich herausgebracht.

2) *J. L. Lagrange*[416]) bewies (1788) in wenigen Zeilen, was

414) Theoria motus, § 792; Ausgabe von *J. Ph. Wolfers*, p. 429.

415) Berlin Mém. année 1760 (1767), p. 176.

416) Mécanique analytique, 1. éd. Paris 1788, p. 380; Ausgabe von *J. Bertrand* 2, p. 205, 228. Vgl. auch *E. J. Routh*, Dynamik 1, p. 365; *P. Appell*, Mécanique 2, p. 314; *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, p. 154; *L. Boltzmann*, Prinzipe 2, p. 60.

Euler mühsam errechnet hatte. Mittels der kinematischen Gleichungen (6) lässt sich die lebendige Kraft des starren Körpers

$$T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

durch ϑ, ψ, φ; $\dot\vartheta$, $\dot\psi$, $\dot\varphi$ ausdrücken; es ist jedoch gar nicht erforderlich, diese Funktion von ϑ, ψ, φ; $\dot\vartheta$, $\dot\psi$, $\dot\varphi$ wirklich herzustellen. Der Ausdruck der virtuellen Arbeit sei

$$\delta W = \Theta\delta\vartheta + \Psi\delta\psi + \Phi\delta\varphi.$$

Dann lautet die dritte der Differentialgleichungen der Bewegung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = \Phi.$$

Es ist aber:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \frac{\partial T}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial\dot\varphi} = Cr,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = \frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial\varphi} = (A - B)pq,$$

folglich hat man

$$C\dot r + (B - A)pq = \Phi.$$

Nun bedeutet aber $\delta\varphi$ eine elementare Drehung um die z-Axe, mithin ist

$$\Phi = \sum(x_\alpha Y_\alpha - y_\alpha X_\alpha) = N.$$

Durch zyklische Vertauschung der Buchstaben ergeben sich hieraus die beiden anderen Eulerschen Gleichungen.

Da die Winkel ϑ, ψ, φ in den Eulerschen Gleichungen nur insofern vorkommen, als sie implizite in L, M, N enthalten sind, so wird man wünschen, dass bei der Herleitung dieser Gleichungen jene Winkel ebenfalls nicht auftreten. Um dieses zu erreichen, liegt es nahe:

$$(7) \qquad p\delta t = \delta\lambda, \quad q\delta t = \delta\mu, \quad r\delta t = \delta\nu$$

zu setzen und die Lagrangesche Methode auf die Koordinaten λ, μ, ν anzuwenden. Man erkennt jedoch sofort, dass dieses Verfahren zu der falschen Gleichung $C\dot r = N$ führen würde. Der Grund hierfür liegt darin, dass $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ keine exakten Differentiale von Funktionen der Veränderlichen ϑ, ψ, φ sind, und dass daher im besonderen die Gleichungen

$$d\delta\lambda = \delta d\lambda, \quad d\delta\mu = \delta d\mu, \quad d\delta\nu = \delta d\nu,$$

die bei der Herleitung jenes Verfahrens vorausgesetzt werden, nicht erfüllt sind. In einem der nachgelassenen Fragmente, die der zweiten Auflage der Mécanique analytique beigefügt sind, hat *Lagrange* angedeutet, wie man trotzdem mittels der sogenannten *Transitivitäts-*

gleichungen

$$\delta d\lambda - d\delta\lambda = d\mu\delta\nu - d\nu\delta\mu,$$
$$\delta d\mu - d\delta\mu = d\nu\delta\lambda - d\lambda\delta\nu,$$
$$\delta d\nu - d\delta\nu = d\lambda\delta\mu - d\mu\delta\lambda$$

zum Ziele kommen kann[417]). In engem Zusammenhange mit diesem Ansatze von *Lagrange* stehen Untersuchungen, die neuerdings *P. Appell* über die Herleitung der Differentialgleichungen der Bewegung bei ganz allgemeinen Annahmen über die vorkommenden Variationen angestellt hat und die ihn zu dem Begriffe der *Beschleunigungsenergie* geführt haben; *P. Appell* hat auch im besonderen gezeigt, wie man auf diesem Wege zu den Eulerschen Gleichungen gelangt[418]).

3) *S. D. Poisson*[419]) hat 1811 einen elementaren Beweis für die Eulerschen Gleichungen gegeben, bei dem die Winkel ϑ, ψ, φ nicht auftreten.

Die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ nach den im Körper festen Axen der x, y, z sind:

$$(8)\qquad u_\alpha = qz_\alpha - ry_\alpha,\quad v_\alpha = rx_\alpha - pz_\alpha,\quad w_\alpha = py_\alpha - qx_\alpha,$$

folglich sind die Komponenten nach den im Raum festen Axen der ξ, η, ζ:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dot\xi_\alpha = a_1(qz_\alpha - ry_\alpha) + a_2(rx_\alpha - pz_\alpha) + a_3(py_\alpha - qx_\alpha), \\ \dot\eta_\alpha = b_1(qz_\alpha - ry_\alpha) + b_2(rx_\alpha - pz_\alpha) + b_3(py_\alpha - qx_\alpha), \\ \dot\zeta_\alpha = c_1(qz_\alpha - ry_\alpha) + c_2(rx_\alpha - pz_\alpha) + c_3(py_\alpha - qx_\alpha). \end{cases}$$

Durch Differentiation findet man hieraus die Werte der Beschleunigungen $\ddot\xi_\alpha$, $\ddot\eta_\alpha$, $\ddot\zeta_\alpha$; dabei sind die x_α, y_α, z_α als konstant anzusehen. Werden die so gewonnenen Werte von $\ddot\xi_\alpha$, $\ddot\eta_\alpha$, $\ddot\zeta_\alpha$ in die Ausdrücke

$$a_1\ddot\xi_\alpha + b_1\ddot\eta_\alpha + c_1\ddot\zeta_\alpha,\quad a_2\ddot\xi_\alpha + b_2\ddot\eta_\alpha + c_2\ddot\zeta_\alpha,\quad a_3\ddot\xi_\alpha + b_3\ddot\eta_\alpha + c_3\ddot\zeta_\alpha$$

für die Komponenten der Beschleunigung von P_α nach den Axen der x, y, z eingesetzt und für die Ableitungen der Richtungscosinus die Gleichungen Nr. 28c (4):

$$(10)\qquad \dot a_1 = a_2 r - a_3 q,\quad \cdots,\quad \dot c_3 = c_1 q - c_2 p$$

benutzt, so werden diese Komponenten der Beschleunigung beziehungs-

417) Mécanique analytique, Ausgabe von *J. Bertrand* 2, p. 200, 375; vgl. auch *G. Kirchhoff*, Mechanik, 6. Vorl., § 2; *K. Heun*, Arch. Math. Phys. (3) 2 (1902), p. 298, Nr. 17, von dem der Ausdruck *Transitivitätsgleichungen* herrührt, und *G. Hamel*, Zeitschr. Math. Phys. 50 (1904), p. 1.

418) Mécanique 2, p. 374—380; vgl. auch Anmerkung 451.

419) Mécanique, 1e éd. 2, p. 136, Paris 1811.

weise gleich:

$$\begin{aligned}
&z_a\dot{q} - y_a\dot{r} + (pz_a - rx_a)r + (py_a - qx_a)q,\\
&x_a\dot{r} - z_a\dot{p} + (qx_a - py_a)p + (qz_a - ry_a)r,\\
&y_a\dot{p} - x_a\dot{q} + (ry_a - qz_a)q + (rx_a - pz_a)p,
\end{aligned}$$

und man braucht jetzt nur das d'Alembertsche Prinzip auf die Drehmomente nach den im Körper festen Axen anzuwenden, um sofort die Eulerschen Gleichungen zu erhalten.

Nach einer Bemerkung von *T. Levi-Civita*[420]) lassen sich die Rechnungen erheblich abkürzen, wenn man von den Impulsgleichungen (5) ausgeht und bei der Differentiation nach t die Gleichungen (10) benutzt. Ebenso wie bei der Umgestaltung des ersten *Euler*schen Beweises durch *P. Saint-Guilhem* erkennt man auch hier, daß die Betrachtungen umständlich ausfallen, wenn man von der *Drehaxe* ausgeht, sich dagegen erheblich vereinfachen, sobald der Begriff des *Impulses* zu Grunde gelegt wird.

4) *L. Poinsot* (1834) hat einen ganz anderen Weg eingeschlagen und durch die Einführung *fiktiver Zentrifugalkräfte* ein anschauliches Verständnis der Eulerschen Gleichungen zu vermitteln gesucht[421]). Der Gedanke, der ihn leitete, lässt sich am einfachsten darlegen, wenn man sich der vektoriellen Schreibweise bedient[422]). Wenn der Vektor des Drehimpulses mit den Komponenten Ap, Bq, Cr durch $\mathfrak{D}$, der Vektor des Momentes der äusseren Kräfte mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet wird, so lassen sich die drei Eulerschen Gleichungen in die eine Vektorgleichung zusammenfassen:

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = [\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{w}] + \mathfrak{M}. \tag{11}$$

Das Vektorprodukt aus $\mathfrak{D}$ und der instantanen Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$, das auf der rechten Seite steht, lässt sich deuten, indem man sich denkt, dass die instantane Drehaxe im Körper fest sei und dieser um sie mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ rotiere. An jedem Massenpunkte P_a des starren Körpers wird dann eine Zentrifugalkraft angreifen, und alle diese Zentrifugalkräfte haben hinsichtlich des festen Punktes O ein resultierendes Moment, dessen Vektor genau gleich $[\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{w}]$ ist. Da jedoch bei der wirklichen Bewegung des starren Körpers die instantane Drehaxe ihre Lage im Körper beständig

420) Meccanica, p. 388.

421) J. de math. (1) 16 (1851), p. 44.

422) Vgl. *P. G. Tait*, Edinburgh Royal Soc. Trans. 25 (1869), p. 279; *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, p. 142; *F. Jung*, Arch. Math. Phys. (3) 6 (1903), p. 206.

ändert, so hat *Poinsot* für diese Zentrifugalkräfte den Namen *fiktive Zentrifugalkräfte* vorgeschlagen.

Dass *Poinsot* seine Interpretation als eine Art von Axiom hingestellt hat, auf Grund dessen man umgekehrt die *Euler*schen Gleichungen ableiten könne, ist mit Recht beanstandet worden[423]).

5) *P. Saint-Guilhem* hat in demselben Bande des Liouvilleschen Journals vom Jahre 1851, das den Wiederabdruck von *Poinsots* Théorie nouvelle de la rotation des corps von dem Jahre 1834 enthält, eine Deutung der Eulerschen Gleichungen gegeben, die im Gegensatze zu *Poinsots kinetischer* Interpretation durch fiktive Zentrifugalkräfte als eine *kinematische* Interpretation durch relative Bewegungen bezeichnet werden könnte[424]). Den Impulssatz für die Momente spricht *Saint-Guilhem* in der Form aus, dass der Vektor des Momentes der äusseren Kräfte gleich der vektoriell aufgefassten absoluten Geschwindigkeit ist, die dem Endpunkte des Vektors des Impulsmomentes zukommt, wenn er von dem festen Punkte aus abgetragen wird. Diese absolute Geschwindigkeit aber zerlegt er in zwei Komponenten; die erste ist die vektoriell aufgefasste absolute Geschwindigkeit des Punktes des starren Körpers, der mit dem Endpunkte des Impulsvektors zusammenfällt, die zweite die vektoriell aufgefasste relative Geschwindigkeit des Endpunktes gegen den starren Körper. Zerlegt man diese beiden Komponenten nach den im Körper festen Axen der x, y, z, so findet man dafür beziehungsweise $\frac{dL_1}{dt}, \frac{dM_1}{dt}, \frac{dN_1}{dt}$ und $N_1q - M_1r$, $L_1r - N_1p$, $M_1p - L_1q$ und hat daher genau wie in Nr. 29a, Gl. 6 die Gleichungen:

$$
(12) \qquad \begin{cases} L = \frac{dL_1}{dt} + N_1q - M_1r, \\ M = \frac{dM_1}{dt} + L_1r - N_1p, \\ N = \frac{dN_1}{dt} + M_1p - L_1q, \end{cases}
$$

die bei der Annahme, dass die x, y, z Hauptaxen sind, in die *Euler*schen Gleichungen übergehen. Daneben legt *Saint-Guilhem* freilich grossen Wert darauf, zu zeigen, dass jene beiden Komponenten auch den von *Poinsot* gefundenen kinetischen Sinn haben. Erst in einer zweiten Abhandlung, die er, „um einige Dunkelheiten aufzuklären", im Jahre

423) Für die Kritik der *Poinsot*schen Ableitung vgl. *J. Bertrand*, Nouv. ann. (1) 15 (1856), p. 187; *Ph. Gilbert*, Bruxelles Soc. scientif. Ann. 2 B (1878), p. 287; *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, p. 145.

424) Théorie nouvelle, Paris 1834 = J. de math. (1) 16 (1851), p. 347.

1854 folgen liess[425]), spricht er es ausdrücklich aus, dass jene *kinetischen* Betrachtungen für die *Ableitung* der *Euler*schen Gleichungen *nicht* in Betracht kommen, dass vielmehr diese Gleichungen lediglich die *kinematische* Tatsache ausdrücken, dass *die vektoriell aufgefasste absolute Geschwindigkeit des Endpunktes des Impulsvektors die geometrische Summe der relativen Geschwindigkeit und der Fortführungs-Geschwindigkeit in bezug auf den starren Körper ist.*

Saint-Guilhems Herleitung, die an Einfachheit und Durchsichtigkeit wohl das Höchste leistet, wurde sofort von *Ch. Delaunay* in den Traité de mécanique, Paris 1856 aufgenommen, jedoch ohne Nennung des Namens. Sie findet sich ebenso in dem Lehrbuch der Mechanik von *Ch. Despeyrous*, Paris 1886 (2, p. 228)[426]), und auch *P. Appell* hat sie bereits in der ersten Auflage seiner *Mécanique* 2, Paris 1896, p. 192 benutzt.

Zu derselben Herleitung der *Euler*schen Gleichungen ist im Jahre 1856 *H. B. Hayward* gelangt[427]), und *J. Clerk Maxwell* hat bald darauf nachdrücklich auf ihre Wichtigkeit hingewiesen[428]); auch *E. J. Routh* hat in seiner Dynamik (1860) auf *Hayward* Bezug genommen[429]). Aus diesen englischen Quellen hat dann *F. Klein* die kinematische Herleitung der *Euler*schen Gleichungen kennen gelernt[430]), während ihm die Abhandlungen *Saint-Guilhems* und die anschliessende französische Literatur entgangen waren.

Ein grosser Vorzug der Herleitung von *Saint-Guilhem* besteht auch darin, dass sie sich sofort auf den Fall ganz beliebiger Axen übertragen lässt. Hat man nämlich irgend ein Koordinatensystem der x^*, y^*, z^*, das weder im Raume noch im starren Körper fest ist, so braucht man nur die Geschwindigkeit des Endpunktes des Impulsvektors als die geometrische Summe der relativen Geschwindigkeit und der Fort-

425) J. de math. (1) 19 (1854), p. 346; vgl. auch Toulouse Mém. (4) 5 (1855), p. 338 = Nouv. ann. (1) 15 (1856), p. 63; siehe auch die Zitate von *Ph. Gilbert*, Bruxelles Soc. scientif. Ann. 2 B (1878), p. 266.

426) Vgl. auch die Abhandlung von *Ch. Despeyrous*, Toulouse Fac. Mém. (8) 3 (1881), p. 145.

427) Cambridge Phil. Soc. Trans. 10^1 (1858), p. 1; die Abhandlung ist datiert vom 19. Februar 1856.

428) Edinburgh Royal Soc. Trans. 21^4 (1857) = Scientif. Papers, Cambridge 1890, 1, p. 248.

429) Dynamik 2, p. 4; vgl. auch *G. Schouten*, Nieuw Archief (2) 5 (1901), p. 86; *C. Barus*, Science (2) 13 (1901), p. 914; *A. G. Greenhill*, Science (2) 14 (1901), p. 973.

430) *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, Heft 1, Leipzig 1897, p. 113, 142.

führungsgeschwindigkeit des Koordinatensystems der x^*, y^*, z^* darzustellen, um die zugehörigen Differentialgleichungen für die Komponenten p^*, q^*, r^* der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ zu erhalten[431]). Zu diesen Gleichungen kommen dann selbstverständlich noch die *kinematischen Gleichungen*, die angeben, wie die p^*, q^*, r^* von den drei Lagekoordinaten des Körpers und deren Ableitungen nach der Zeit abhängen. Solche im Raum und im Körper bewegliche Koordinatenaxen hat man im besonderen bei dem Studium der Präzessions- und Nutationserscheinungen und auch bei dem Rollen von schweren Umdrehungskörpern auf einer Ebene angewandt; vergl. Nr. 35 und 38 dieses Artikels.

31. Reibung. Gebundene Bewegungen; nichtholonome Bedingungen.

Von den gebundenen Bewegungen eines starren Körpers hat vor allem die Kreiselung um einen festen Punkt wegen der Schönheit des analytischen Ansatzes und der Wichtigkeit für praktische Anwendungen Interesse erregt. Daneben hat man aber auch andere *gebundene Bewegungen* der mannigfaltigsten Art betrachtet. Während die *elementaren* Bewegungen eines starren Körpers in erschöpfender Weise untersucht worden sind, soweit dafür die linearen Glieder massgebend sind (vgl. Nr. 28 dieses Artikels), steht eine systematische Behandlung der *endlichen* Bewegungen allerdings noch aus; schon eine geordnete Zusammenstellung der sehr zerstreuten Literatur würde hier eine verdienstliche Arbeit sein. Das gilt sogar für die einfachste Annahme über den Zwang, die man nach der Annahme eines im Körper festen Punktes machen kann, dass nämlich der starre Körper K eine *Kontakt-* oder *Berührungsbewegung* ausführt, das heisst, dass er bei seiner Bewegung beständig mit einem zweiten starren Körper, der ruht oder sich in bekannter Weise bewegt, der *Unterlage* K^*, in Berührung bleibt[432]). Eine solche Berührung kann in Punkten, Kurven und

431) Vgl. etwa *G. M. Slesser*, Quart. J. of math. 4 (1861), p. 65; *H. Resal*, Paris C. R. 73 (1871), p. 1160; 74 (1872), p. 10; Traité de mécanique générale 1, Paris 1873, p. 247; *E. J. Routh*, Dynamik 1, p. 224; 2, p. 1; *P. Appell*, Mécanique 2, p. 152, 243, Roulements, p. 12; *A. G. Webster*, Dynamics, p. 260, 299.

432) Das grosse Lehrbuch von *G. Koenigs*, Leçons de cinématique, Paris 1897 und auch der Artikel IV 3 (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*) bringen nur sehr wenig über die Berührungsbewegungen. Dass diesen auch für die Geometrie selbst erhebliche Bedeutung zukommt, zeigen die Ausführungen von *G. Darboux* über das Rollen von krummen Flächen, Leçons sur la théorie des surfaces 4, Paris 1896, livre VIII, chap. 6 und 7; vgl. auch *E. Beltrami*, Giorn. di mat. 11 (1873), p. 98 = Opere matematiche 2, p. 410.

Flächenstücken stattfinden; auch können mehrere, ja unendlich viele dieser Möglichkeiten gleichzeitig oder nach einander eintreten.

Im Folgenden werde der Einfachheit wegen vorausgesetzt, dass die Berührung nur in einem einzigen Punkte P stattfindet und die Oberflächen der beiden Körper in P eine gemeinsame Tangentialebene E besitzen; ein Teil der dabei gewonnenen Sätze lässt sich auf die verwickelteren Fälle übertragen.

Die *relative* Geschwindigkeit der Punkte von K gegen K^* erhält man folgendermassen. Der Körper K besitzt relativ zu K^* 1) eine *Translationsgeschwindigkeit* v_T, die *Gleitgeschwindigkeit*, die gleich der relativen Geschwindigkeit von P ist; der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_T$ liegt in der gemeinsamen Tangentialebene E; 2) eine *instantane Drehung* $\mathfrak{w}$ *mit der Winkelgeschwindigkeit* ω *um eine durch* P *gehende Axe*, die man in eine Komponente $\mathfrak{w}_E$ nach der Ebene E und eine Komponente $\mathfrak{w}_N$ senkrecht dazu zerlegt; diese heisst die *Bohrgeschwindigkeit*, jene die *Rollgeschwindigkeit* von K. Je nachdem nur eine der Geschwindigkeiten v_T, $\mathfrak{w}_E$, $\mathfrak{w}_N$ von Null verschieden ist, wird die Bewegung ein reines *Gleiten* (glissement), reines *Rollen* (roulement), reines *Bohren* (pivotement) genannt; in manchen Fällen aber wird unter Rollbewegung auch eine solche Bewegung verstanden, bei der kein Gleiten stattfindet[483]).

Die d'Alembertsche Reaktion $\mathfrak{R}$ steht in P auf E senkrecht. Ausserdem muss sie den Körper K an die Unterlage K^* andrücken. Wenn das nicht der Fall ist, hört der Körper auf, die Unterlage zu berühren und setzt seine Bewegung zunächst so fort, als ob die Unterlage nicht vorhanden wäre; es gelten dann ähnliche Betrachtungen, wie sie bei der Bewegung eines materiellen Punktes auf einer krummen Fläche, Nr. **15**, p. 503 dieses Artikels, angestellt worden sind. Diese Bemerkung ist besonders dann von Wichtigkeit, wenn man analytisch gegebene Bedingungen mechanisch zu realisieren versucht, vgl. Nr **35**b 6) dieses Artikels.

31a. Reibung. Um den Verlauf der gebundenen Bewegung eines starren Körpers zu ermitteln, genügt es im Allgemeinen nicht, allein die d'Alembertschen Reaktionen zu berücksichtigen, vielmehr ist die Reibung zwischen dem bewegten Körpen und den Körpern, mit denen er in Berührung steht, von Bedeutung, ja eine Durchführung der Rechnungen ohne Berücksichtigung der Reibung vermag fast überall nicht einmal eine erste Annäherung an den wirklichen Hergang zu geben. So kommt es, dass man schon früh gerade bei

483) Vgl. etwa die Darstellung bei *P. Appell*, Mécanique 1, p. 68.

den Problemen des Gleitens, Rollens, Bohrens der d'Alembertschen Reaktionskraft $\mathfrak{R}$, die in P auf E senkrecht steht, *Reibungskräfte* hinzugefügt hat. Man pflegt diese Reibungskräfte auf Grund der sogenannten Coulombschen Gesetze anzusetzen (vgl. Nr. 6 dieses Artikels). Jedoch ist nicht zu vergessen, dass man in der Praxis zur Verringerung der Reibung meistens *Schmiermittel* anwendet; für die wesentlichen Änderungen, die alsdann eintreten, vgl. IV 10 (*K. Heun*).

Über die *gleitende Reibung* im Sinne der sogenannten Coulombschen Gesetze ist bereits in Nr. 6 dieses Artikels berichtet worden. Je nachdem die Gleitgeschwindigkeit v_T gleich Null oder von Null verschieden ist, unterscheidet man *statische* und *kinetische* Reibung. Die kinetische gleitende Reibung F ist eine Einzelkraft, die in E liegt und in P angreift; sie ist dem Vektor $\mathfrak{v}_T$ entgegengerichtet. Ihre Intensität F wird als proportional der Intensität R der Reaktion $\mathfrak{R}$ angenommen, sie ist also gleich $f \cdot R$; die Konstante f heisst der Reibungskoeffizient.

Dem Rollen widersetzt sich die *rollende Reibung*, ein Kräftepaar, dessen Axe in E liegt und die Richtung der Komponente $\mathfrak{w}_E$ hat[434]). Die Grösse des Momentes dieses Paares wird im Coulombschen Sinne ebenfalls proportional R angesetzt, aber mit einem erheblich kleineren Proportionalitätsfaktor; falls gleichzeitig gleitende und rollende Reibung auftreten, pflegt man daher die rollende Reibung zu vernachlässigen. Wenn es darauf ankommt, die Reibungswiderstände zu vermindern, z. B. bei der Bewegung von Axen in Lagern, sucht man, wegen der Kleinheit der rollenden Reibung, die gleitende Bewegung in eine rollende zu verwandeln (Kugellager).

Endlich stellt sich dem Bohren die *bohrende Reibung* entgegen; sie ist im Coulombschen Sinne ein Kräftepaar, dessen Axe in den Vektor der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_N$ fällt und dessen Intensität wieder proportional R sein soll[435]).

Scheinbar geringfügige Nebenumstände, etwa kleine Unregelmässigkeiten in der Oberfläche der Unterlage, können jedoch die Reibungserscheinungen stark beeinflussen; hierher gehört z. B. das sogenannte *Einwurzeln* eines Spielkreisels[436]). Über die Kritik, die neuerdings *P. Painlevé* nach mathematischer wie nach physikalischer

434) *G. W. Leibniz*, Berlin Miscellanea 1 (1710), p. 315; vgl. *E. Gerland*, Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts, Leipzig 1906, p. 115.

435) Über die bohrende Reibung giebt es eine Monographie von *H. Léauté*, Thèse, Paris 1876; vgl. auch *L. Lecornu*, Paris, C. R. 138 (1904), p. 554.

436) Siehe etwa *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, p. 620.

Richtung an der sogenannten Coulombschen Theorie der Reibung geübt hat, vgl. Nr. **6** und **38** dieses Artikels.

Bei der Untersuchung der gebundenen Bewegung mit Reibung hat man zu beachten, dass die Reibungswiderstände immer nur hemmend wirken und die Geschwindigkeit der Bewegung, der sie sich entgegenstellen, höchstens vernichten, aber niemals umkehren können[437]. Es kann daher zum Beispiel sehr wohl eintreten, dass eine Berührungsbewegung, bei der Anfangs Gleiten stattfand, sich in eine rollend-bohrende Bewegung verwandelt und umgekehrt (vgl. Nr. **38** dieses Artikels). Wenn jedoch der Reibungskoeffizient f sehr gross ist, wird unter normalen Umständen kein Gleiten eintreten können; von hier aus ist es zu verstehen, dass man sagt, für unendlich grosses f trete immer eine rollend-bohrende Bewegung ein. Die Unterlage heisst alsdann *vollkommen rauh*, während sie in dem idealen Fall, dass $f = 0$ ist, *vollkommen glatt* genannt wird[438]. Zu beachten ist jedoch, dass die Begriffe *glatt* und *rauh* nur relative Bedeutung haben; eine Unterlage K^* kann also etwa in bezug auf einen gewissen Körper K_1 als vollkommen rauh, aber in bezug auf einen gewissen Körper K_2 als vollkommen glatt angesehen werden.

31b. Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung für einen starren Körper auf einer Unterlage. Der Einfachheit halber werde angenommen, dass die Unterlage im Raume fest sei. Der Anfangspunkt der im Raume festen Koordinaten ξ, η, ζ sei irgend ein Punkt Ω, der Anfangspunkt der im Körper K festen Koordinaten sein Schwerpunkt S. Zwischen den beiden Arten von Koordinaten bestehen dann die Gleichungen:

$$\xi = \xi_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z,$$
$$\eta = \eta_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z,$$
$$\zeta = \zeta_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z.$$

Wenn also die Koordinaten des gemeinsamen Punktes P durch den Index 1 ausgezeichnet werden, hat man die Relationen:

---

437) Diese Bemerkung gilt indessen nur für Unterlagen, die fest sind oder sich nach einem gegebenen Gesetze bewegen. Ganz anders verhält es sich, wenn Körper und Unterlage zusammen ein *zweigliedriges System* bilden; denn in diesem Falle kann gerade durch die Reibung Energie von einem der beiden Körper auf den anderen übertragen werden und *die Reibung wirkt jetzt bewegungsfördernd* (Reibungskoppelung); vgl. IV 10 (*K. Heun*).

438) Für die Reibung überhaupt vgl. noch die Darstellungen bei *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, Kapitel VII und *P. Appell*, Mécanique 1, p. 287 und 2, p. 105.

$$(1) \qquad \xi_1 = \xi_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 z_1,$$
$$(2) \qquad \eta_1 = \eta_0 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 z_1,$$
$$(3) \qquad \zeta_1 = \zeta_0 + c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3 z_1.$$

Die Oberfläche der Unterlage habe die Gleichung $\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$, die Oberfläche des Körpers dagegen werde durch die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ dargestellt. Mithin ist:

$$(4) \qquad \Phi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 0,$$
$$(5) \qquad F(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Die Normale $\mathfrak{N}$ der Unterlage im Punkte P habe die Richtungskosinus α, β, γ; diese sind als bekannte Funktionen der Koordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 anzusehen. Hieraus ergeben sich die Richtungscosinus von $\mathfrak{N}$ nach den Axen der x, y, z vermöge der Gleichungen:

$$\cos(\mathfrak{N}, x) = \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1,$$
$$\cos(\mathfrak{N}, y) = \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2,$$
$$\cos(\mathfrak{N}, z) = \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3,$$

und diese Richtungscosinus müssen wegen der Berührung der beiden Oberflächen in P mit den Richtungscosinus der Normale von K in P übereinstimmen. Man hat daher die beiden Gleichungen:

$$(6, 7) \qquad \cos(\mathfrak{N}, x) : \cos(\mathfrak{N}, y) : \cos(\mathfrak{N}, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 : \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 : \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1,$$

wo der Index 1 besagt, dass in die partiellen Ableitungen von $F(x, y, z)$ für x, y, z die Koordinaten x_1, y_1, z_1 von P einzusetzen sind.

Die so entwickelten sieben Gleichungen sollen als die *geometrischen Gleichungen* des Problems bezeichnet werden. In ihnen kommen ausser den Lagekoordinaten: ξ_0, η_0, ζ_0; ϑ, ψ, φ des starren Körpers K die unbekannten Koordinaten x_1, y_1, z_1; ξ_1, η_1, ζ_1 des Berührungspunktes P vor. Werden diese sechs Koordinaten eliminiert, so ergiebt sich eine Bedingungsgleichung zwischen den Lagekoordinaten von K, und man hat es daher mit einem System von *fünf Graden der Freiheit* zu tun.

Zu den sieben geometrischen Gleichungen treten zunächst die drei *kinematischen Gleichungen* (Nr. 28c, Gl. 5):

$$(8) \qquad p = \dot{\psi} \sin\vartheta \cos\varphi + \dot{\vartheta} \cos\varphi,$$
$$(9) \qquad q = \dot{\psi} \sin\vartheta \cos\varphi - \dot{\vartheta} \sin\varphi,$$
$$(10) \qquad r = \dot{\psi} \cos\vartheta + \dot{\varphi},$$

denen man jetzt die *kinetischen Gleichungen* hinzuzufügen hat. Das sind aber dieselben Gleichungen, wie bei einem freien starren Körper, vorausgesetzt, dass zu den äusseren Kräften noch die *d'Alembert*sche

Reaktion $\mathfrak{R}$ im Punkte P hinzugenommen wird; ausserdem sind den äusseren Kräften die Reibungswiderstände hinzuzurechnen. Die Reaktion $\mathfrak{R}$ liegt in der Normale $\mathfrak{N}$; damit die Körper K und K^* während des Zeitelementes dt in Berührung bleiben, muss die Reaktion das Bestreben haben, den Körper an die Unterlage anzudrücken.

Auf diese Art ergeben sich für die Bewegung des Schwerpunktes S des Körpers K die Gleichungen:

$$m\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = \Xi + R\alpha, \tag{11}$$

$$m\frac{d^2\eta_0}{dt^2} = \mathrm{H} + R\beta, \tag{12}$$

$$m\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} = \mathrm{Z} + R\gamma; \tag{13}$$

hierin bedeutet R die Intensität der Reaktion $\mathfrak{R}$. Ferner gelten für die relative Bewegung des Körpers K um seinen Schwerpunkt die *Euler*schen Gleichungen:

$$A\frac{dp}{dt} + (B - C)qr = L + R(z_1 \cos(\mathfrak{R}, y) - y_1 \cos(\mathfrak{R}, z)), \tag{14}$$

$$B\frac{dq}{dt} + (C - A)rp = M + R(x_1 \cos(\mathfrak{R}, z) - z_1 \cos(\mathfrak{R}, x)), \tag{15}$$

$$C\frac{dr}{dt} + (A - B)pq = N + R(y_1 \cos(\mathfrak{R}, x) - x_1 \cos(\mathfrak{R}, y)). \tag{16}$$

Auf diese Art hat man ebensoviele Gleichungen gefunden, als die Anzahl der Unbekannten beträgt[439]).

In manchen Fällen ist es vorteilhaft, statt der *Euler*schen Gleichungen die Differentialgleichungen für die Komponenten der instantanen Drehungsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ nach Axen zu nehmen, die gegen den Körper K beweglich sind; die kinematischen Gleichungen erleiden dann auch entsprechende Änderungen[440]). Diese Methode wird in Nr. 38 dieses Artikels an dem Beispiel des rollenden Reifens erläutert werden.

Wenn der Körper K in P eine Spitze hat, die beständig mit der

---

439) *S. D. Poisson*, Mécanique, 1. éd., 2, p. 178, Paris 1811. Die Reibung wird hier nicht berücksichtigt; das hat Poisson erst gethan Bull. de Férussac, 6 (1825), p. 165 und in der zweiten Auflage der Mécanique, Paris 1833, 2, p. 229. Vgl. auch *A. Cournot*, J. f. Math. 5 (1830), p. 133, 223; 8 (1832), p. 1, sowie die Darstellungen bei *F. Minding*, Mechanik, p. 325; *A. Amthor*, Diss. Leipzig 1869 und *C. Neumann*, Leipzig Ber. 1888, p. 22.

440) Bewegliche Axen finden sich schon bei *G. M. Slesser*, Quart. J. of math. 4 (1861), p. 65; vgl. auch *E. J. Routh*, Dynamik 2, Kap. 5, sowie *P. Appell*, Roulements, Paris 1899.

Unterlage in Berührung ist, wie das bei dem in Nr. 37 behandelten Spielkreisel der Fall ist, so sind die Koordinaten x_1, y_1 z_1 als konstant anzusehen. Die Gleichungen (5), (6, 7) kommen alsdann in Wegfall, während sonst alles beim Alten bleibt.

31 c. Nichtholonome Bedingungen. Bei der Bewegung eines starren Körpers auf einer Unterlage kann man von vornherein die Bedingung stellen, dass kein Gleiten stattfinden soll, dass also der Körper, im weiteren Sinne des Wortes, auf einer vollkommen rauhen Unterlage rollt. Damit die Geschwindigkeit des Berührungspunktes P verschwindet, müssen die beiden Gleichungen bestehen:

$$(17) \qquad \begin{cases} d\xi_0 + x_1 da_1 + y_1 da_2 + z_1 da_3 = 0, \\ d\eta_0 + x_1 db_1 + y_1 db_2 + z_1 db_3 = 0. \end{cases}$$

Hierin sind $da_1, \cdots, db_3$ lineare Differentialformen von $d\vartheta, d\psi, d\varphi$. Wenn man also $\xi_0, \eta_0, \vartheta, \psi, \varphi$ als die fünf unabhängigen Lagekoordinaten des rollenden starren Körpers ansieht, so wird seine *Beweglichkeit im Infinitesimalen* beschränkt durch zwei Bedingungsgleichungen der Form

$$(18) \qquad \begin{cases} F_1 \equiv d\xi_0 + \Theta_1 d\vartheta + \Psi_1 d\psi + \Phi_1 d\varphi = 0, \\ F_2 \equiv d\eta_0 + \Theta_2 d\vartheta + \Psi_2 d\psi + \Phi_2 d\varphi = 0, \end{cases}$$

in denen $\Theta_1, \cdots, \Phi_2$ Funktionen von $\xi_0, \eta_0, \vartheta, \psi, \varphi$ sind. Dass trotzdem die Rollbewegung fünf Grade der Freiheit hat, erklärt sich dadurch, dass die Differentialformen F_1 und F_2 nicht integrabel sind und auch nicht durch Verbindung mit einander eine integrable Form ergeben, dass also aus ihnen keine *endliche Gleichung* zwischen den fünf Lagekoordinaten hergeleitet werden kann. Im Sinne von *H. Hertz* hat man es daher beim Rollen eines starren Körpers mit *nichtholonomen Bedingungen* zu tun[441]), und es gelten auch hier die Betrachtungen, die in Nr. 16 dieses Artikels für nichtholonome Punktbewegungen angestellt worden sind.

Wenn zwischen den Lagekoordinaten endliche Gleichungen bestehen, pflegt man, um die Reaktionen zu eliminieren, die Anzahl der Koordinaten auf das Minimum zu reduzieren, und erhält zur Bestimmung der Bewegung nach der in Nr. 7 dieses Artikels auseinandergesetzten Methode die betreffenden *Lagrange*schen Differentialgleichungen. Eine solche Reduktion ist im Falle der Rollbewegungen nicht möglich. Die Mittel zur Überwindung der hierin liegenden Schwierig-

441) Mechanik, Leipzig 1894, p. 91, 96; *Hertz* ist gerade durch die Betrachtung von Rollbewegungen auf die Unterscheidung holonomer und nichtholonomer Systeme geführt worden.

keit lagen jedoch schon seit 1788 bereit, da das Verfahren der *Euler-Lagrange*schen Multiplikatoren auch bei nichtholonomen Bedingungsgleichungen zum Ziele führt[442]). Werden nämlich die fünf Lagekoordinaten der Kürze wegen durch $q_1, q_2, \cdots, q_5$ bezeichnet, so hat man nur mit ihnen die Ausdrücke der lebendigen Kraft T und der virtuellen Arbeit δW zu bilden. Es sei also

$$\delta W = \sum_{\varkappa} Q_{\varkappa} \delta q_{\varkappa},$$

und die Bedingungsgleichungen mögen lauten

$$\sum A_{\varkappa} \delta q_{\varkappa} = 0, \quad \sum B_{\varkappa} \delta q_{\varkappa} = 0.$$

Alsdann ergeben sich die *Lagrange*schen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varkappa}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\varkappa}} = Q_{\varkappa} + \lambda A_{\varkappa} + \mu B_{\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots, 5), \tag{19}$$

in denen λ und μ Multiplikatoren bedeuten. Zu diesen fünf Gleichungen treten noch die beiden Gleichungen

$$\sum A_{\varkappa} \dot{q}_{\varkappa} = 0, \quad \sum B_{\varkappa} \dot{q}_{\varkappa} = 0, \tag{20}$$

so dass man sieben Gleichungen zur Bestimmung der sieben Unbekannten $q_1, \cdots, q_5$; λ, μ hat[443]).

Anstatt diesen von *Lagrange* gebahnten Weg einzuschlagen, haben einige Autoren irrtümlicher Weise die Gleichungen (20) benutzt, um aus dem Ausdrucke der lebendigen Kraft T zwei der Geschwindigkeitskomponenten, etwa $\dot{q}_4$ und $\dot{q}_5$, zu eliminieren und aus dem *umgestalteten* Ausdruck der lebendigen Kraft T^* die zugehörigen *Lagrange*schen Differentialgleichungen abzuleiten; dabei wirkte der verführende Um-

---

442) In der Mécanique analytique, Paris 1788, p. 46 = Oeuvres 11, p. 78 sagt *J. L. Lagrange* sogar: „en général nous représenterons par $dL = 0$, $dM = 0$, ... les équations de condition entre ces différentielles, soit que ces équations soient elles-mêmes des différences exactes ou non, pourvu que les différentielles n'y soient que linéaires". An anderen Stellen freilich, z. B. Mécanique, p. 227 = Oeuvres 11, p. 336, drückt er sich so aus, als ob man *alle* Bedingungsgleichungen durch Einführung geeigneter Koordinaten beseitigen könne. Vgl. auch *C. Neumann,* Leipzig Ber. 1888, p. 22.

443) Vgl. IV 1, Nr. 38 (*A. Voss*); von der Litteratur sei hier noch genannt: *E. J. Routh,* Dynamik 2, Kap. 5; *A. Vierkandt,* Monatshefte f. Math. 3 (1892), p. 31, 97; *J. Hadamard,* Paris C. R. 118 (1894), p. 397; Bordeaux Soc. de scienc. (4) 5 (1895), p. 397; *P. Appell,* Roulements, Paris 1899, chap. 4 und Mécanique 2, chap. 24; *P. Woronez,* Moskau Math. Sammlung 22 (1901), p. 659 (russisch), Die Gleichungen der Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer unbeweglichen Fläche rollt, Kijew 1903 (russisch); *E. Carvallo,* J. de l'éc. polyt. (2) 5 (1900), p. 119; 6 (1901), p. 1; *G. Morera,* Torino Atti 38 (1903), p. 57.

stand mit, dass bei den betreffenden Spezialfällen zufällig die Koordinaten q_4 und q_5 in diesen *Lagrange*schen Gleichungen fehlten[444]). Man überzeugt sich leicht, dass die so erhaltenen Gleichungen im allgemeinen mit den legitimen Gleichungen nicht verträglich sind[445]); ausnahmsweise kann es sich allerdings ereignen, dass eine von ihnen richtig ist[446]). *P. Appell* hat diesen Fehler in den später ausgegebenen Exemplaren der ersten Auflage seiner Mécanique (1896) verbessert und bald darauf in einer eigenen Abhandlung auf ihn hingewiesen[447]). Unabhängig von ihm haben ihrerseits *S. Tschaplygin*[448]) und *D. J. Korteweg*[449]) dieselbe Bemerkung gemacht.

Es giebt einen Fall, in dem der umgestaltete Ausdruck T^* der lebendigen Kraft immer zu richtigen Ergebnissen führt. Wenn man nämlich die kleinen Schwingungen eines rollenden starren Körpers um eine Gleichgewichtslage untersucht und dabei die Vernachlässigungen vornimmt, die in der Theorie der kleinen Schwingungen üblich sind (vgl. Nr. **9** dieses Artikels), so fallen gerade die Glieder fort, in denen sich die illegitimen Gleichungen von den legitimen unterscheiden[450]).

Durch Elimination von λ und μ erhält man aus den Gleichungen (19) und (20) fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung, in denen nur die Koordinaten $q_1, \cdots, q_5$ nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen vorkommen. Wie *P. Appell* gezeigt hat, ergeben sich diese Gleichungen unmittelbar, wenn man statt der lebendigen Kraft T die *Beschleunigungsenergie* S zu Grunde legt, die als das Integral der mit dem Massenelement multiplizierten halben Beschleunigungsquadrate aller Punkte des Systems definiert wird[451]). Im vorliegenden Fall wird

444) Vgl. z. B. *G. Schouten*, Amsterdam Versl. en Meded. (3) 5 (1888), p. 292; *P. Molenbroek*, Nieuw Archief 17 (1890), p. 130; *E. Lindelöf*, Acta Soc. Fenn. 21 (1894), Nr. 10. Ein einfaches Beispiel für den Fehlschluss giebt *E. J. Routh*, Dynamik 1, p. 364; vgl. auch Nr. **80** 2), p. 584 dieses Artikels.

445) *N. M. Ferrers*, Quart. J. 12 (1872), p. 1; vgl. auch die Ausführungen in Nr. **80** 2) dieses Artikels über die *Transitivitätsgleichungen*, sowie *P. Appell*, Roulements, p. 43.

446) Vgl. etwa *P. Appell*, Mécanique 2, p. 373.

447) Bull. soc. math. de France 26 (1898), p. 265; vgl. auch Palermo Circ. mat. Rend. 14 (1900), p. 1.

448) Moskau, Arbeiten der physikalischen Sektion der Kaiserlichen Gesellschaft der Freunde der Naturkunde 9¹ (1897), p. 10 (russisch).

449) Nieuw Archief (2) 4 (1899), p. 130; Palermo Circ. mat. Rend. 14 (1900), p. 7.

450) *J. D. Korteweg*, Nieuw Archief (2) 4 (1899), p. 130. Dass bei den kleinen Schwingungen *in allen Fällen* der Unterschied zwischen holonom und nichtholonom fortfällt, hat *F. Klein* bemerkt, Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 260.

451) *P. Appell*, Paris C. R. 129 (1899), p. 317, 423, 459; J. f. Math. 121

S eine Funktion der Koordinaten $q_1, \cdots, q_5$ nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen. Die gesuchten Differentialgleichungen lauten alsdann:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\varkappa} = Q_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots, 5). \tag{21}$$

Die Berechnung von S wird erleichtert durch einen Satz von *P. Appell*, der das genaue Analogon des Satzes von *Samuel König*[452]) ist. Hiernach ist die Beschleunigungsenergie eines Systems gleich der Summe der Beschleunigungsenergie, die der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse m zukommt, und der Beschleunigungsenergie für die relative Bewegung des Systems um den Schwerpunkt[453]). Alle diese Fragen können jedoch erst in den Artikeln über analytische Mechanik IV 11 bis 13 (*P. Stäckel*) ausführlicher besprochen werden.

B. Der einzelne starre Körper: Spezielle Ausführungen.

32. Drehung um eine feste Axe. 1) Ein starrer Körper, der gezwungen ist, sich um eine im Raume feste Axe zu drehen, bildet ein System mit *einem* Grade der Freiheit; denn seine Lage ist vollständig bestimmt durch die Angabe des Winkels φ, um den er sich von der Anfangslage aus um die Axe gedreht hat. Wenn man von der Reibung absieht, also das Lager, in dem die Axe liegt, als vollkommen glatt annimmt, so liefert sowohl der Satz von der lebendigen Kraft als auch der Flächensatz, angewandt auf die Drehaxe, jeder für sich für die Bewegung des Körpers dieselbe Gleichung:

$$mc^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mathsf{N}; \tag{1}$$

hierin bezeichnet m die Gesamtmasse des Körpers, c ist der Gyrationsradius, N das Moment der wirkenden Kräfte in bezug auf die Drehaxe.

Zur Berechnung der *Reaktion* der Axe pflegt man in der *theoretischen Mechanik* anzunehmen, dass diese in zwei Punkten O' und

---

(1900), p. 310; 122 (1901), p. 205; J. de math. (5) 7 (1900), p. 5; Annuaire des math., Paris 1902, p. 407; Mécanique 2, p. 374; vgl. auch *G. A. Maggi*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 10^2 (1901), p. 287; *H. Poincaré*, Paris C. R. 132 (1901), p. 369; *G. Hamel*, Zeitschr. Math. Phys. 50 (1904), p. 1; *Th. E. B. Jourdain*, Quart. J. of math. 36 (1904), p. 61. Den Namen *Beschleunigungsenergie* hat *A. de Saint-Germain* vorgeschlagen, Paris C. R. 130 (1900), p. 1174; er findet sich jedoch schon bei *J. König*, Math. Ann. 31 (1888), p. 1.

452) Acta erud. Lips. 1751; vgl. auch Nr. 10, p. 488 diese Artikels.

453) *P. Appell*, Mécanique, 2, p. 381.

O'' festgehalten wird. Es möge ein im Raume festes Koordinatensystem der ξ, η, ζ eingeführt werden, dessen Anfangspunkt der Punkt O' ist, und dessen ζ-Axe mit der festen Axe zusammenfällt. Die ζ-Koordinate von O'' sei h, die Koordinaten des Schwerpunktes seien ξ_0, η_0, ζ_0, die Komponenten der Resultante $\mathfrak{R}$ der wirkenden Kräfte nach den Koordinatenaxen Ξ, H, Z, die Komponenten des resultierenden Momentes $\mathfrak{M}$ nach diesen Axen Λ, M, N. Alsdann ergeben sich für die Komponenten der Reaktionen in O' und O'': Ξ', H', Z' und Ξ'', H'', Z'' die fünf Gleichungen:

$$
(2)\qquad \begin{cases}
\Xi' + \Xi'' + \Xi = -\dot\varphi^2\xi_0 - \ddot\varphi\eta_0, \\
\mathsf{H}' + \mathsf{H}'' + \mathsf{H} = -\dot\varphi^2\eta_0 + \ddot\varphi\xi_0, \\
\mathsf{Z}' + \mathsf{Z}'' + \mathsf{Z} = 0; \\
\quad -h\mathsf{H}'' + \Lambda = +\dot\varphi^2\int\eta\zeta\,dm - \ddot\varphi\int\zeta\xi\,dm, \\
\quad +h\Xi'' + \mathsf{M} = -\dot\varphi^2\int\zeta\xi\,dn - \ddot\varphi\int\eta\zeta\,dm.
\end{cases}
$$

Um die Integrale $\int\eta\zeta\,dm$ und $\int\xi\zeta\,dm$ zu berechnen, die über alle Massenelemente dm des starren Körpers zu erstrecken sind, hat man ein im Körper festes Koordinatensystem der x, y, z einzuführen, bei dem die z-Axe mit der ζ-Axe zusammenfalle, während der Winkel zwischen der x- und der ξ-Axe gleich φ sein möge. Werden die *konstanten* Deviationsmomente in bezug auf den Punkt O' mit D, E, F bezeichnet (vgl. Nr. 28b dieses Artikels), so ist

$$
(3)\qquad \begin{cases}
\int\eta\zeta\,dm = E\sin\varphi + D\cos\varphi, \\
\int\zeta\xi\,dm = E\cos\varphi - D\sin\varphi.
\end{cases}
$$

Aus den Gleichungen (2) in Verbindung mit (3) lassen sich Ξ', H', Ξ'', H'' ermitteln, sobald φ als Funktion der Zeit bekannt ist; dagegen erhält man aus ihnen nur die Summe der Komponenten Z' und Z'', so dass die Reaktionen in O' und O'' nach der Richtung der festen Axe einzeln genommen unbestimmt bleiben. Man hat also hier einen Fall *kinetostatischer Unbestimmtheit*; vgl. Nr. 29c und 42 dieses Artikels. Um die Unbestimmtheit zu heben, kann man, wie bei der statischen Unbestimmtheit, die elastischen Deformationen heranziehen; vgl. Nr. 27 dieses Artikels.

Für die praktischen Anwendungen, mit denen man es in der *physikalischen* und *technischen Mechanik* zu tun hat, ist freilich die angegebene Berechnung der Reaktionen nicht ausreichend; denn die

Drehung um die feste Axe wird hier meistens durch *Lager* von *endlicher* Ausdehnung realisiert[454]).

2) In der Maschinentechnik verwendet man oft feste Körper von beträchtlicher Masse, die sich mit grosser Winkelgeschwindigkeit um feste Axen drehen (Mühlsteine, Schwungräder, Laufräder von Turbinen usw.). Um die Beanspruchung der Axe tunlichst zu vermeiden, hat man nach den Gleichungen (2) die Massen so anzuordnen, dass die Axe möglichst genau mit einer durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxe übereinstimmt. Es sind daher vielfach Verfahren ausgebildet worden, um eine Ausbalanzierung der Massen in dem genannten Sinn zu erzielen[455]) und die Genauigkeit der Einstellung einer Drehaxe im gegebenen Falle zu prüfen[456]).

Schwungräder im engeren Sinne des Wortes dienen dazu, den Gang dauernd rotierender Maschinenteile gegenüber den periodisch auftretenden Schwankungen des Kraftfeldes und der Massenkonfiguration der Getriebeteile möglichst gleichförmig zu erhalten; vgl. IV 10 (*K. Heun*). Man erhält einen ungefähren Einblick in die mechanischen Vorgänge, die sich hierbei abspielen, wenn man sich vorstellt, dass das gesamte, aus den treibenden Kräften und den Widerstandskräften resultierende Moment N um die Drehaxe unmittelbar auf das Schwungrad, beschleunigend oder verzögernd, einwirkt. Bezeichnet man das Trägheitsmoment des Schwungrades in bezug auf die Drehaxe mit C und mit L die Arbeit von N in dem Teile einer Periode, in dem die Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung von ihrem grössten Werte $\omega_{\max}$ auf ihren kleinsten Wert $\omega_{\min}$ sinkt, so ist:

$$L = \tfrac{1}{2} C (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2).$$

In dem Verhältnis von $\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2$ zu dem mittleren Werte ω_m^2 des Quadrates der Winkelgeschwindigkeit hat man ein *Mass für die Ungleichförmigkeit des Ganges der Maschine.* Wenn es sich darum handelt, die Größe von C und damit die Dimensionen des Schwungrades für eine auszuführende Anlage zu bestimmen, hat man das Mass der Ungleichförmigkeit als gegeben anzusehen; über die Schwierigkeiten, die die Bestimmung von L und die genaue Definition des Ungleichförmigkeitsgrades mit sich bringt, wird in IV 10 (*K. Heun*) berichtet werden.

---

454) Vgl. auch Nr. 42 dieses Artikels, sowie IV 10 (*K. Heun*).

455) Vgl. z. B. *A. Yvon Villarceau*, J. de math. (2) 5 (1870), p. 315 und *A. Stodola*, Die Dampfturbinen, 3. Aufl., Berlin 1905, p. 181.

456) Beschreibung eines solchen Apparates von *Haffner* bei *P. Appell*, J. de l'éc. polyt. (2) 9 (1904), p. 151.

3) Wenn das Drehmoment N der wirkenden Kräfte in bezug auf die feste Axe verschwindet, so ist $\ddot{\vartheta} = 0$, mithin ω konstant. Verschwinden auch noch die Momente $\mathsf{\Lambda}$ und M, so dass die wirkenden Kräfte einer im Punkte O angreifenden Einzelkraft äquivalent sind, so werden die Gleichungen (2), sobald die feste Axe eine zu O' gehörende Hauptaxe ist, durch

$$\Xi'' = 0, \quad \mathsf{H}'' = 0, \quad Z'' = 0$$

befriedigt. Es gilt also der Satz: Wenn auf einen starren Körper, der sich um einen festen Punkt O' dreht, Kräfte wirken, die einer durch O' gehenden Einzelkraft äquivalent sind, so wird der Körper, wenn er sich anfänglich mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit um eine der zu O' gehörenden Hauptaxen drehte, diese Bewegung beständig fortsetzen. Man nennt aus diesem Grunde die Hauptaxen auch *permanente Drehaxen*[457]). Sollen auch noch die Komponenten Ξ', H', Z' verschwinden, so muß

$$\Xi = -\omega^2 \xi_0, \quad \mathsf{H} = -\omega^2 \eta_0, \quad Z = 0$$

sein. Hieraus folgt im besonderen der Satz: Wenn ein starrer Körper, auf den keine Kräfte wirken, sich anfänglich um eine zum *Schwerpunkt* gehörige Hauptaxe dreht, so setzt er diese Bewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit fort. Aus diesem Grunde heissen die zu dem *Schwerpunkt* gehörigen Hauptaxen auch *spontane Drehaxen*[458]). Für die Frage der *Stabilität* der permanenten und spontanen Drehaxen vgl. Nr. **34**a dieses Artikels.

4) Ist die auf den starren Körper wirkende Kraft die Schwere und liegt die feste Axe horizontal, so hat man es mit dem sogenannten *zusammengesetzten oder physikalischen Pendel* zu tun; für die Geschichte dieses Problems vgl. Nr. **25**a dieses Artikels. Einen eingehenden Bericht über die praktische Verwendung des Pendels findet man in IV 7 (*Ph. Furtwängler*). Dort ist auch die Lehre von der *Wage* dargestellt, die man in erster Annäherung als ein Pendel ansehen kann; in zweiter Annäherung ist sie eine dreigliedrige ebene Körperkette, vgl. Nr. **41**c dieses Artikels.

Befindet sich der Schwerpunkt S des Pendels in der Entfernung l von der Drehaxe, so ist $\mathsf{N} = mgl \sin\varphi$, und man hat die

457) Diesen Namen scheint *A. M. Ampère*, Paris Mém. 5, année 1821/22 (1826), p. 76 eingeführt zu haben. Der Sache nach finden sich die permanenten Axen schon bei *L. Euler*, Theoria motus, Greifswald 1765, p. 224; *Euler* sagt dafür *freie Axe (axis liber)*.

458) Vgl. Nr. **25**, p. 546 dieses Artikels. *J. L. Lagrange* versteht in der Mécanique analytique unter spontanen Axen das, was man jetzt permanente Axen nennt, und bezeichnet die jetzigen spontanen Axen als *natürliche Axen*.

Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{gl}{c^2}\sin\varphi; \tag{1'}$$

die Bewegung ist also *isochron* mit der eines mathematischen Pendels der Länge $l' = c^2/l$. Im Falle unendlich kleiner Schwingungen ist die Schwingungsdauer

$$2\pi\sqrt{\frac{c^2}{lg}}. \tag{4}$$

Um diese zu berechnen, müsste man c und l kennen. In der Praxis bestimmt man umgekehrt c und l durch die Beobachtung von Schwingungszeiten; auf das grosse Gebiet der experimentellen Bestimmung von Trägheitsmomenten in Physik und Technik kann jedoch hier nicht eingegangen werden[459].

Man lege nunmehr durch S und die feste Axe die Halbebene und ziehe in ihr die Parallele zur Axe im Abstande l'. Dann schwingen die in den Punkten dieser Geraden enthaltenen Massenteilchen des Pendels so, als ob sie vom starren Körper losgelöst und jeder für sich mit der Axe fest verbunden seien; wie man l' hierdurch experimentell bestimmen kann, hat *J. Clerk Maxwell* gezeigt[460]. *Chr. Huygens* nannte jene Parallele *Schwingungsaxe* und bewies, daß umgekehrt, wenn die Schwingungsaxe festgehalten wird, die ursprüngliche Drehaxe die zugehörige Schwingungsaxe wird[461]. Bezeichnet man noch den Gyrationsradius, den man für die Parallele zu der festen Axe durch den Schwerpunkt erhält, mit k, so ist ebenfalls nach *Chr. Huygens*:

$$l' = l + \frac{k^2}{l}, \tag{5}$$

und es gilt daher der Satz: Wenn in einer Ebene durch den Schwerpunkt zwei von ihm nicht gleichweit entfernte parallele Axen als feste horizontale Drehaxen genommen dieselbe Länge des isochronen Pendels ergeben, so ist diese Länge gleich dem Abstande der beiden Parallelen. Auf diesem Satze beruht das in der Geodäsie viel benutzte *Reversionspendel*[462].

---

459) Vgl. etwa *Fr. Kohlrausch*, Lehrbuch der praktischen Physik, 9. Aufl. Leipzig 1901. Eine monographische Darstellung dieser Untersuchungen wäre sehr erwünscht; einiges Material dazu findet man bei *J. van Rijn*, Diss. Utrecht 1890.

460) Matter and motion, London 1876 = Substanz und Bewegung, Braunschweig 1881, p. 115; vgl. auch *L. Boltzmann*, Prinzipe 1, p. 201.

461) Horologium oscillatorium, Paris 1673.

462) *J. G. F. Bohnenberger*, Astronomie, Tübingen 1811, p. 447; *H. Kater*, Phil. Trans. 1818; vgl. auch *F. Kraft*, Aufgaben 2, p. 303, *J. A. Grunert*, Arch. Math. Phys. 47 (1867), p. 119.

Die Formel (5) zeigt, wie sich l' ändert, wenn man die Dreh-
e parallel im Körper verschiebt. Für beliebige Verschiebungen
t die Formel:

$$l' = l + \frac{\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2}{l};$$

rin bedeuten α, β, γ die Richtungscosinus der Drehaxe gegen die
en der ξ, η, ζ und a, b, c sind die Gyrationshalbmesser, die zum
hwerpunkte gehören[463]. Den Komplex der Drehaxen im Körper,
r die l' eine gegebene Länge hat, haben *J. B. Biot*[464] und *O. Böklen*[465]
tersucht.

Zum Schluss sei noch auf die Aufgaben hingewiesen, die sich
i der Lehre von der Regulierung und Kompensation des Uhrpendels
geben[466]; ferner möge auch der *Metronom* von *J. H. Mälzel*[467] er-
ihnt werden.

5) Im Vorhergehenden ist von der *Reibung* abgesehen worden.
ese hängt wesentlich davon ab, wie die Forderung der festen Drehaxe
lisiert wird, und das ist auf sehr verschiedene Arten möglich[468].
enn es auch in der Praxis gelingt, durch geeignete Schmiermittel,
igellager u. s. w. die Grösse der Reibungswiderstände sehr herunter-
drücken, so darf man diese doch in vielen Fällen nicht vernach-
isigen. Von derselben Grössenordnung ist dann aber auch der Ein-
ss, den andere störende Umstände haben, z. B. die Elastizität des
aterials, und man wird so zu Problemen geführt, die durchaus
r physikalischen oder der technischen Mechanik angehören[469].

Zum Schluss möge noch für diese ganze Nummer auf die aus-
hrliche Behandlung der Drehung eines starren Körpers um eine
ste Axe bei *E. J. Routh*, Dynamik 1, Kap. III, hingewiesen werden.

33. Ebene Bewegungen. Die Bewegung eines starren Körpers
ißt eine *ebene Bewegung*, wenn die Geschwindigkeitsvektoren aller

---

463) *S. D. Poisson*, Mécanique, 1. éd. 2, p. 119, Paris (1811).

464) J. éc. polyt. cahier 13 (1806), p. 242.

465) J. f. Math. 93 (1882), p. 177; Zeitschr. Math. Phys. 28 (1883), p. 304;
l. auch *H. Ruoss*, Math. Nat. Verein in Württemberg Mitteil. 5 (1892), p. 58.

466) Vgl. VI 2, 4, Nr. 2, 3 (*C. Ed. Caspary*).

467) Zeitschr. für österreichische Gymnasien 6 (1855), p. 851; vgl. auch
. *Jullien*, Problèmes, 2. éd. 2, p. 134—147 und *A. Hirn*, Paris C. R. 105 (1887), p. 40.

468) Siehe schon *L. Euler*, Acta Petrop. pro ann. 1782, P. II (1786), p. 164
Theoria motus, 2. Aufl. Greifswald 1790, Supplementum, cap. 7; vgl. ferner
Joukowskij, Moskau Arbeiten der phys. Sektion der Kais. Ges. d. Freunde
r Naturkunde 7 (1895), Heft. 2, p. 28 (russisch).

469) Vgl. IV 7 (*Th. Furtwängler*).

seiner Punkte stets einer festen Ebene parallel bleiben[470]); das findet zum Beispiel statt, wenn ein Körper mit einer ebenen Grundfläche auf einer festen Ebene gleitet. Da sich jeder Punkt des Körpers in einer Ebene bewegt, die jener festen Ebene parallel ist, so genügt es, die Bewegung in einer der Parallelebenen zu kennen; man sagt daher auch, daß die ebene Bewegung der *Bewegung eines starren Gebildes in zwei Dimensionen* äquivalent ist. Betrachtet man im besonderen die durch den Schwerpunkt S gehende Parallelebene, so ist die Lage des Körpers vollständig bestimmt, wenn man kennt 1): die Koordinaten des Schwerpunktes ξ_0, η_0 in bezug auf ein in der Ebene festes System der ξ, η; 2) den Winkel φ, den eine im Körper feste, von S ausgehende und in der $\xi\eta$-Ebene liegende Gerade mit der ξ-Axe bildet. Mithin hat die ebene Bewegung drei Grade der Freiheit, eben so viele, wie die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt, aus der sie in der Tat als Grenzfall hervorgeht, wenn man den festen Punkt ins Unendliche rücken lässt.

Bewegungen dieser Art hat schon *Johann Bernoulli* untersucht (1742), der zeigte, dass die zugehörigen Elementarbewegungen, allgemein gesprochen, in der Verbindung einer Schiebung (Translation) parallel der festen Ebene und einer Drehung um eine darauf senkrechte Axe bestehen, deren Durchstosspunkt mit der Ebene variiert[471]). Man kann aber die Schiebung durch Wahl einer besonderen Axe, der *Momentanaxe*, zu Null machen und der Bewegungsvorgang lässt sich daher, wie wohl zuerst *M. Chasles* (1829) erkannt hat[472]), kinematisch als das Abrollen einer im starren System festen Kurve auf einer in der Ebene festen Kurve beschreiben. Diese Kurven werden als *Polbahnen* oder auch als *Zentroden* (Körperzentrode und Raumzentrode) bezeichnet[473]).

Im 19. Jahrhundert sind die ebenen Bewegungen Gegenstand zahlreicher Untersuchungen geworden, teils weil sie einfache Beispiele für die Dynamik des starren Körpers geben, teils wegen der technischen Anwendungen. Bei den Maschinen ist nämlich ein grosser

---

470) Wie *G. Darboux*, Paris C. R. 92 (1881), p. 118 erkannt hat, genügt es nicht, zu verlangen, dass der Geschwindigkeitsvektor eines jeden Punktes in einer Ebene bleibt; vgl. IV 3, Nr. 21 (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*).

471) Opera omnia 4, Lausanne 1742, p. 265.

472) Vgl. Bull. soc. math. de France 6 (1878), p. 208. *Geometrisch* ist das Abrollen zweier Kurven schon 1638 von *R. Descartes* betrachtet worden, Oeuvres 7, p. 88.

473) Vgl. IV 3, Nr. 8 (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*) sowie für den Ausdruck *Zentrode* etwa *A. Gray*, Physik 1, p. 92.

Teil der Organe so gefesselt, dass sie ebene Bewegungen ausführen; man denke etwa an das Kurbelgetriebe bei einer Dampfmaschine. Freilich ist man hier vielfach bei der *kinematischen* Behandlung stehen geblieben, die dafür bis ins Einzelnste durchgeführt worden ist; vgl. IV 3, Nr. 8—13 (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*) sowie die Darstellung bei *G. Koenigs*, Leçons de cinématique, Paris 1897, p. 137.

Die Schwerpunktssätze liefern die beiden Gleichungen

$$(1) \qquad m\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = \Xi, \quad m\frac{d^2\eta_0}{dt^2} = \mathsf{H},$$

und dazu kommt vermöge des Satzes von der lebendigen Kraft bei der relativen Bewegung (vgl. Nr. **10** dieses Artikels) als dritte Gleichung:

$$(2) \qquad mc^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mathsf{N};$$

hierin bedeutet c den Gyrationsradius und N das Drehmoment der wirkenden Kräfte für das Lot, das in S auf der festen Ebene errichtet wird. Derselbe Ansatz lässt sich benutzen, wenn weitere Bedingungen hinzutreten; man hat dann nur den wirkenden Kräften die aus den Verbindungen entspringenden Reaktionen hinzuzufügen. Ausführliche Angaben über die Aufstellung und Integration der Differentialgleichungen (1) und (2) findet man in den Werken von *P. Appell*[474]), *E. Budde*[475]) und *J. E. Routh*[476]), in denen auch zahlreiche Beispiele behandelt werden. Für weitere Beispiele sei auf *M. Jullien*[477]) und *A. E. H. Love*[478]) verwiesen. Es möge genügen, hier als hübsches Beispiel den bergan laufenden Doppelkegel[479]) zu nennen, der sich vielfach in den älteren physikalischen Kabinetten findet.

Für die Besonderheiten bei den Bewegungen mit Reibung sei auf Nr. **31** dieses Artikels sowie IV 10 (*K. Heun*) verwiesen.

34. Kräftefreier Kreisel. Ein Kreisel, d. h. ein starrer Körper, der gezwungen ist, sich um einen festen Punkt O zu drehen, heisst *kräftefrei*, wenn äussere Kräfte auf seine Bewegung keinen Einfluss haben. Da die Zwangsbedingung verhindert, dass die Resultante $\mathfrak{R}$ der etwa vorhandenen äusseren Kräfte, in O angreifend, dem Körper eine Translation erteilt, so genügt es, dass ihr resultierendes

---

474) Mécanique 2, p. 91—105.
475) Mechanik 2, p. 676—778.
476) Dynamik 1, Kap. 4.
477) Problèmes 2, éd. 2, p. 147—170.
478) Mechanics, chap. 8.
479) Vgl. dazu auch *H. Resal*, Paris C. R. 111 (1890), p. 547.

Moment $\mathfrak{M}$ in bezug auf O verschwindet; das ereignet sich zum Beispiel, wenn sich ein schwerer Körper um seinen Schwerpunkt dreht.

34 a. Synthetische Untersuchung des Bewegungsverlaufes. 1) Bei dem Kreisel reduziert sich die Impulsschraube auf einen Drehstoss $\mathfrak{D}$, der in der bekannten Art durch einen Vektor OJ, den *Impulsvektor*, dargestellt wird; seine Komponenten nach drei auf einander senkrechten Hauptaxen für den festen Punkt O sind Ap, Bq, Cr. Während der kräftefreien Bewegung bleibt der Vektor OJ der Grösse und Richtung nach unverändert, ist also im Raume fest. Damit erscheint die Trägheitsbewegung des starren Körpers als ein genaues Analogon zu der Trägheitsbewegung des materiellen Punktes. Wie dort folgt auch hier aus der Erhaltung des Impulsvektors die Erhaltung der *lebendigen Kraft*, die den konstanten Betrag $\frac{1}{2}h$ haben möge[480]). Diese ist aber nach Nr. 28d 3) gleich dem halben skalaren Produkt des Impulsvektors OJ und des Vektors der instantanen Drehung $\mathfrak{w} = OP$, also gleich dem halben Produkte der Länge k des Impulsvektors und der Projektion OQ des *Drehvektors* auf diesen. Mithin hat die Projektion OQ die konstante Länge h/k,[481]) und der *Drehpol* P befindet sich stets auf einer im Raume festen *Ebene* Π, die in Q auf dem Impulsvektor senkrecht steht. Da aber die lebendige Kraft eines Kreisels stets gleich $\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$ ist, so befindet sich der Drehpol auch auf dem mit dem kräftefreien Kreisel festverbundenen *Poinsotschen Ellipsoide*:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = h,$$

das mit dem *Cauchyschen Trägheitsellipsoide*[482]) des festen Punktes O:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

ähnlich und ähnlich liegend ist. Endlich folgt aus der Beziehung zwischen der lebendigen Kraft und dem Impuls, dass das Ellipsoid die feste Ebene beständig berührt. Die Trägheitsbewegung eines starren Körpers lässt sich demnach so beschreiben, dass das im Körper feste Poinsotsche Ellipsoid bei festgehaltenem Mittelpunkte auf einer im Raume festen Ebene ohne zu gleiten abrollt; der Kreisel dreht

480) Die Konstante der lebendigen Kraft wird im allgemeinen mit h bezeichnet (vgl. p. 465 dieses Artikels); es ist jedoch in dem vorliegenden Fall üblich, dafür $\frac{1}{2}h$ zu nehmen, wodurch sich in der Tat die Formeln vereinfachen.

481) Dieser Satz findet sich schon, wenn auch in anderer Ausdrucksweise, bei *J. L. Lagrange*, Berlin Nouv. Mém. année 1773 = Oeuvres 3, p. 579.

482) *A. L. Cauchy*, Exercices, 1827 = Oeuvres (2) 7, Paris 1889, p. 124, vgl. IV 4, Nr. 21 (*G. Jung*).

sich in jedem Augenblicke um den Durchmesser des Ellipsoids, der durch den Berührungspunkt geht, und die instantane Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung ist gleich dem betreffenden Halbmesser[483]. Was endlich die Lage des Impulsvektors betrifft, so bleibt dieser im Raume fest, im Körper aber steht er immer senkrecht auf der Ebene, die zu der instantanen Drehaxe in Bezug auf das Poinsotsche Ellipsoid konjugiert ist.

Diese anschauliche Darstellung des Bewegungsverlaufes hat *L. Poinsot* (1834) gegeben[484]. Ihm zu Ehren nennt man die kräftefreie Bewegung eines starren Körpers häufig kurz eine *Poinsot-Bewegung*. Freilich trägt *Poinsots* Darstellung zunächst nur einen *kinematischen* Charakter[485]. Sie ist von *J. Sylvester* (1866) nach der *kinetischen* Seite hin ergänzt worden. Das Trägheitsellipsoid rolle auf einer horizontalen Ebene Π unterhalb des festen Punktes O. Man entferne die Hälfte des Ellipsoides, die die Ebene nicht berührt, und ersetze sie durch die Hälfte eines kleineren Ellipsoides, das dem ersten *konfokal* ist. Das zweite Ellipsoid soll beständig eine zu Π parallele Ebene berühren, die vollkommen rauh ist (siehe Nr. 31 dieses Artikels) und sich nur um eine vertikale, durch den festen Punkt O gehende Axe reibungslos drehen kann. Lässt man jetzt das Doppelellipsoid mit dem unteren Teil seiner Oberfläche auf der festen unteren Ebene rollen (wobei als äussere Kraft nur die Reibung ins Spiel kommen soll), so veranlasst die Reibung zwischen dem oberen Teil der Oberfläche und der oberen Ebene, dass diese Ebene sich um die vertikale Axe dreht, und die verflossene Zeit steht in konstantem Verhältnis zu der Drehung, die man von einem im Raume festliegenden Zifferblatte unmittelbar ablesen kann[486].

---

483) Modelle für diese Bewegung konstruierten *E. Mach, A. v. Obermayer* usw.; vgl. darüber etwa *L. Boltzmann*, Prinzipe 2, p. 74.

484) Théorie nouvelle de la rotation des corps, Paris 1834, in ausführlicherer Darstellung wieder abgedruckt J. de math. (1) 16 (1851), p. 9, 289; deutsche Bearbeitung von *K. H. Schellbach*, Berlin 1851. In die Lehrbücher war *Poinsots* Darstellung schon durch *J. M. C. Duhamel*, Mécanique, Paris 1845—46 eingeführt worden. *Poinsot* selbst benutzt nur *ein* Ellipsoid für alle h, aber die Sätze werden einfacher und die Formeln durchsichtiger, wenn man die Schar der Ellipsoide bei veränderlichem h nimmt. Einige Sätze *Poinsots* beziehen sich auch auf den Zusammenhang seines Ellipsoides mit einer Bewegung des Kreisels unter dem Einflusse *beliebiger* Kräfte; sie besagen jedoch nur die Tatsache, dass man eine jede Bewegung im Unendlichkleinen durch eine Trägheitsbewegung approximieren kann.

485) Für die Weiterbildung der *Poinsot*schen Darstellung nach der geometrisch-kinematischen Seite vgl. *W. Schell*, Bewegung, 2. Aufl. 2, Teil 4, Kap. 3, sowie IV 3 (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*).

486) London Math. Soc. Proc. 1866 Nr. 6, p. 3; vgl. *R. Radau*, Ann. éc.

An Stelle der *Poinsot*schen Ellipsoide hat *J. Mac Cullagh* das reziproke Ellipsoid

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \frac{1}{H}$$

betrachtet, das mit dem Kreisel fest verbunden sein möge. Das *Mac Cullagh*sche Ellipsoid geht bei seiner Bewegung stets durch einen festen Punkt, der auf der Impulsaxe OJ in der Entfernung $k : \sqrt{Hh}$ liegt; das Lot von O auf die Tangentialebene in dem festen Punkte ist die instantane Drehaxe OP, und die instantane Drehgeschwindigkeit ist seiner Länge umgekehrt proportional[487].

2) *Poinsot* hatte die Darstellung der Bewegung mittels des rollenden Ellipsoides ersonnen, weil das Abrollen der beiden *Axenkegel* auf einander beim kräftefreien Kreisel im Allgemeinen zu keiner *elementaren* Anschauung von dem Verlaufe der Bewegung verhilft. Die *Polhodie* ist allerdings verhältnismässig einfach, sie ist nämlich ein sphärischer Kegelschnitt, aber die Gestalt der *Herpolhodie* ist verwickelter, und ihre Darstellung durch kartesische Koordinaten oder Polarkoordinaten erfordert elliptische Funktionen.

In einigen besonderen Fällen lässt sich freilich die Untersuchung der Polhodie und Herpolhodie sehr einfach durchführen.

Ist $A = B = C$, so ist das *Poinsot*sche Ellipsoid eine Kugel, die die feste Ebene Π in Q berührt, und die Bewegung des *Kugelkreisels* kann daher nur in einer permanenten Drehung um die im Raume und im Körper feste Axe OJ bestehen: Polhodie und Herpolhodie arten in Punkte aus[488].

Ist A gleich B, aber verschieden von C, so wird die Polhodie ein Kreis und der Polhodiekegel ein Kreiskegel. Dasselbe gilt aber auch von der Herpolhodie und dem Herpolhodiekegel: denn das Poinsotsche Ellipsoid ist ein Rotationsellipsoid, also der Ort seiner Berührungspunkte mit der festen Ebene, die Herpolhodie, ein Kreis. Mithin besteht die allgemeinste Bewegung eines kräftefreien symmetrischen

---

norm. (1) 6 (1869), p. 233; (1) 7 (1870), p. 87; *N. M. Ferrers*, Phil. Trans. 160 (1870), p. 1; *G. Darboux*, Note XVII zu der Mécanique von *Ch. Despeyrous* 2, p. 503; *E. J. Routh*, Dynamik 2, p. 140; übrigens hatte auch schon *Poinsot* selbst einen Versuch gemacht, die verflossene Zeit geometrisch darzustellen, ohne daß er jedoch zu einer durchsichtigen Konstruktion gelangt wäre.

487) Dublin Irish Proc. 2 (1840—41), p. 520; 3 (1845—47), p. 370; Trans. 22, Part I (1855), p. 135 = Collected works, Dublin 1880, p. 239; vgl. auch *A. Clebsch*, J. f. Math. 57 (1860), p. 73, sowie IV 4, Nr. 14, 21 (*G. Jung*).

488) *L. Euler*, Theoria motus, Kap. 11; *L. Poinsot*, Théorie nouvelle, Paris 1834 = J. de math. (1) 16 (1851), p. 12.

Kreisels in einer *regulären Präzession*[489]; vgl. Nr. 28c, p. 566 dieses Artikels.

3) *Polhodie.* Jetzt mögen A, B, C ungleich sein, und zwar $A > B > C$. Betrachtet man die *Familie der Bewegungen*, bei denen die lebendige Kraft denselben Wert $\frac{1}{2}h$ hat, während der Impulsvektor nach Grösse und Richtung variiert, so erscheinen die *Polhodien* als die Schnittkurven des *einen* Poinsotschen Ellipsoides

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = h$$

mit dem Kegelbüschel

$$(2) \qquad h(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2) - k(Ax^2 + By^2 + Cz^2) = 0.$$

Von den beiden Ovalen, aus denen diese Schnittkurven bestehen, kommt für eine Bewegung des Kreisels immer nur dasjenige in Betracht, auf dem der Drehpol P liegt; für die Bedeutung des anderen *konjugierten* Ovals vgl. Nr. 35a 4). Man markiere auf dem Ellipsoide die Endpunkte der Hauptaxen; sie mögen die *Hauptpole* A^*, B^*, C^* heissen. Dann legt sich, wie die nebenstehende Figur zeigt, um die Hauptpole A^* und C^* je eine Schar einander umschliessender Polhodien. Die hierdurch charakterisierten beiden Scharen von Polhodien werden durch eine *Grenzpolhodie* von einander getrennt. Diese entspricht dem Werte $k^2 = Bh$, für den der Kegel (2) in zwei Ebenen zerfällt, nämlich die Ebenen:

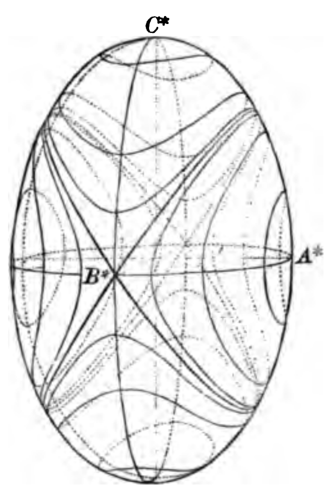


Fig. 9.

$$\sqrt{A(A-B)}\,x \pm \sqrt{C(B-C)}\,z = 0.$$

Diese schneiden aus dem Ellipsoid zwei Ellipsen aus, die sich in den Hauptpolen B^* treffen, und die Ellipsen teilen die Oberfläche des Ellipsoides in vier Felder, die je eine Schar von *Ovalen* enthalten.

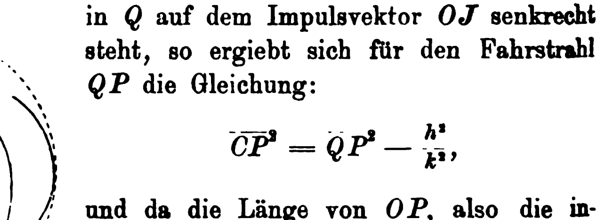
Die erste Schar der *Polhodien* gehört zu Werten von k^2 zwischen Ah und Bh, die zweite zu Werten zwischen Ch und Bh; zwischen diesen Grenzen liegt k^2, weil die feste Ebene das Ellipsoid berührt. Für $k^2 = Ah$ reduziert sich die Polhodie auf einen Punkt A^*, und für $k^2 = Ch$ auf einen Punkt C^*. In diesen Grenzfällen schrumpft auch die Herpolhodie auf einen Punkt zusammen, und die Be-

489) *L. Euler*, Theoria motus, Kap. 12.

wegung besteht in einer permanenten Drehung um die im Raume feste Hauptaxe grössten oder kleinsten Trägheitsmoments. Diese Drehungen sind *stabil*, d. h. eine kleine Abänderung der Anfangsbedingungen bewirkt eine Bewegung des Kreisels, bei der der Drehpol immer in der Nähe von A^* oder C^* bleibt. Permanente Drehung um die Axe mittleren Hauptträgheitsmomentes ist zwar auch möglich, allein sie ist *instabil*, d. h. bei einer kleinen Änderung der Anfangsbedingungen vollführt der Kreisel Bewegungen, die den Drehpol langsam, aber beständig von B^* wegführen, so dass er schliesslich bis in die Nähe des Gegenpunktes von B^* kommt. Im allgemeinen wird also der Drehpol periodisch zwischen B^* und dem Gegenpunkte von B^* hin und her gehen; diese Periode kann jedoch auch unendlich groß werden, wenn sich nämlich der Pol auf der Grenzpolhodie befindet.

Mit der Frage der Stabilität der permanenten Drehungen um eine Hauptaxe hatte sich *L. Euler* schon 1739 in seiner Scientia navalis beschäftigt, die freilich erst 1749 gedruckt worden ist. Dass die Axen extremen Momentes stabil sind, hat er in seiner 1760 verfassten, aber erst 1765 gedruckten Theoria motus bewiesen und zwar, indem er durch Rechnung ermittelte, was für Kurven der im Abstande Eins von O befindliche Punkt des Drehvektors oder, in moderner Bezeichnung, die *Kreiselspitze* beschreibt. Die hier mitgeteilte anschauliche Form des Beweises verdankt man *L. Poinsot*.

4) *Herpolhodie.* Schwieriger ist die Untersuchung der *Herpolhodie*. Da sie der geometrische Ort der Drehpole P in der Ebene Π ist, die in Q auf dem Impulsvektor OJ senkrecht steht, so ergiebt sich für den Fahrstrahl QP die Gleichung:



$$\overline{CP}^2 = \overline{QP}^2 - \frac{h^2}{k^2},$$

Fig. 10.

und da die Länge von OP, also die instantane Winkelgeschwindigkeit ω, wie die Gestalt der Polhodie zeigt, zwischen zwei extremen Werten hin- und hergeht, so gilt dasselbe für den Fahrstrahl QP. Mithin liegt die Herpolhodie zwischen zwei um Q beschriebenen Kreisen, die sie abwechselnd berührt. In dem Fall der Grenzpolhodie zieht sich der eine dieser Kreise auf den Punkt Q zusammen, dem sich die Herpolhodie in spiraligen Windungen asymptotisch nähert (*Poinsotsche Spirale*); ihre Länge ist jedoch endlich, nämlich gleich der Länge der Polhodie—Ellipse. Im Allgemeinen wird

durch die Herpolhodie der genannte Kreisring überalldicht erfüllt; diese kann sich aber auch in besonderen Fällen schliessen.

Die genauere Diskussion der Herpolhodie muss auf analytischem Wege vorgenommen werden. Dazu hatte schon *L. Poinsot* einen Anfang gemacht[490]). Einfacher ist das Verfahren von *G. Darboux*[491]), der in der Ebene Π der Herpolhodie Polarkoordinaten $\mathfrak{r}$, χ mit dem Anfangspunkte Q einführt. Setzt man zur Abkürzung

$$-\frac{(Bh-k^2)(Ch-k^2)}{BCk^2}=\alpha,$$

$$-\frac{(Ch-k^2)(Ah-k^2)}{CAk^2}=\beta,$$

$$-\frac{(Ah-k^2)(Bh-k^2)}{ABk^2}=\gamma,$$

so genügt nach *Darboux* die Herpolhodie der Differentialgleichung:

$$\text{(3)}\qquad \frac{d\chi}{d\mathfrak{r}}=\frac{\frac{h}{k}\mathfrak{r}^2-\sqrt{-\alpha\beta\gamma}}{\mathfrak{r}\sqrt{-(\mathfrak{r}^2-\alpha)(\mathfrak{r}^2-\beta)(\mathfrak{r}^2-\gamma)}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt unter anderem, dass, im Gegensatz zu *Poinsots* Zeichnung, die Krümmung wegen der Ungleichheitsbeziehungen zwischen den Hauptträgheitsmomenten A, B, C immer dasselbe Vorzeichen behält, dass also *die Herpolhodie keine Wendepunkte besitzt*[492]). Ist umgekehrt eine Differentialgleichung der Form (3) gegeben, in der die Konstanten h/k, α, β, γ irgend welche Werte haben, doch so, dass das Produkt $\alpha\beta\gamma$ negativ ausfällt, so lässt sich die dadurch definierte Kurve stets als Herpolhodie einer Poinsotbewegung auffassen; hiervon wird bei der Untersuchung des schweren symmetrischen Kreisels (Nr. 35a 4) dieses Artikels) Gebrauch gemacht werden.

Die Differentialgleichung (3) ist ziemlich verwickelt. Dagegen gelangt man bei der Untersuchung mittels elliptischer Funktionen, über die in IV 13 (*P. Stäckel*) berichtet werden wird, zu einer viel einfacheren charakteristischen Eigenschaft der Poinsotschen Herpolhodieen; es wird nämlich nach *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, wenn in der Ebene Π kartesische Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ eingeführt werden,

490) *L. Poinsot*, Théorie nouvelle, Paris 1834 = J. de math. (1) 16 (1851). p. 102.

491) Note XVII zu der Mécanique von *Ch. Despeyrous* 2, p. 488, vgl. auch *H. Padé*, Nouv. ann. (4) 3 (1903), p. 289.

492) *W. Hess*, Diss. München 1880; Math. Ann. 27 (1886), p. 465, 568; *M. de Sparre*, Paris C. R. 99 (1884), p. 906; *A. Petrus*, Diss. Halle 1902; vgl. auch IV 3, Nr. 16 (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*).

$\mathfrak{r}e^{i\chi} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ ein Thetaquotient ersten Grades, bei dem die beiden Thetafunktionen zum Argument eine lineare Funktion der Zeit haben.

J. Clerk Maxwell[493]) hat versucht, die Lage der instantanen Drehaxe dem Auge sichtbar zu machen, indem er an dem Kreisel eine Pappscheibe befestigte, die in vier verschieden gefärbte Sektoren geteilt war. Bei der Bewegung sieht man die Farbe nur in der Nähe der instantanen Drehaxe, in einiger Entfernung von ihr aber erscheint ein unbestimmtes Grau. Die Bewegung des farbigen Flecks im Raume giebt dem Beobachter einen Anhalt für die Gestalt des Herpolhodiekegels, während ihm gleichzeitig der Wechsel der Farben einen Anhalt dafür bietet, wie sich die instantane Drehaxe im Körper bewegt[493]). Das Maxwellsche Modell ist mit neun regulierenden Schraubenmassen versehen, die es gestatten, innerhalb gewisser Grenzen die Grösse der Hauptträgheitsmomente des Körpers für den festen Punkt, die Lage der betreffenden drei Hauptaxen und die Richtung der Schwerpunktsaxe OS abzuändern; hierdurch lässt es sich erreichen, daß man an dem Modell die Bewegungen allgemeinerer Kreisel studieren kann. Der Apparat, den die Figur 11 zeigt, befindet sich in dem Physikalischen Institut der Clark University zu Worcester (Mass.); siehe *A. G. Webster*, Dynamics, p. 368.

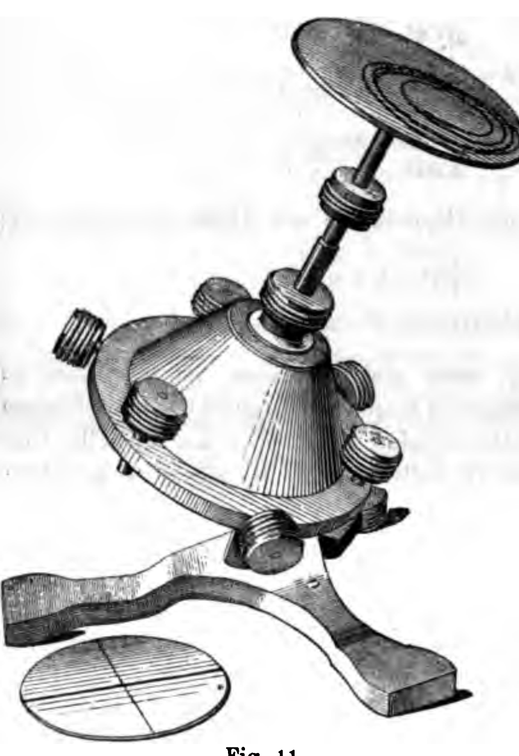


Fig. 11.

Apparate, bei denen sich die Herpolhodiekurve bei der Bewegung automatisch auf der festen Ebene aufzeichnet, haben

493) Edinburgh Royal Soc. Trans. 21, Part IV (1857) = Scientific papers, 1, p. 248.

G. F. C. Searle und *A. G. Webster* konstruiert[494]). Von sonstigen Modellen sei der Herpolbodograph von *G. Darboux* und *G. Koenigs* genannt[495]), zu dem in neuester Zeit die Apparate von *H. Grassmann d. J.*[496]) und *A. G. Greenhill*[497]) gekommen sind.

Bei der Anstellung von Versuchen mit einem kräftefreien Kreisel besteht insofern eine grosse Schwierigkeit, als man den Einfluss der Schwere nur dadurch beseitigen kann, dass man den festen Punkt O mit dem Schwerpunkt S zusammenfallen lässt, was bloss angenähert verwirklicht werden kann; vgl. hierüber auch Nr. 43 d dieses Artikels. Damit man also Bewegungen erhält, die eine angenäherte Vorstellung von den Bewegungen eines kräftefreien Kreisels geben, wird man sich auf kleine Beobachtungszeiten beschränken müssen. Mit diesem Umstande hängt es wohl zusammen, dass, im Gegensatz zu dem schweren Kreisel, siehe Nr. 35b 5) dieses Artikels, bei dem kräftefreien Kreisel der Einfluss der Reibung und anderer störender Kräfte nicht in Betracht gezogen zu werden pflegt.

34 b. **Analytische Untersuchung des Bewegungsverlaufes.** So wichtig, ja notwendig es ist, sich eine anschauliche Vorstellung von dem Verlaufe der Bewegung im Raume und in der Zeit zu machen, so „liefert doch die Formel schliesslich die einfachste und prägnanteste Beschreibung des Bewegungsvorganges; ausserdem ist sie als Grundlage der wirklichen numerischen Ausrechnung unentbehrlich“[498]). Freilich lässt sich die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung für den kräftefreien Kreisel nur in wenigen besonderen Fällen durch *elementare* Hilfsmittel erledigen, nämlich bei beliebigen Anfangsbedingungen nur für den *Kugelkreisel* und den *symmetrischen Kreisel*, für den unsymmetrischen Kreisel aber, abgesehen von den permanenten Drehungen um die Hauptaxen, nur, wenn der Fall der *Grenzpolhodie* vorliegt. Sonst muss die Theorie der elliptischen Funktionen herangezogen werden, und es wird daher die Untersuchung des kräftefreien unsymmetrischen Kreisels erst in IV 13 (*P. Stäckel*) zum Ab-

---

494) *A. G. Webster*, Dynamics, p. 269.

495) Das Modell von *G. Darboux* und *G. Koenigs* war auf der Weltausstellung zu Paris 1889 ausgestellt; es befindet sich jetzt in dem Conservatoire des arts et métiers. Vgl. auch *P. Appell*, Mécanique 2, p. 183.

496) Zeitschr. Math. Phys. 48 (1903), p. 329; die drei Modelle veranschaulichen je einen Fall, wo k^2 zwischen Ah und Bh, Bh und Ch liegt und gleich Bh ist.

497) Verhandl. III. internat. math. Kongress Heidelberg 1904, Leipzig 1905, p. 100.

498) *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, p. 5.

schluss gebracht werden können. Immerhin ist es möglich, auch für den unsymmetrischen Kreisel auf elementarem Wege gewisse *Periodicitätseigenschaften der Bewegung* herzuleiten, die eine wertvolle Vervollständigung der auf synthetischem Wege gewonnenen Ergebnisse bilden[499]).

1) Bei dem kräftefreien Kreisel feiern die *Euler*schen *Gleichungen* ihren Triumph. Sie lauten in diesem Falle:

$$(1)\qquad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0, \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = 0, \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0, \end{cases}$$

und da in ihnen allein die Komponenten p, q, r der instantanen Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ vorkommen, lässt sich aus ihnen allein bereits der *Geschwindigkeitszustand* des Kreisels als Funktion der Zeit berechnen. Nachdem man die p, q, r auf diese Art gefunden hat, liefern hinterher die *kinematischen Gleichungen*

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{d\psi}{dt}\sin\vartheta\sin\varphi + \frac{d\vartheta}{dt}\cos\varphi = p, \\ \frac{d\psi}{dt}\sin\vartheta\cos\varphi - \frac{d\vartheta}{dt}\sin\varphi = q, \\ \frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta + \frac{d\varphi}{dt} = r \end{cases}$$

die *Euler*schen *Winkel* als Funktionen der Zeit.

Aus den Gleichungen (1) folgen sofort die ersten Integrale:

$$(3)\qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$

$$(4)\qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2,$$

deren Bedeutung aus Nr. 34a dieses Artikels bekannt ist. Nimmt man zu ihnen die Gleichung hinzu

$$(5)\qquad p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2,$$

so lassen sich p, q, r durch ω allein ausdrücken, und für ω ergiebt sich aus den *Euler*schen Gleichungen die Differentialgleichung:

$$(6)\qquad \frac{1}{2}\frac{d(\omega^2)}{dt} = \sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)};$$

hierin werden die positiv zu wählenden Konstanten ω_1, ω_2, ω_3 durch

---

499) Die im Folgenden angegebenen Sätze rühren im Wesentlichen sämtlich von *L. Euler* her; siehe besonders Theoria motus, Kap. 13. Für die analytische Herleitung der *Poinsot*schen Darstellung vgl. *Ch. Briot*, J. de math. (1) 7 (1842), p. 70.

die Gleichungen

$$(7)\qquad \begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{h(B+C)-k^2}{BC}, \\ \omega_2^2 = \dfrac{h(C+A)-k^2}{CA}, \\ \omega_3^2 = \dfrac{h(A+B)-k^2}{AB} \end{cases}$$

definiert.

2) Da nach (6) die Zeit ein elliptisches Integral erster Gattung mit der Variabeln ω^2 ist, wird man vor allem fragen, wann sich die Integration durch elementare Funktionen ausführen lässt. Bekanntlich ist dazu notwendig und hinreichend, dass zwei der Konstanten ω_1, ω_2, ω_3 einander gleich werden, und das tritt nur ein, wenn entweder zwei der Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, oder wenn k^2 einen der ausgezeichneten Werte Ah, Bh, Ch annimmt.

Ist in dem ersten Fall $A = B = C$, so liegt der vollständig erledigte Fall des *Kugelkreisels* vor. Ist ferner etwa A gleich B, aber verschieden von C, wobei A grösser oder kleiner als C sein kann, so hat man es mit einem *symmetrischen Kreisel* zu tun. Macht man die Axe des Impulsvektors zur ζ-Axe, so werden die *Euler*schen Gleichungen (1) in allgemeinster Weise erfüllt durch:

$$(8)\qquad \begin{cases} p = \nu \sin \vartheta_0 \sin(\varphi_0 + \mu t), \\ q = \nu \sin \vartheta_0 \cos(\varphi_0 + \mu t), \\ r = \nu \cos \vartheta_0 + \mu, \end{cases}$$

und aus den kinematischen Gleichungen (2) folgt alsdann:

$$(9)\qquad \vartheta = \vartheta_0, \quad \psi = \psi_0 + \nu t, \quad \varphi = \varphi_0 + \mu t;$$

hierin bedeuten die Grössen mit dem Index Null Anfangswerte für $t = 0$. Die Bewegung des Kreisels ist also, wie schon die synthetische Untersuchung ergeben hatte, eine *reguläre Präzession*. Die Konstante ν bedeutet die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich dabei die Figurenaxe um die Axe des Impulsvektors dreht, oder die *Präzessionsgeschwindigkeit*; die Konstante μ aber ist die Drehgeschwindigkeit, mit der sich der Kreisel um seine Figurenaxe dreht, seine *Eigendrehung*. Zwischen den Konstanten ϑ_0, μ, ν liefert jetzt die analytische Behandlung die Relation:

$$(10)\qquad [C\mu + (C - A)\nu \cos \vartheta_0]\, \nu \sin \vartheta_0 = 0;$$

durch diese Gleichung wird aus der Gesamtheit der kinematisch möglichen ∞^3 Präzessionsbewegungen eine Klasse von ∞^2 Bewegungen ausgeschieden, die man als *kräftefreie Präzessionen* bezeichnen könnte.

Ist der Neigungswinkel der Figurenaxe ϑ_0 spitz, was man unbeschadet der Allgemeinheit annehmen darf, so hat man *progressive* oder *retrograde* Präzession, je nachdem C kleiner oder grösser als A ausfällt. Endlich sind bei gegebenen ϑ_0 die Konstanten k und h aus den Gleichungen

$$(11) \qquad k = A\nu_0^1, \quad h = \frac{A}{C}(A\cos^2\vartheta_0 + C\sin^2\vartheta_0)\nu^2$$

zu entnehmen; diese ergeben sich, wenn man in den Gleichungen (4) und (3) für p, q, r die Werte aus (8) einsetzt, aber bei r für μ die Relation (10) benutzt.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Präzessionsbewegungen, bei denen die Öffnung des Präzessionskegels sehr klein und die Länge des Impulsvektors sehr groß ist. Bei den Verhältnissen, die in der Praxis vorliegen, wird nämlich der Impulsvektor durch die äußeren Störungen relativ wenig geändert, und infolgedessen behält der Präzessionskegel und der von der Figurenaxe bei der abgeänderten Bewegung beschriebene Kegel auch nach der Störung eine sehr kleine Öffnung; der kräftefreie symmetrische Kreisel mit starker Eigendrehung besitzt also eine Art von *Stabilität der Bewegung*. Eine Anwendung im Großen findet diese Stabilität bei den modernen Infanterie- und Artilleriewaffen, bei denen man durch den *Drall* der Läufe den Geschossen eine starke Drehung um die Figurenaxe beibringt; vgl. IV 18, Nr. 3 g (*C. Cranz*). Auch bei dem Berichte über die Versuche, die *L. Foucault* zum Nachweise der Drehung der Erde angestellt hat, siehe Nr. 43 d dieses Artikels, werden wir auf diese Erscheinung zurückkommen.

In dem zweiten Fall, wo k^2 einem der ausgezeichneten Werte Ah, Bh, Ch gleich sein sollte, braucht man über die Hauptträgheitsmomente keine Voraussetzungen zu machen; diese sollen daher als ungleich angenommen werden, sodass der Kreisel *unsymmetrisch* ist.

Wegen der Ungleichheitsbedingungen, die zwischen den drei Hauptträgheitsmomenten bestehen, lassen sich bei den Annahmen $k^2 = Ah$ und $k^2 = Ch$ die Eulerschen Gleichungen nur durch $q = r = 0$ und $p = q = 0$ erfüllen; man hat also *permanente Drehungen* um die betreffenden Hauptaxen.

Ist aber $k^2 = Bh$, so genügt es, dass am Anfange der Bewegung:

$$(12) \qquad \frac{p_0}{r_0} = \pm\sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}}$$

ist, und der Quotient $\frac{p}{r}$ behält alsdann diesen Wert für alle Zeiten. Die Polhodie liegt daher in der Ebene $r_0 x - p_0 z = 0$; diese *Grenz-*

polhodie ist also eine *Ellipse*. Das hätte sich auch aus der synthetischen Betrachtung entnehmen lassen, die analytische Untersuchung liefert aber das neue Ergebnis, dass sich die Integration der Eulerschen Gleichungen mittels hyperbolischer Funktionen ausführen lässt, und zwar erhält man:

$$(13)\quad \begin{cases} p = \frac{k}{B}\sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}}\,\frac{1}{\operatorname{ch} n(t-t_0)}, \\ q = \pm\frac{k}{B}\operatorname{tgh} n(t-t_0), \\ r = \frac{k}{B}\sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}}\,\frac{1}{\operatorname{ch} n(t-t_0)}. \end{cases}$$

Hierin bedeutet n die Konstante

$$\frac{k}{B}\sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}};$$

der Zusammenhang zwischen den Vorzeichen der verschiedenen Quadratwurzeln ergiebt sich aus den Eulerschen Gleichungen[500]).

Lässt man in (13) die Zeit t wachsen, so nähern sich p und r der Grenze Null, dagegen hat q zur Grenze $\pm\frac{k}{B}$; die instantane Axe nähert sich also im Körper mit der Zeit der Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes. Da die ζ-Axe mit der Axe des Impulsvektors zusammenfällt, ist ferner:

$$(14)\quad \begin{cases} Ap = kc_1 = k\sin\vartheta\sin\varphi, \\ Bq = kc_2 = k\sin\vartheta\cos\varphi, \\ Cr = kc_3 = k\cos\vartheta, \end{cases}$$

woraus folgt, dass die instantane Axe im Raume sich der Impulsaxe nähert. Setzt man die Integrationskonstante t_0 von vorn herein gleich Unendlich, so erhält man die permanente Drehung um die mittlere Hauptaxe.

3) Damit sind die besonderen Fälle erledigt. Um in dem allgemeinen Falle aus der Gleichung (6) Schlüsse auf den Verlauf der Bewegung zu ziehen, verfuhr *L. Euler* so, dass er die Bewegung eines gewöhnlichen *Kreispendels* zu Hilfe nahm, bei dem die Zeit auch durch ein elliptisches Integral und zwar mit dem Ausschlagswinkel des Pendels als Variabeln ausgedrückt wird. Der Punkt des Vergleichspendels macht auf seinem Kreise *Umläufe* oder vollführt *Schwingungen*,

500) Für diesen singulären Fall vgl. auch *A. M. Legendre*, Traité des fonctions elliptiques 1, Paris 1825, p. 382; *L. Poinsot*, Théorie nouvelle, Paris 1834 = J. de math. (1) 16 (1851), p. 299; *E. J. Routh*, Dynamik 2, p. 133; *P. Appell*, Mécanique 2, p. 163.

je nachdem $A(A-B)p_0^2$ grösser oder kleiner als $C(B-C)r_0^2$ ist; im Falle der Gleichheit nähert er sich asymptotisch der Vertikalen. Hieraus erschliesst *Euler*, dass die instantane Axe im Körper einen Kegel in *periodischer Bewegung* durchläuft, der die Axe des grössten oder des kleinsten Trägheitsmomentes in sich schliesst; im Falle der Gleichheit jener beiden Ausdrücke aber artet der Kegel in eine Ebene aus, die die mittlere Axe enthält (*Grenzpolhodie* der synthetischen Untersuchung), und es findet asymptotische Annäherung an diese statt. Wie man durch elementare Betrachtungen aus der Gleichung (6) herleiten kann, dass ω und damit auch p, q, r periodische Funktionen der Zeit sind, hat *F. Minding* gezeigt[501]; vgl. auch Nr. 6, p. 467 dieses Artikels.

Die Integration der kinematischen Gleichungen (2) für den kräftefreien Kreisel ist *Euler* nicht gelungen; sie ist erst von *J. d'Alembert*[502] und *J. L. Lagrange*[503]) auf ziemlich umständliche Art geleistet worden. Einfacher ist das Verfahren, das *Lagrange* später in der Mécanique analytique angewandt hat[504]). Wird nämlich die im Raume feste Impulsaxe zur ζ-Axe gemacht, so erhält man zunächst für die Komponenten des Impulses nach den im Körper festen Axen die Ausdrücke (14) und kann daher $\cos\vartheta$ und $\operatorname{tg}\varphi$ durch p, q, r darstellen, die ihrerseits periodische Funktionen der Zeit sind. Hieraus folgt, dass ϑ und φ sich nach Ablauf einer Periode bis auf ein Vielfaches von 360° bzw. 180° reproduzieren[505]). Ferner aber ist nach den kinematischen Gleichungen (2):

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\vartheta},$$

und diese Gleichung geht mit Hilfe von (3), (4) und (14) über in die Gleichung

$$\frac{d\psi}{dt} = k\frac{h - Cr^2}{k^2 - C^2r^2}. \tag{15}$$

Damit ist ψ durch eine Quadratur bestimmt. Die Gleichung (15) zeigt, dass sich die Länge der Knotenlinie beständig in demselben

501) Mechanik, p. 317.

502) Opuscules math. 4, Paris 1768, p. 1; 5, Paris 1768, p. 501.

503) Berlin Nouv. Mém. année 1783 = Oeuvres 3, p. 579; Mécanique, Ausgabe von *Bertrand* 2, p. 222, 230.

504) Ausgabe von *Bertrand* 2, p. 229; vgl. auch *S. D. Poisson*, Mécanique 1. éd. Paris 1811, 2, p. 145 und *Cisa de Grésy*, Torino Mem. 24 (1820), p. 495.

505) Der übliche Schluss, nach dem, wenn $\cos\vartheta$ und $\operatorname{tg}\varphi$ periodische Funktionen der Zeit sind, auch ϑ und φ selbst solche Funktionen sein müssen (siehe etwa *P. Appell*, Mécanique 2, p. 161) ist falsch; z. B. ist bei der regulären Präzession $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\mu t$ eine periodische Funktion der Zeit, aber $\varphi = \mu t$ keine solche Funktion.

Sinne ändert und im Laufe einer Periode immer um denselben Betrag zu- oder abnimmt.

Zum Schluss dieser Nummer sei noch auf das Werk von *G. Woronez*, Geometrische Untersuchungen über den Eulerschen Fall der Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt, Kijew 1898 (russisch), hingewiesen, das eine gute Übersicht über die betreffende neuere Litteratur giebt.

35. Schwerer symmetrischer Kreisel.

Ein symmetrischer Kreisel, d. h. ein starrer Körper, der sich um einen festen Punkt O dreht, und der kinetische Symmetrie für die Axe besitzt, die durch O und den Schwerpunkt S geht, heisst *schwer*, wenn auf ihn allein die Kraft der Schwere wirkt; ähnlich wie bei dem sogenannten *schweren Punkt* wird also durch den Zusatz *schwer* nur die Tatsache bezeichnet, dass *als äussere Kraft allein die Schwere in Betracht gezogen wird*, während über die *Grösse des Gewichtes* des materiellen Punktes oder des Körpers nicht ausgesagt werden soll.

35a. Allgemeine Sätze über den Bewegungsverlauf. 1) *Integration der Differentialgleichungen der Bewegung mittels Quadraturen.* Die *Schwere* wirke auf einen *allgemeinen* Kreisel, bei dem jedoch der Schwerpunkt S nicht mit dem festen Punkt O zusammenfallen soll.

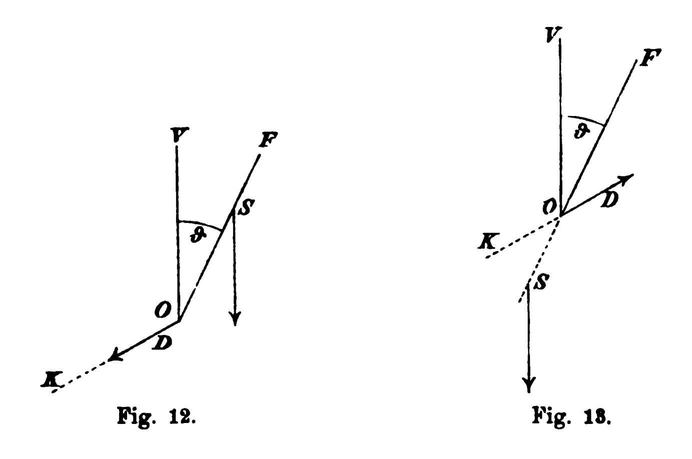


Fig. 12. Fig. 13.

Die nach oben gerichtete Vertikale sei die ζ-Axe, die Gerade OS die z-Axe; *diese braucht keine Hauptaxe zu sein.* Die Koordinaten des Schwerpunktes sind dann $0, 0, z_0$; dabei sei z_0 positiv. Als äussere Kraft liefert die Schwere ein in der ζz-Ebene liegendes Kräftepaar, dessen vektorielles Moment $\mathfrak{M}$ in die Knotenlinie fällt, und zwar ist der

Grösse und dem Sinne nach

$$(1)\qquad \mathfrak{M} = P \sin \vartheta,$$

wo zur Abkürzung

$$(2)\qquad \pm\, mgs_0 = P$$

gesetzt ist; das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem S oberhalb oder unterhalb der horizontalen Ebene durch O liegt. Alsdann gilt der Satz von der lebendigen Kraft:

$$(3)\qquad \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq) = -P\cos\vartheta + h.$$

Da die Vertikalkomponente N von $\mathfrak{M}$ gleich Null ist, behält ferner die Vertikalkomponente N_1 des Drehstosses $\mathfrak{D}$ stets denselben Wert, und man hat, in der Bezeichnungsweise von *C. G. J. Jacobi*, die „Integralgleichung":

$$(4)\qquad (A - Er - Fq)\,c_1 + (B - Dr - Fp)\,c_2 + (G - Dq - Ep)\,c_3 = \mathsf{N}_1.$$

Als *J. L. Lagrange* in der ersten Auflage seiner Mécanique analytique diesen Ansatz machte, konnte er bei den genannten allgemeinen Annahmen kein drittes Integral finden; das gelang ihm vielmehr nur in dem besonderen Falle, dass die z-Axe Hauptaxe ist und $A = B$ wird. Unter diesen Voraussetzungen ist nämlich, wie *Lagrange* erkannte, auch die Komponente N_1 des Impulses nach der Figurenaxe, der sogenannte *Eigenimpuls* des Kreisels, konstant, also

$$(5)\qquad Cr = \mathsf{N}_1;$$

folglich hat die Komponente r der instantanen Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ nach der Figurenaxe einen konstanten Wert, der mit r_0 bezeichnet werde.

Die Integrale (4) und (5) ergeben sich für den schweren *symmetrischen* Kreisel auch sofort, wenn man als Axen der x, y, z Hauptaxen wählt und die Lagrangeschen Differentialgleichungen in den Eulerschen Winkeln ansetzt. Dann wird:

$$(6)\qquad T = \tfrac{1}{2}A(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\vartheta) + \tfrac{1}{2}C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta)^2;$$

ψ und φ kommen in T nicht vor, sind also sogenannte *cyklische* Koordinaten[507a]). Ferner wird der Ausdruck der elementaren Arbeit:

$$(7)\qquad \delta W = P\sin\vartheta\,.\,\delta\vartheta,$$

507a) Der Name *cyklische Koordinaten* stammt von *H. von Helmholtz*, Ber. Berlin 1884, p. 159; J. f. Math. 97 (1884), p. 111. Jedoch hatte schon vor ihm *W. Thomson* die Wichtigkeit des Umstandes erkannt, daß bei manchen dynamischen Problemen in dem Ausdrucke der lebendigen Kraft gewisse Lagekoordinaten fehlen. Genaueres darüber findet man in dem Artikel IV 11 (*P. Stäckel*).

und die Gleichungen für ψ und φ lauten daher:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\psi} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = 0.$$

Auf diese Weise erhält man die Gleichungen

$$(4') \qquad (A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta)\dot\psi + C \cos \vartheta \cdot \dot\varphi = \mathsf{N}_1,$$

$$(5') \qquad C(\dot\varphi + \cos \vartheta \cdot \dot\psi) = N_1$$

die den Gleichungen (4) und (5) äquivalent sind[508]).

In Verbindung mit den kinematischen Gleichungen (Nr. 28c, Gl. (5)) führen die Gleichungen (3), (4'), (5'), die im Sinne *C. G. J. Jacobis* „Integralgleichungen" des Problems sind, zur Bestimmung der Eulerschen Winkel mittels Quadraturen. Man setze nämlich zur Abkürzung:

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{2P}{A} = a, & \dfrac{C}{A} = b; \\ \dfrac{2h - Cr_0^2}{A} = \alpha, & \dfrac{\mathsf{N}_1}{A} = \beta. \end{cases}$$

Ferner sei

$$(9) \qquad \cos \vartheta = u.$$

Dann gelten die Gleichungen:

$$(10) \qquad \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = f(u) \equiv (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - br_0 u)^2,$$

$$(11) \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0 u}{1 - u^2},$$

$$(12) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = r_0 - u\frac{\beta - br_0 u}{1 - u^2};$$

hierin sind a, b Materialkonstanten des Kreisels, dagegen α, β, r_0 Integrationskonstanten, zu denen bei Ausführung der Quadraturen noch die Anfangswerte ϑ_0, ψ_0, φ_0 der Eulerschen Winkel zur Anfangszeit $t = 0$ hinzutreten[509]).

2) *Periodizitätseigenschaften der Bewegung.* Um aus den Gleichungen (10), (11), (12) die Eulerschen Winkel als Funktionen der Zeit darzustellen, braucht man die Theorie der elliptischen Funktionen, und es muss hierfür auf IV 13 (*P. Stäckel*) verwiesen werden. Man kann jedoch aus jenen Gleichungen mit elementaren Mitteln gewisse

---

508) *J. L. Lagrange* selbst hat diese Gleichungen nicht aufgestellt; man findet sie bei *E. J. Routh*, Dynamik 1, p. 363 sowie bei *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, p. 220.

509) *J. L. Lagrange*, Mécanique analytique, 2. Aufl., Ausgabe von *Bertrand* 2, p. 233. Dieselben Formeln gab bald darauf *S. D. Poisson*, Journ. éc. polyt., cah. 16 (1813), p. 247; vgl. auch *P. Appell*, Mécanique 2, p. 188.

Periodizitätseigenschaften der Bewegung erschliessen; vgl. Nr. 5, p. 476 dieses Artikels.

Die Gleichung (10) zeigt nämlich, dass u eine periodische Funktion der Zeit ist, die zwischen zwei extremen Werten hin und her geht, nämlich den beiden kleineren Wurzeln e und e' der Gleichung $f(u) = 0$, welche immer zwischen -1 und $+1$ liegen. Wird also auf der Figurenaxe in dem Abstande 1 von O ein Punkt, die *Kreiselspitze* oder der *Apex*, markiert, so ist seine Bahn eine sphärische Kurve, die zwischen zwei Parallelkreisen der um O beschriebenen Einheitskugel periodisch hin und her geht. Im allgemeinen berührt die Bahn diese Grenzkreise. Wenn der Schwerpunkt S *oberhalb* des festen Punktes O liegt, können sich *Spitzen* nur auf dem *oberen* Kreise finden, und zwar treten sie auf, wenn $\beta - br_0 u$ für diesen Kreis

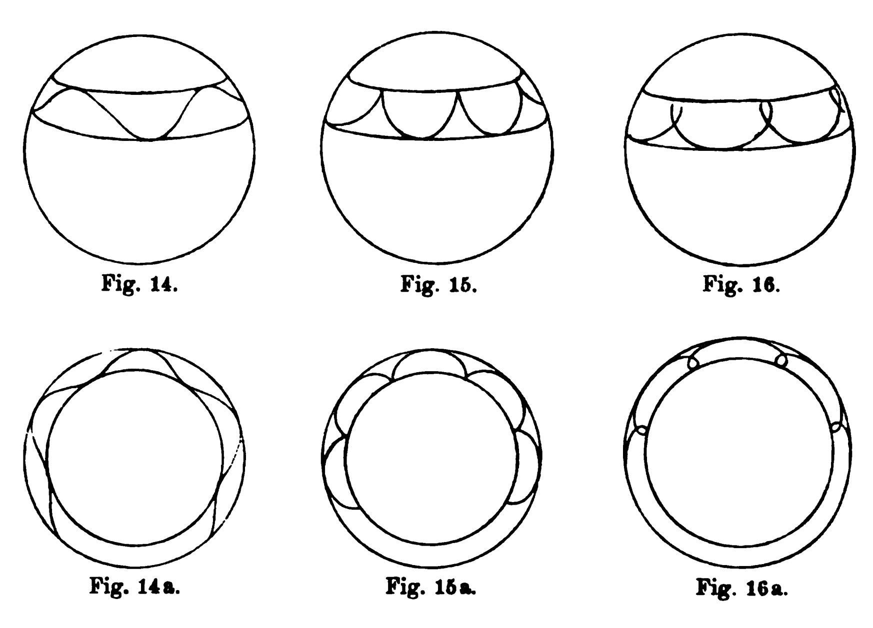


Fig. 14. Fig. 15. Fig. 16.

Fig. 14a. Fig. 15a. Fig. 16a.

verschwindet; diese Form der Bahn bildet den Übergang zwischen den Bahnen mit und ohne Schleifen, siehe die Figuren 14 bis 16[510]. Die darunter befindlichen Figuren 14a bis 16a zeigen die orthographischen Projektionen dieser Bahnen auf die Äquatorebene der Kugel. Wenn jedoch die Bahnen der Kreiselspitze zu beiden Seiten des Äquators liegen, würde die orthographische Projektion ihre Eigen-

510) *A. G. Webster,* Dynamics, p. 282; vgl. auch *W. Hess,* Math. Ann. 19 (1881), p. 121; *P. Appell,* Mécanique 2, p. 190 und *J. Hadamard,* Bull. scienc. math. (2) 19 (1895), p. 228.

tümlichkeiten verwischen, und es empfiehlt sich dann, die stereographische Projektion auf die Äquatorebene von dem tiefsten Punkte der Kugel, also dem Südpole aus anzuwenden. Die Figuren 17 bis 19, die als Beispiel für diese Verfahren dienen mögen, sind der Theorie des Kreisels von *F. Klein* und *A. Sommerfeld* entnommen; bei den entsprechenden Bewegungen liegt der Schwerpunkt S *unterhalb* des Unterstützungspunktes O. Sehr viel vollkommener sind die stereoskopischen Bilder, die *A. G. Greenhill* und *J. Dewar* veröffentlicht haben[511]).

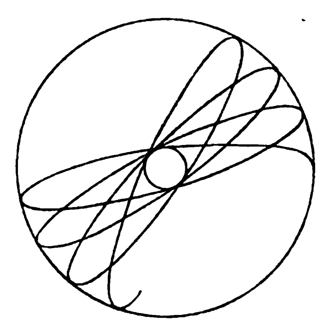


Fig. 17.

Die Gleichungen (11) und (12) zeigen, dass während einer jeden Periode sich das Azimuth φ um denselben Betrag ändert, während sich gleichzeitig die Knotenlinie um einen gewissen konstanten Winkel gedreht hat.

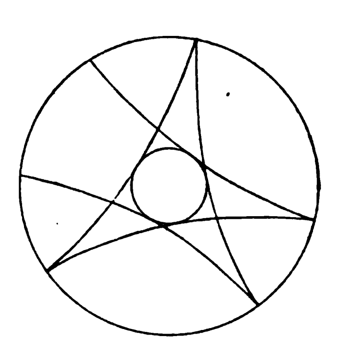


Fig. 18.

3) *Beziehungen zwischen den Bewegungen verschiedener symmetrischer Kreisel; der Satz von G. Darboux.* Man betrachte zwei symmetrische Kreisel; die zugehörigen Grössen sollen durch die Indizes 1 und 2 unterschieden, jedoch wenn sie einander gleich sind, ohne Index gelassen werden. Es sei $A_1 = A_2 = A$, dagegen C_1 verschieden von C_2; ferner sei $P_1 = P_2 = P$. Die Bewegungen sollen beide zur Anfangszeit $t = 0$ mit denselben Werten $\vartheta_0, \psi_0, \varphi_0$ der Eulerschen Winkel beginnen, und es soll auch der Anfangsimpuls derselbe sein. Mithin haben p_1, q_1 und p_2, q_2 dieselben Anfangswerte p_0, q_0, und zwischen den Konstanten r_1 und r_2 besteht die Relation:

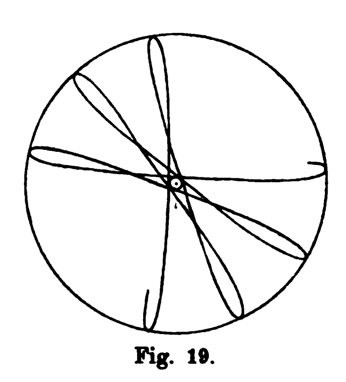


Fig. 19.

$$C_1 r_1 = C_2 r_2. \tag{13}$$

511) London Math. Soc. Proc. 27 (1896), p. 587; Engineering 64 (1897), p. 311; Annals of math. (2) 5 (1904), p. 1, 67.

Unter diesen Voraussetzungen folgt aus den Gleichungen (8), dass:

$$a_1 = a_2 = a, \quad b_1 r_1 = b_2 r_2,$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta,$$

ist; mithin werden die Differentialgleichungen (10_1) und (10_2) für u_1 und u_2 identisch, und es werden daher ϑ_1 und ϑ_2 dieselben Funktionen der Zeit. Dann aber gilt nach (11) dasselbe für die Längen der Knotenlinien ψ_1 und ψ_2, und zwischen den Azimuten besteht nach (12) die Beziehung:

(14) $$\varphi_1 = \varphi_2 + (r_1 - r_2)t.$$

Demnach bewegen sich die beiden Kreisel so, dass die Lagen ihrer Figurenaxen und ihrer Impulsvektoren immer übereinstimmen, während die Drehungen um die Figurenaxen sich nur um eine gleichförmige Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $r_1 - r_2$ unterscheiden.

G. Darboux, dem man diesen Satz verdankt, hat ihn benutzt, um die Bewegung eines schweren symmetrischen Kreisels auf die Bewegung eines schweren Kugelkreisels zurückzuführen, bei dem der feste Punkt von dem Schwerpunkte verschieden ist (*exzentrischer Kugelkreisel*). Dazu braucht man nur r_2 gleich $\frac{C_1 r_1}{A}$ zu setzen; die Gleichung (14) geht alsdann in die Gleichung

(14') $$\varphi_1 = \varphi_2 + r_1 \frac{A - C}{A} t$$

über[512]). Das ist eine wirkliche Vereinfachung, da bei dem Kugelkreisel der Impulsvektor Ap, Aq, Ar stets dieselbe Richtung wie der Drehvektor p, q, r besitzt. Hieraus folgt zum Beispiel, dass die *Herpolhodie des schweren exzentrischen Kugelkreisels* eine *ebene Kurve* ist; denn die Impulskurve, der sie ähnlich ist, liegt in der Ebene $\zeta = \mathsf{N}_1$. Dagegen ist die Herpolhodie des allgemeinen schweren symmetrischen Kreisels eine *sphärische Kurve*.

4) *Konjugierte Poinsotbewegungen; der Satz von C. G. J. Jacobi.* Zwischen den Bewegungen des unsymmetrischen kräftefreien Kreisels und des schweren symmetrischen Kreisels besteht eine verborgene Beziehung, die *C. G. J. Jacobi* um 1850 entdeckt und ohne Beweis

512) *G. Darboux*, Paris C. R. 101 (1885), p. 11, 115; J. de math. (4) 1 (1885), p. 403; Note XIX zu der Mécanique von *Ch. Despeyrous* 2, p. 527; die Gleichung (14') findet sich schon bei *C. G. J. Jacobi*, Werke 2, p. 495, der den Hilfswinkel φ_2 einführte, um die Formeln für die Bewegung eines schweren symmetrischen Kreisels zu vereinfachen; die Deutung mittels des Kugelkreisels hat aber erst *G. Darboux* gefunden. Vgl. im übrigen auch *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, p. 231.

bekannt gegeben hat[513]), die aber erst genauer erforscht worden ist, nachdem *E. Lottner* 1882 *Jacobis*[514]) fragmentarische Aufzeichnungen aus dem Nachlass herausgegeben hatte.

Da bei dem *schweren symmetrischen Kreisel* $\mathfrak{r} = r_0$ ist, beschreibt der Endpunkt des Drehvektors $\mathfrak{w}$ im Körper eine *ebene Polhodie;* von dieser Polhodie des schweren symmetrischen Kreisels aber läßt sich zeigen, daß sie eine *Herpolhodie* bei einem gewissen *unsymmetrischen kräftefreien Kreisel* oder kurz eine *Poinsotsche Herpolhodie* ist. Werden nämlich in der xy-Ebene Polarkoordinaten $\mathfrak{r}$, χ eingeführt, so erhält man für jene Polhodie die Differentialgleichung

$$(15)\qquad \frac{d\chi}{d\mathfrak{r}} = \frac{r_0(b-2)\sqrt{a}\cdot\mathfrak{r}^2 - (b r_0 \alpha - a\beta)\sqrt{a}}{\mathfrak{r}\sqrt{a^3 f\left(\frac{\alpha-\mathfrak{r}^2}{a}\right)}},$$

die genau die Form hat, welche für eine Poinsotsche Herpolhodie charakteristisch ist; vgl. Nr. 34a, Gl. (3). Eine ähnliche Betrachtung zeigt, dass sich auch die *Herpolhodie des schweren exzentrischen Kugelkreisels*, von der gerade auf der vorhergehender Seite die Rede war, als Poinsotsche Herpolhodie auffassen lässt.

Zwischen den beiden Poinsotschen Herpolhodieen, die beim Kugelkreisel auftreten, also der *zugehörigen Polhodie* und *Herpolhodie*, besteht nun ein Zusammenhang, der sich mittels des von *E. J. Routh* eingeführten Begriffes der *konjugierten Poinsotbewegungen* einfach beschreiben lässt.

Bei der Bewegung eines unsymmetrischen kräftefreien Kreisels

---

513) Berlin Monatsber. 1850, p. 77.

514) Werke 2, p. 477, 493; Beweis von *E. Lottner*, p. 510. Weitere Litteratur: *E. Padova*, Torino Atti 19 (1884), p. 1007; Venezia Ist. Atti (7) 3 (1892), p. 847, *G. H. Halphen*, Paris C. R. 100 (1885), p. 1065; Traité des fonctions elliptiques; 2, Paris 1888, chap. 2 und 3; *G. Darboux*, Paris C. R. 101 (1885), p. 11, 115; J. de math. (4) 1 (1885), p. 403; Note XVIII und XIX zu der Mécanique von *Ch. Despeyrous* 2, p. 511, 527; *A. de Saint-Germain*, Résumé de la théorie du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, Paris 1887; *E. J. Routh*, Quart. J. of math. 23 (1888), p. 34; Dynamik 2, p. 126, 150; *W. Hess*, Zeitschr. Math. Phys. 33 (1888), p. 292; *A. Gottschalck*, Diss. Münster 1893; *A. C. Dixon*, Quart. J. of math. 27 (1895), p. 362; *R. Marcolongo*, Ann. di mat. (2) 22 (1895), p. 157; Jornal de scienc. math. et astr. 13 (1896), p. 17; 14 (1900), p. 169, Ann. d. mat. (3) 7 (1902), p. 99; *A. G. Greenhill*, London Math. Soc. Proc. 26 (1895), p. 215; 27 (1896), p. 545; Annuaire des math. Paris 1902, p. 438; *E. Jahnke*, Paris C. R. 126 (1898), p. 1126; *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, Heft 2 (1898), p. 485; *F. Kötter*, Bemerkungen zu F. Kleins und A. Sommerfelds Buch über die Theorie des Kreisels, Berlin 1899; Berlin Math. Ges. Ber. 1 (1902), p. 11; *P. Appell*, Mécanique 2, p. 218.

wird nämlich von den beiden Ovalen, die der Polhodiekegel aus dem Poinsotschen Ellipsoid ausschneidet, nur das eine vom Drehpol durchlaufen. Aber auch zu dem anderen Oval gehört eine Poinsotbewegung, bei der die Komponenten des Drehvektors

$$p' = -p, \; q' = -q, \; r' = -r$$

sind, und die zu der ersten Bewegung *konjugiert* heisst. Sie findet bei einem *konjugierten* kräftefreien Kreisel statt, dessen Hauptträgheitsmomente A', B', C' in bezug auf den festen Punkt den Gleichungen genügen:

$$(16) \quad A' : B' : C' = A(B+C-A) : B(C+A-B) : C(A+B-C).$$

Die lebendige Kraft h' und der Impuls k' werden bei dem konjugierten Kreisel durch die Gleichungen bestimmt:

$$(17) \qquad \frac{A'h'-k'^2}{B'C'} = \frac{Ah-k^2}{BC}, \qquad \frac{B'h'-k'^2}{C'A'} = \frac{Bh-k^2}{CA};$$

die durch cyklische Vertauschung daraus hervorgehende dritte Gleichung ist eine Folge der beiden ersten. Die Gleichungen (16) und (17) bleiben bestehen, wenn man darin die Größen A', B', C', h', k' mit den Größen A, B, C, h, k vertauscht; hierdurch wird das Beiwort *konjugiert* gerechtfertigt.

Nunmehr gilt der Satz, dass bei geeigneter Bestimmung der Konstanten die Koordinaten der zu den beiden konjugierten Poinsotbewegungen gehörigen Herpolhodieen zu jeder Zeit identisch sind mit den durch -2 bezw. $+2$ dividierten Koordinaten der beiden Poinsotschen Herpolhodieen des zugehörigen schweren symmetrischen Kugelkreisels. Definiert man als *inverse Poinsotbewegung* diejenige Bewegung, bei der man den Polhodiekegel im Raume festhält und den Herpolhodiekegel auf ihm abrollen lässt, so lässt sich nunmehr der *Satz von C. G. J. Jacobi* in der vervollständigten Form aussprechen: *Die Bewegung eines schweren exzentrischen Kugelkreisels ist identisch mit der relativen Bewegung der zu zwei konjugierten Poinsotbewegungen gehörigen inversen Bewegungen; beim allgemeinen schweren symmetrischen Kreisel hat man noch — dem Satze von G. Darboux entsprechend — eine gleichförmige Drehung um die Figurenaxe hinzuzufügen.*

So merkwürdig dieser Satz ist, so wird es doch kaum möglich sein, sich von ihm aus etwa eine anschauliche Vorstellung von der Bahn der Kreiselspitze zu verschaffen, und wenn *Jacobi* sagt: „Le problème de *Lagrange* est donc ramené au problème, qui désormais doit être considéré comme élémentaire, de la rotation d'un corps suspendu par un point fixe et mû par le seul effet d'une impulsion

primitive", so ist doch die *Beziehung* zwischen diesen beiden Problemen keineswegs elementarer Art.

35b. Besondere Bewegungsfälle; reguläre und pseudoreguläre Präzession. 1) *Einfache Bewegungsformen. Eine gleichförmige Drehung um eine im Raume und im Körper feste Axe* kann nur stattfinden, wenn die Axe *vertikal* gestellt ist. Sie tritt aber auch bei jeder gegebenen Neigung ϑ_0 der Figurenaxe ein, sobald man die Drehgeschwindigkeit ω aus der Gleichung

$$\omega^2 = \frac{P}{(C-A)\cos\vartheta_0} \tag{18}$$

bestimmt; dabei muss jedoch ein bestimmtes der beiden Enden der Drehaxe nach oben gerichtet werden[515]). Für eine im Äquator gelegene Drehaxe und beim Kugelkreisel für jede Drehaxe wird ω unendlich; permanente Drehung ist dann physikalisch unmöglich.

Eine besondere Untersuchung erfordert der Fall $\vartheta_0 = 0$, der überhaupt eine gewisse Ausnahmestellung einnimmt; bei ihm bleibt ω ganz willkürlich. Da ein symmetrischer Kreisel von der Gestalt eines Umdrehungskörpers, der um die vertikal gestellte Figurenaxe rotiert, äusserlich von einem ruhenden Kreisel kaum zu unterscheiden ist, wird er auch ein *schlafender Kreisel* genannt[516]) *(sleeping top, toupie dormante*; auch im Deutschen giebt es das Wort *Toppich* für Kreisel).

Der Kreisel kann sich auch um eine im Raume und im Körper feste Axe mit *ungleichförmiger* Geschwindigkeit drehen. Das geschieht dann und nur dann, wenn die Axe eine der auf der Figurenaxe senkrechten Hauptaxen ist, die man horizontal gelegt hat. Bei einer solchen Bewegung muss $\mathsf{N}_1 \doteq 0$ sein, und die Neigung gehorcht daher der Differentialgleichung

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (\alpha - au)(1-u^2) - \beta^2,$$

d. h. der Kreisel schwingt wie ein *physikalisches Pendel*[517]).

Dass der schwere symmetrische Kreisel *reguläre Präzessionen* gestattet, haben gewiß schon *J. d'Alembert* und *L. Euler* erkannt[518]),

515) Vgl. *O. Staude*, J. f. Math. 113 (1894), p. 334 sowie Nr. 36 dieses Artikels.

516) *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, p. 316 sprechen in diesem Fall von einem *aufrechten* Kreisel.

517) Vgl. *B. K. Mlodzjejowskij*, Moskau, Arbeiten der phys. Sektion der Kais. Russ. Ges. der Freunde der Naturkunde 7 (1894), Heft 1, p. 64 (russisch), sowie Nr. 36 dieses Artikels.

518) Beide haben nämlich die Drehung der Erde um ihren Schwerpunkt untersucht, also eine Bewegung, die bei der Annäherung, mit der sie sich be-

allein erst *L. Poinsot* ist genauer auf diese Bewegungsform eingegangen, bei der das von ihm benutzte Bild der rollenden Kegel besonders einfach und anschaulich ist[519]). Er beginnt geradezu mit der Frage, wann bei einem symmetrischen Kreisel überhaupt Präzession um eine vertikale Axe stattfinden kann. Wie eine einfache Überlegung lehrt, liegt bei einer solchen Bewegung die horizontale Komponente des Impulsvektor in einer Axe, die auf der Knotenlinie senkrecht steht, und hat in der Bezeichnung von Nr. 28d dieses Artikels die konstante Grösse

$$[C\mu + (C - A)\,\nu \cos \vartheta_0] \sin \vartheta_0.$$

Da nun die vertikale Komponente des Impulsvektors die konstante Grösse

$$A\nu \sin^2 \vartheta_0 + C(\nu \cos \vartheta_0 + \mu) \cos \vartheta_0$$

hat und die Knotenlinie sich mit der Präzessionsgeschwindigkeit ν um die Vertikale dreht, so erfährt der Impulsvektor $\mathfrak{D}$ im Zeitelemente dt den vektoriellen Zuwachs

$$d\mathfrak{D} = [C\mu + (C + A)\,\nu \cos \vartheta_0] \sin \vartheta_0 \cdot \nu dt.$$

Dieser infinitesimale Drehstoss muss dem Kreisel von aussen zugeführt werden, damit er die reguläre Präzession fortsetzt; der Vektor $\mathfrak{M}$ muss daher der Grösse nach den *konstanten* Betrag

$$(19) \qquad [C\mu\nu + (C - A)\nu^2 \cos \vartheta_0] \sin \vartheta_0$$

haben und der Richtung nach in die *Knotenlinie* fallen.

Beim *kräftefreien* Kreisel, wo $\mathfrak{M} = 0$ ist, liefert die Poinsotsche Bedingung (19) genau die Relation Nr. 34, Gl. (10) zwischen den Präzessionskonstanten ϑ_0, μ, ν. Beim *schweren symmetrischen Kreisel* ist die Bedingung für die Richtung des Vektors $\mathfrak{M}$ von selbst erfüllt, während man aus der Bedingung (19) für seine Grösse die Relation

$$(20) \qquad P = C\mu\nu + (C - A)\,\nu^2 \cos \vartheta_0$$

erhält; hierdurch werden wiederum ∞^2 Präzessionen aus den kinematisch möglichen ∞^3 Präzessionen herausgehoben. Da aber beim Kreisel die Anfangswerte von φ und ψ willkürlich sind, so *gestattet der schwere symmetrische Kreisel unter der Gesamtheit seiner* ∞^6 *Bewegungen* ∞^4 *reguläre Präzessionen, und zwar um die Vertikale.* Unter ihnen

---

genügten, der regulären Präzession eines schweren symmetrischen Kreisels äquivalent ist; vgl. den folgenden Abschnitt 2) dieser Nummer.

519) J. de math. (1) 18 (1853), p. 41: Théorie des cônes circulaires roulantes; wieder abgedruckt Connaissance des temps 1853; vgl. auch die Abhandlung *L. Poinsots*: Sur la précession des équinoxes, Connaissance des temps 1857.

sind auch die *permanenten Drehungen* enthalten; diese ergeben sich für $\mu = 0$.

Aus der Gleichung (20) folgt:

$$\nu = \frac{C\mu \pm \sqrt{C^2\mu^2 - 4(A-C)P\cos\vartheta_0}}{2(A-C)\cos\vartheta_0}; \tag{21}$$

entweder gehören also zu gegebenen Werten der Neigung und der Drehgeschwindigkeit um die Figurenaxe zwei Werte der Präzessionsgeschwindigkeit, oder es giebt keinen solchen Wert. Die beiden Werte von ν sind sicher reell, wenn μ hinreichend gross ist. Für grosse Werte von μ sind sie näherungsweise

$$\nu_1 = \frac{C\mu}{(A-C)\cos\vartheta_0}, \quad \nu_2 = \frac{P}{C\mu}; \tag{22}$$

der Kreisel gestattet also für jedes von 90^0 verschiedene ϑ_0 eine *schnelle* und *eine langsame Präzession*. Die langsame Präzession ist die wichtigere, da sie bei den tatsächlich vor sich gehenden Kreiselungen häufig beobachtet wird; diese beginnen allerdings zunächst mit einer sogenannten pseudoregulären Präzession (vgl. den folgenden Abschnitt 3) dieser Nummer); allein die zitternden Schwingungen dieser Bewegung werden bald abgedämpft (vergl. Nr. **20**b, p. 525 dieses Artikels), und es entsteht so, wenn man von der sogenannten *säkularen* Wirkung der Reibung absieht, eine reguläre Präzession.

Zu der regulären Präzession gelangt man auch von der Frage aus, wann sich die Differentialgleichung (10) mittels *elementarer Funktionen* integrieren lässt. Dazu ist notwendig und hinreichend, dass die Gleichung $f(u) = 0$ eine Doppelwurzel besitzt, und jetzt tritt eine Scheidung der Wertsysteme $a, r_0 b, \alpha, \beta$ in zwei wesentlich verschiedene Arten ein. Im Folgenden wird angenommen, dass P positiv sei; der Fall, dass es negativ ist, lässt sich leicht auf den des positiven P zurückführen. Dann giebt es stets zwei Präzessionen, wenn N_1^2 grösser als $2AP(1+e)$ ist; e bedeutet wieder die kleinste Wurzel der Gleichung $f(u) = 0$. Ist aber N_1^2 kleiner als $2AP(1+e)$, so giebt es zwei Präzessionen oder keine, je nachdem N_1^2 grösser oder kleiner als $4APe$ ist. Da der erste Fall bei starkem Eigenimpulse N_1 des Kreisels eintritt, nennt *F. Klein* bei ihm den Kreisel einen *starken Kreisel* und spricht in dem zweiten Fall von einem *schwachen Kreisel;* die Eigenschaft, stark oder schwach zu sein, wird nicht dem Kreisel, sondern seinem Bewegungszustande beigelegt, es kann also ein und derselbe Kreisel *je nach den Anfangsbedingungen der Bewegung* stark oder schwach sein[520]).

---

520) Theorie des Kreisels, p. 249.

2) *Anwendung auf die angenäherte Berechnung der Drehung der Erde um ihren Schwerpunkt.* Bei der Untersuchung der Drehung der Erde um ihren Schwerpunkt hat man diese zunächst in starker Idealisierung als einen starren Riesenkreisel aufgefasst, bei dem der feste Punkt der Schwerpunkt und die Verbindungsgerade des Nordpoles mit dem Südpol die Figurenaxe ist. Alsdann ist näherungsweise $A = B$, und es verhält sich C zu A ungefähr wie 305 zu 304. Wird als Einheit der Zeit der Tag genommen, so bewegt sich die Erde in regulärer Präzession um die Normale zur Ekliptik, und zwar ist, wenn man den Wert von ϑ_0 nimmt, der im Jahre 1905 galt:

$$\vartheta_0 = 23^0\,28', \quad \mu = 2\pi, \quad \nu = -\frac{2\pi}{365.25\,800}.$$

Werden diese Werte von ϑ_0 und μ in die Relation Nr. **34**, Gl. (10) zwischen den Präzessionskonstanten des *kräftefreien* symmetrischen Kreisels eingesetzt, so ergiebt sich für die Präzessionsgeschwindigkeit ν der Wert -382.2π; mithin ist die tatsächliche Präzession der Erde keine freie, sondern eine *erzwungene Präzession.* In der Tat wird sie durch die anziehenden Kräfte hervorgerufen, die die anderen Weltkörper, vor allem Sonne und Mond, auf das Erdellipsoid ausüben. Diese Anziehungen liefern in erster Annäherung ein konstantes Drehmoment, dessen Vektor $\mathfrak{M}$ in der Schnittlinie der Ekliptik mit dem Erdäquator, also in der Knotenlinie liegt; es wirkt, von der Seite aus gesehen, wo die Knotenlinie das Frühlings-Äquinoktium trägt, um die Axe im entgegengesetzten Sinn des Uhrzeigers, also ebenso, wie die Schwere bei einem Kreisel, dessen Unterstützungspunkt *unterhalb* des Schwerpunktes liegt. Bezeichnen m_S die Masse der Sonne, m_L die Masse des Mondes, r_S den mittleren Abstand der Sonne von der Erde, r_L dasselbe für den Mond, γ die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik, die im Mittel $5^0\ 9'$ beträgt, so ist, da die übrigen Himmelskörper zu $\mathfrak{M}$ nur einen sehr kleinen Beitrag liefern, näherungsweise:

$$\mathfrak{M} = \frac{3}{2}\,(C - A)\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\left\{\frac{m_S}{r_S^3} + \frac{m_L}{r_L^3}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\gamma\right)\right\}.$$

Wird dieser Wert statt $P\sin\vartheta_0$ in die Gleichung (20) eingesetzt, so findet man eine langsame Präzession von rund 50 Sekunden im Jahre, von denen etwa 16 auf die Wirkung der Sonne, 34 auf die Wirkung des Mondes kommen, was mit den Beobachtungen befriedigend stimmt. Die Astronomen sehen übrigens in der Gleichung (20):

$$P = C\mu\nu + (C - A)\,\nu^2\cos\vartheta_0$$

nicht ν, sondern $\frac{C-A}{C}$ als Unbekannte an, weil man diesen sonst schwer zugänglichen Quotienten hieraus am genauesten bestimmen kann[521]).

Da die Mondbahn gegen die Ebene der Ekliptik geneigt ist und ihre Knotenlinie sich in rund 18,7 Jahren einmal um die Normale der Ekliptik dreht, so kommen zu der erzwungenen regulären Präzession der Erdaxe noch gewisse *erzwungene Schwingungen* hinzu, die man als *Nutationen* bezeichnet; sie lassen sich so beschreiben, dass der Pol des Erdäquators in rund 18,7 Jahren relativ zu der Präzession eine Ellipse mit den Halbmessern 9,2 und 6,9 Bogensekunden durchläuft[522]).

3) *Kleine Schwingungen um einfache Bewegungsformen.* Wenn man bei gegebenen Anfangsbedingungen die Lagekoordinaten $q_1, \ldots, q_r$ eines Systems aus den Lagrangeschen Differentialgleichungen als Funktionen der Zeit $f_1(t), \ldots, f_r(t)$ ermittelt hat, wird man nach den benachbarten Bewegungen fragen, d. h. nach den Bewegungen, bei denen

$$q_1 = f_1(t) + \varepsilon_1, \ldots, \quad q_r = f_r(t) + \varepsilon_r$$

ist, wo die $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ kleine Grössen bedeuten sollen; nach *E. J. Routh* nennt man diese Bewegungen auch *kleine Schwingungen* um jene Bewegung. Die Methode zu der Bestimmung der kleinen Schwingungen um eine Bewegung ist der Methode zur Bestimmung der kleinen Schwingungen um eine Gleichgewichtslage ganz analog; vgl. Nr. 9, p. 484 dieses Artikels. Im allgemeinen ergeben sich bei den üblichen Vernachlässigungen für die $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ wieder lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, bei denen jedoch jetzt die Koeffizienten von der Zeit

---

521) Vgl. VI 1 3, Nr. 58 d (*P. Pizzetti*).

522) Bei der Darstellung im Texte handelt es sich, wie schon hervorgehoben wurde, nur um eine *erste Näherung*. Die Astronomen haben, um die Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt befriedigend zu beschreiben, Formeln mit sehr vielen Gliedern aufstellen müssen. In diesen Formeln wird auch die sehr kleine *freie* Präzession der Erde berücksichtigt, die schon *L. Euler* vermutet hatte, die aber erst am Ende des 19. Jahrhunderts mit Sicherheit durch astronomische Beobachtungen festgestellt worden ist. Genaueres über alle diese Fragen, bei denen auch die Elastizität des Erdkörpers und die auf seiner Oberfläche stattfindenden meteorologischen Vorgänge berücksichtigt werden müssen, findet man in dem Artikel VI 2 22 (*K. Schwarzschild*); im übrigen vergleiche man etwa *P. S. Laplace*, Traité de mécanique céleste 5, Paris 1825, p. 273; *F. Tisserand*, Traité de mécanique céleste 2, Paris 1890, p. 442; *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, Kap. VIII. — Von Interesse sind auch die *Modelle für Präzessionsbewegungen*, vgl. etwa *K. Haas*, Progr. d. Staats-Real- und Obergymnasiums Wien VI, 1894.

abhängen und in denen noch sogenannte *gyroskopische Terme* auftreten; vgl. Nr. 20, p. 516 dieses Artikels. Nach *E. J. Routh* heisst die Bewegung $\{f_1(t), \ldots, f_r(t)\}$ *stationär*, wenn es sich ereignet, dass die Koeffizienten der linearen Differentialgleichungen bei geeigneter Wahl der Lagekoordinaten von der Zeit unabhängig sind; aus diesen Gleichungen erhält man dann immer dieselben Schwingungen, zu welcher Zeit auch die Bewegung gestört wird.

Die Frage nach den *stationären Bewegungen* des schweren symmetrischen Kreisels führt wiederum zu den *regulären Präzessionen*; denn die Koordinaten ψ und φ sind zyklisch[507a]), die Neigung ϑ aber ist bei der regulären Präzession konstant[523]). Die Bewegungen, die einer regulären Präzession benachbart sind, heissen *pseudoreguläre Präzessionen*[524]), weil sie meistens für das unbewaffnete Auge von der regulären Präzession gar nicht zu unterscheiden sind.

Zu einem häufig vorkommenden, besonderen Fall der pseudoregulären Präzession gelangt man folgendermassen. Man versetze einen Kreisel bei festgehaltener Figurenaxe durch Abziehen einer umgewickelten Schnur in starke Drehung um die Figurenaxe, stelle diese Axe schief und überlasse jetzt den Kreisel allein der Wirkung der Schwere. Alsdann scheint die Figurenaxe um die Vertikale einen Kreiskegel mit gleichförmiger Geschwindigkeit zu beschreiben. Eine solche langsame Präzession widerspricht jedoch der Anfangsbedingung, dass $\dot{\psi}_0 = 0$ sein soll, denn bei ihr ist $\dot{\psi}$ gleich der von Null verschiedenen, konstanten Präzessionsgeschwindigkeit ν. Sie widerspricht auch dem Gesetz von der Erhaltung der Energie; denn wie soll die Schwere eine Bewegung hervorrufen, bei der sich die Punkte der Figurenaxe in horizontalen Kreisen senkrecht zur Richtung der Schwere bewegen, so dass die Schwere gar keine Arbeit leisten kann?

Bereits 1813 hat *S. D. Poisson* die Lösung dieses Rätsels gegeben[519]). Er fragte nämlich, ob der schwere symmetrische Kreisel Bewegungen ausführen könne, bei denen die Neigung ϑ *nahezu* den konstanten Wert ϑ_0 behält, und gelangte unter der Voraussetzung, dass ϑ_0 von Null verschieden und die Drehgeschwindigkeit des Kreisels um seine Figurenaxe sehr gross sei, zu der folgenden angenäherten Darstellung einer solchen Bewegung. Da der Eigenimpuls $N_1 = Cr_0$ sehr gross ist, sollen nur Glieder bis zu der Ordnung von $1/N_1^2$

---

523) *E. J. Routh*, Dynamik 2, p. 151.

524) *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, Kap. V.

525) Journ. éc. polyt., cah. 16 (1813), p. 247; Mécanique, 2. éd, Paris 1833, 2, p. 177.

beibehalten werden. Wird noch zur Abkürzung

(23) $$\pm \frac{AP}{N_1^2} = \delta^2$$

gesetzt, so ist:

(24) $$\begin{cases} \vartheta = \vartheta_0 + \delta^2 \sin \vartheta_0 - \delta^2 \sin \vartheta_0 \cos \frac{N_1}{A} t, \\ \psi = \psi_0 + \frac{P}{N_1} t - \delta^2 \sin \frac{N_1}{2A} t, \\ \varphi = \varphi_0 + r_0 t + \cos \vartheta_0 \cdot \psi. \end{cases}$$

Mithin geht die Neigung der Figurenaxe periodisch zwischen den Werten ϑ_0 und $\vartheta_0 + 2\delta^2 \sin \vartheta_0$ hin und her, die einander sehr nahe liegen. Dabei dreht sich die Axe im Mittel mit der langsamen Präzessionsgeschwindigkeit $\nu = \frac{P}{N_1}$ um die Vertikale, und zwar progressiv oder retrograd, je nachdem der Schwerpunkt oberhalb oder unterhalb der horizontalen Ebene durch den festen Punkt liegt.

Um die Bewegung deutlicher zu veranschaulichen, führe man nach *V. Puiseux*[526]) eine Hilfsaxe ein, deren Stellung durch die Gleichungen

$$\vartheta = \vartheta_0 + \delta^2 \sin \vartheta_0, \quad \psi = \psi_0 + \frac{P}{N_1} t$$

definiert ist. Dann vollführt die Hilfsaxe eine reguläre Präzession, und der Hilfsapex, der auf ihr im Abstande Eins von O liegt, beschreibt auf der Einheitskugel um O einen Parallelkreis; der wahre Apex aber durchläuft relativ zu dem Hilfsapex einen kleinen Kreis vom Halbmesser δ^2, seine Bahn auf der Kugel ist also eine *sphärische Zykloide*, deren Spitzen auf dem Parallelkreise ϑ_0 aufsitzen; siehe die Figur 20, bei der die kleinen Wellen der Zykloide stark vergrössert sind. Die Geschwindigkeit des wahren Apex auf der Kugelfläche ist der Größe nach

Fig. 20.

$$\sin \vartheta_0 \frac{P}{N_1} \sin \frac{N_1}{2A} t,$$

der Richtung nach aber wird sie durch den Winkel χ mit dem Meridian bestimmt. der aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \chi = \operatorname{tg} \frac{N_1}{2A} t$$

zu entnehmen ist. Folglich ist die Geschwindigkeit des Apex für

526) Nach *Ph. Gilbert*, Mécanique, p. 318, hat *V. Puiseux* diese Darstellung in Vorlesungen Paris 1855 gegeben.

$t = 0$ und weiterhin nach Ablauf jeder Periode $\frac{2\pi A}{N_1}$ gleich *Null*; zu diesen Zeiten bewegt sich der Apex immer *senkrecht* zum Parallelkreise $\vartheta = \vartheta_0$, wobei also die Schwere zu unmittelbarer Wirkung kommt.

Wenn beim Anfange der Bewegung ein kleiner seitlicher Anstoss zugelassen wird, so ist die Bahn des Apex scheinbar wieder ein Parallelkreis, in Wahrheit aber bewegt sich dieser relativ zu einer regulären Präzessionsbewegung so, dass seine Bahn von einem Punkte in der Nähe jenes auf dem Parallelkreise rollenden Kreises erzeugt wird; je nachdem der Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt, erhält man eine *verkürzte oder verlängerte sphärische Zykloide* (Trochoide)[527]. *A. G. Webster* hat die Bahnen sichtbar gemacht, indem

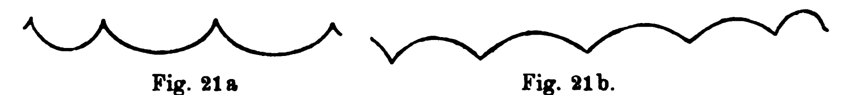


Fig. 21a Fig. 21b.

er an der Kreiselspitze eine winzig kleine elektrische Lampe anbrachte. Die Figuren 21a, b, c sind einige von ihm aufgenommene Photographien[528]; sie lassen den Einfluss von Zufälligkeiten bei der Reibung deutlich erkennen.

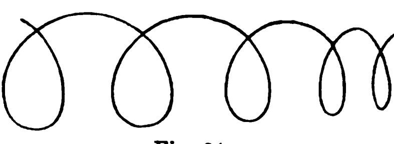


Fig. 21c.

Aus dem Vorstehenden erhellt, dass die pseudoreguläre Präzession eine ziemlich verwickelte Art der Bewegung ist, und so kommt es, dass die zahlreichen Versuche, sie und eine Reihe ähnlicher Erscheinungen (vgl. Nr. **43** dieses Artikels) dem anschaulichen Verständnisse näher zu bringen, teils ganz verfehlt, teils mit mehr oder weniger erheblichen Mängeln behaftet sind.

Ganz verfehlt ist es, wenn man die pseudoreguläre Präzession als reguläre Präzession auffasst und als solche erklären will. Wenn nämlich auch die *Punkte* der Bahnkurve des Apex mit sehr grosser Annäherung in einem Parallelkreise liegen, so sind doch ihre *Tangenten* wesentlich von den Tangenten dieses Kreises verschieden, mit denen sie Winkel bis zu einem Rechten bilden; man hat hier ein schönes Beispiel für den Übergang von einer Kurve zu einer benachbarten Kurve, den man in der Variationsrechnung als *starke Variation* bezeichnet; vgl. II A 8, Nr. **19** (*A. Kneser*) und II A 8a, Nr. **2** (*E. Zermelo* und *H. Hahn*).

527) *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, Kap. V, § 2.
528) Dynamics, p. 288; vergl. auch *E. Merrit*, Am. Phys. Review 1897.

Ein Teil der Autoren begnügt sich damit, die betreffenden Phänomene, wie sie dem unbewaffneten Auge erscheinen, möglichst einfach zu beschreiben. Als sehr nützlich bewährt sich hierbei die von *L. Foucault* angegebene Regel, dass ein in rascher Drehung befindlicher Körper, dem von aussen ein Drehmoment um eine Axe zugeführt wird, sich so bewegt, als ob die Axe der Drehung und die Axe des Momentes das Bestreben hätten, sich in *gleichsinnigen Parallelismus* zu stellen[529]). Diese *Regel* führt allerdings bei vielen Erscheinungen zu einer richtigen qualitativen Darstellung der Vorgänge; es wäre jedoch verkehrt, wenn man ihr den Rang eines mechanischen *Axioms* erteilen wollte.

Endlich beruhen bei anderen Autoren die angeblichen Erklärungen auf Verwechslungen zwischen Figurenaxe, Drehaxe und Impulsaxe; diese liegen zwar bei den betrachteten Bewegungen im Raume nahe zusammen, sind aber doch begrifflich zu trennen; sogar bei *H. v. Helmholtz* findet sich diese Verwechslung[530]).

Für alle diese populären Erklärungen möge noch auf den Bericht verwiesen werden, den *F. Klein* und *A. Sommerfeld* in ihrer Theorie des Kreisels, Kap. V, § 3 gegeben haben; dort stehen auch zahlreiche Litteraturangaben.

4) Der im Vorhergehenden ausdrücklich ausgeschlossene Fall, dass $\vartheta_0 = 0$ ist, dass man es also mit einem *schlafenden Kreisel* zu tun hat, bedarf einer besonderen Untersuchung. Projiziert man die Kreiselspitze auf die Äquatorebene und lässt nur solche Störungen zu, bei denen die Winkelgeschwindigkeit um die Figurenaxe erhalten bleibt, so ergeben sich bei den Vernachlässigungen, die in der Methode der kleinen Schwingungen üblich sind, für die Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die linearen Differentialgleichungen:

$$(25)\qquad A\ddot{\mathfrak{x}} - N_1\dot{\mathfrak{y}} = P\mathfrak{x}, \quad A\ddot{\mathfrak{y}} + N_1\dot{\mathfrak{x}} = P\mathfrak{y}.$$

Die Glieder $-N_1\dot{\mathfrak{y}}$, $+N_1\dot{\mathfrak{x}}$ sind hier die sogenannten *gyroskopischen Terme* (vergl. Nr. **20** b, p. 526 dieses Artikels); sie fallen weg, wenn $r_0 = 0$ ist, und entsprechen daher in der Tat dem Einfluss, den die Gyration des Kreisels auf die kleinen Schwingungen ausübt.

529) *L. Foucault*, Sur la tendance des rotations au parallélisme, Paris C. R. 35 (1852), p. 734; vgl. jedoch schon *J. G. Fr. Bohnenberger*, Ann. Phys. 60 (1817), p. 60. Siehe ferner *G. Sire*, Paris C. R. 88 (1879), p. 23; *A. Lévy*, Rev. d'astron. 5 (1886), p. 445, *E. Guyou*, Paris C. R. 106 (1888), p. 1143, *A. M. Worthington*, Dynamics of rotation, 1. ed. London 1891, 6. ed. 1906, sowie den unterhaltenden Vortrag von *J. Perry*, Spinning tops, London 1890, deutsch von *A. Walzel*: Drehkreisel, Leipzig 1904.

530) *H. v. Helmholtz*, Dynamik, p. 327; vgl. auch *H. Grassmann*, Zeitschr. Math. Phys. 48 (1903), p. 373.

Bei der Integration der Gleichungen (25) sind drei Fälle zu unterscheiden:

1) $N_1^2 > 4AP$,

$$\mathfrak{x} = \lambda \cos \frac{N_1}{2A} t \cdot \sin \frac{\sqrt{N_1^2 - 4AP}}{2A} t, \quad \mathfrak{y} = -\lambda \sin \frac{N_1}{2A} t \cdot \sin \frac{\sqrt{N_1^2 - 4AP}}{2A} t;$$

2) $N_1^2 < 4AP$,

$$\mathfrak{x} = \lambda \cos \frac{N_1}{2A} t \cdot \operatorname{sh} \frac{\sqrt{4AP - N_1^2}}{2A} t, \quad \mathfrak{y} = -\lambda \sin \frac{N_1}{2A} t \cdot \operatorname{sh} \frac{\sqrt{4AP - N_1^2}}{2A} t;$$

3) $N_1^2 = 4AP$,

$$\mathfrak{x} = \lambda t \cos \frac{N_1}{2A} t, \quad \mathfrak{y} = -\lambda t \sin \frac{N_1}{2A} t.$$

Dabei bedeutet λ einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor.

Man hat aus diesen Gleichungen vielfach geschlossen, dass nur in dem Falle 1) die Kreiselspitze in der Nähe des Nord- oder Südpols bleibt, dagegen in den Fällen 2) und 3) sich im Laufe der Zeit immer mehr davon entfernt; in Wahrheit aber liegt hier ein lehrreiches Beispiel dafür vor, wie gefährlich es ist, Vernachlässigungen vorzunehmen, wenn man nicht angeben kann, in welchen Grenzen die dadurch entstehenden Fehler liegen. Die Formeln ergeben allerdings in dem Falle 1) ein angenähert richtiges Bild der Bahn *zu beliebiger Zeit*, in den Fällen 2) und 3) aber tun sie das nur, so lange t *klein* bleibt, und die Bewegung setzt sich später, nach den Sätzen des ersten Abschnittes, als periodisches Pendeln zwischen zwei Parallelkreisen fort, genau ebenso wie im Falle 1); bei allen diesen Bewegungen ist der obere Parallelkreis in einen Punkt, den Nordpol, ausgeartet (Fig. 22). Die genauere Untersuchung zeigt jedoch folgenden Umstand. Während beim *starken* Kreisel der untere Parallelkreis, wenn man die Störung verkleinert, dem Pole unbeschränkt näher kommt, findet beim *schwachen* Kreisel eine unstetige Änderung in der Lage dieses Kreises statt; der untere Parallelkreis springt bei der geringsten Störung sogleich vom Pol, auf den er sich ursprünglich reduzierte, in einen Kreis von endlicher Ausdehnung über. Man wird daher nach der üblichen Erklärung beim starken Kreisel die Drehung um die Vertikale *stabil*, beim schwachen *labil* zu nennen haben. Praktisch kann freilich die *labile* Bewegung mit einer *stabilen* gleichwertig sein, wenn nämlich jener

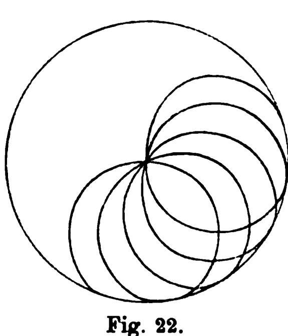


Fig. 22.

Kreis von endlicher Ausdehnung selbst sehr klein ist, und ebenso wird die *stabile* Bewegung praktisch *labil* sein, wenn der Halbmesser des unteren Kreises mit wachsender Grösse der Störung rasch zunimmt[581]).

5) *Einfluss der Reibung.* Um zu bewirken, dass ein starrer Körper, der in bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe, die Figurenaxe, kinetische Symmetrie besitzt, sich um einen Punkt O dieser Axe dreht, hat man Vorrichtungen verschiedener Art angewandt. Wie man aber auch verfahren mag, so gelingt es doch immer nur angenähert die Voraussetzungen zu erfüllen, unter denen man es mit einem idealen *schweren symmetrischen Kreisel* zu tun hat. Bei der Cardanischen Aufhängung hat man zum Beispiel im Grunde ein mehrgliedriges System starrer Körper, und nur wenn die Massen der Ringe sehr klein gegen die Masse des Kreiselkörpers sind, darf man das System mit Annäherung durch einen symmetrischen Kreisel ersetzen; aber auch dann wird die Bewegung durch die Reibung gestört, die in den Lagern stattfindet. Wird aber die unveränderliche Lage eines Punktes O der Figurenaxe dadurch gesichert (Fig. 23), daß diese Axe unten in eine kleine Halbkugel ausläuft, die in einer Pfanne von der Gestalt eines flachen Kreiskegels läuft, so findet wiederum an den Berührungsstellen Reibung statt.

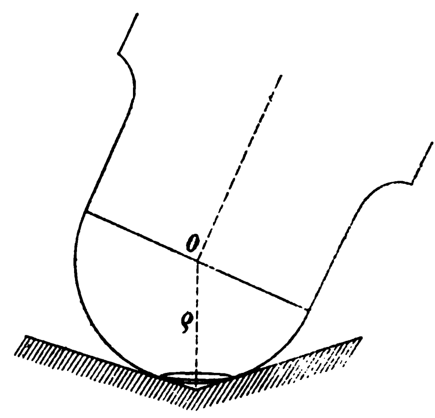


Fig. 23.

Wenn man sich bei den Versuchen auf kleine Zeiträume beschränkt, so wird die wirkliche Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels von der idealen nur wenig abweichen. Allein im Laufe der Zeit wirkt die Reibung zunächst in der Weise, dass die kleinen Schwingungen bei der pseudoregulären Präzession ausgelöscht werden, sodass die Bewegung sich einer regulären Präzession nähert. Alsdann beginnt die sogenannte *säkulare* Wirkung der Reibung, und es machen sich auch andere störende Kräfte immer stärker geltend. Eine Untersuchung des gesamten Bewegungsverlaufes unter Berücksichtigung der gleitenden und bohrenden Reibung, des Luftwider-

581) *F. Klein*, Am. Math. Soc. Bull. (2) 3 (1897), p. 129 = Nouv. ann. (3) 16 (1897), p. 323; *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, Kap. V, § 4, § 8.

standes, der Elastizität des Kreiselmaterials und der Unterlage kann freilich nur unter Beschränkung auf eine *qualitative* Diskussion in Angriff genommen werden[532]). Es ergiebt sich, dass die gleitende Reibung die Figurenaxe langsam aufrichtet, während die bohrende Reibung sie umgekehrt aus der Vertikalen zu entfernen sucht. So lange die Neigung der Figurenaxe beträchtlich ist, überwiegt die gleitende Reibung; ist aber die Axe nahezu vertikal geworden, so wird die senkende Wirkung der bohrenden Reibung sehr klein, und diese verzehrt im wesentlichen, wie die gleitende Reibung, nur die Energie der Drehung des Kreisels. Liegt der Unterstützungspunkt O oberhalb des Schwerpunktes S, so wird die Bewegung schliesslich instabil, und der Kreisel fällt um.

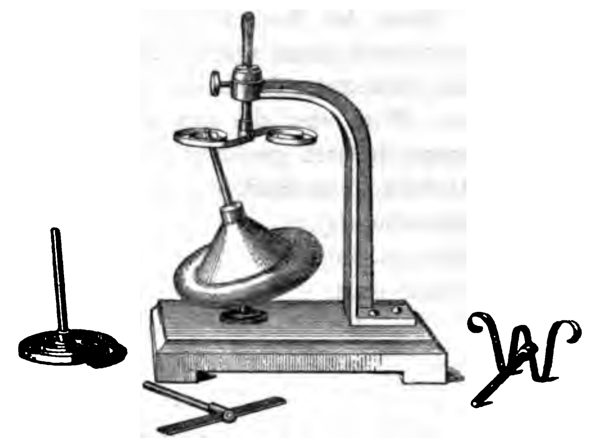


Fig. 24.

Zahlreich sind die Versuche, für die Zwecke des Unterrichts das Aufrichten der Kreiselaxe in einfacher Weise zu erklären. Der Natur der Sache nach konnten diese Versuche nur mit begrenztem Erfolge gelingen, und wenn bei einigen von der Reibung abgesehen wird, sind sie von vorn herein als missglückt zu bezeichnen[533]).

532) *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, Kap. VII; vgl. auch die in der Anmerkung 560 angeführte Litteratur.

533) Eine Erklärung ohne Berücksichtigung der Reibung giebt z. B. *H. B. Lübsen*, Mechanik 2, p. 52. Aus der umfangreichen Litteratur seien hier nur genannt die kritischen Abhandlungen von *Ph Gilbert*, Bruxelles Soc. scientif. Ann. 2 B (1878), p. 255 und *M. Koppe*, Zeitschr. phys. chem. Unterr. 4 (1890), p. 70; 7 (1894), p. 186; 9 (1896), p. 127 Vgl. auch Nr. **35** b 3) dieses Artikels; in Nr. **43** d wird über den schweren symmetrischen Kreisel *mit zwei Freiheitsgraden* und das bei ihm streng geltende Prinzip von dem homologen Parallelismus der Drehaxen berichtet werden.

6) Anhangsweise soll hier noch über einen Kreiselapparat berichtet werden, bei dem die Reibung eine entscheidende Bedeutung hat, nämlich über den sogenannten *perimetrischen Kreisel* von *G. Sire*; siehe Fig. 24. Der symmetrische Kreisel besteht hier aus einem dünnen zylindrischen Stabe, der die Figurenaxe darstellt und einem daran befestigten glockenförmigen Kreiselkörper; der Schwerpunkt liegt unterhalb des festen Punktes. Ferner ist eine im Raume feste horizontale Scheibe angebracht, die mit einem Rande beliebiger Gestalt versehen ist. Wird jetzt der Kreisel in starke Drehung versetzt und die Figurenaxe an den Rand der Scheibe gelegt, so wird sie bei der gewählten experimentellen Anordnung vermöge der Reibung auf der Randkurve rollen und allen Krümmungen der Kurve folgen, wenn diese nicht zu scharf sind; indem man den Druck bestimmt, den der Kreisel an dem Rande erfährt, ergiebt sich, ob und wann die Axe den Rand verlässt[534]).

36. Schwerer unsymmetrischer Kreisel. Dreht sich ein beliebiger schwerer starrer Körper vom Gewichte G um den festen Punkt O, und werden die Koordinaten seines Schwerpunktes in Bezug auf das im Körper feste System der x, y, z (das von den Hauptaxen in O gebildet werden möge) mit x_0, y_0, z_0 bezeichnet, so lauten die zugehörigen *Euler*schen Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} - (B - C)qr = G(z_0c_2 - y_0c_3), \\ B\dfrac{dq}{dt} - (C - A)rp = G(x_0c_3 - z_0c_1), \\ C\dfrac{dr}{dt} - (A - B)pq = G(y_0c_1 - x_0c_2); \end{cases}$$

dabei sind c_1, c_2, c_3 die Richtungscosinus der nach oben gerichteten Vertikalen. Bei den Gleichungen (1) kennt man von vornherein die beiden ersten Integrale:

$$(2)\qquad \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = -G(x_0c_1 + y_0c_2 + z_0c_3) + h,$$

$$(3)\qquad Ac_1p + Bc_2q + Cc_3r = k,$$

mit den Integrationskonstanten h und k; (2) ist das Integral der

534) *G. Sire*, Mém. de la soc. d'émulation du Doubs, 1861; *A. H. Resal*, Traité de cinématique pure, Paris 1862, p. 363; *D. Bobylew*, Soc. franç. de phys. Séances 1884, p. 134; Analytische Mechanik 2 (1888), p. 656 (russisch); Moskau, Arbeiten der phys. Sektion d. Kais. Russ. Ges. der Freunde der Naturkunde 11 (1901), Heft 1, p. 11 (russisch); Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 354. Einen Apparat verwandter Art hat auch *N. Joukowski* konstruiert, Verhandl. des I. intern. Math. Kongress Zürich 1897, Leipzig 1898, p. 272.

lebendigen Kraft und (3) der Satz von der Erhaltung der Flächen in bezug auf die Vertikale oder, anders ausgedrückt, von der Konstanz der Vertikalkomponente des Impulsvektors. Wenn sich noch ein *drittes* erstes Integral ermitteln lässt, so kann man die Komponenten der instantanen Drehung p, q, r durch die Eulerschen Winkel ausdrücken, kennt also den Drehungszustand des Körpers, sobald man dessen Lage als gegeben betrachtet. Um die Lage des Körpers als Funktion der Zeit zu ermitteln und damit das Problem vollständig zu erledigen, hat man die Werte von p, q, r in die kinematischen Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{cases} p = \sin\vartheta \sin\varphi \dfrac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \dfrac{d\vartheta}{dt}, \\ q = \sin\vartheta \cos\varphi \dfrac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \dfrac{d\vartheta}{dt}, \\ r = \cos\vartheta \dfrac{d\psi}{dt} + \dfrac{d\varphi}{dt} \end{cases}$$

einzusetzen und diese Differentialgleichungen erster Ordnung für ϑ, ψ, φ zu integrieren.

Nun folgt aber aus den beiden ersten kinematischen Gleichungen:

$$(5)\qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{p \sin\varphi + q \cos\psi}{\sin\vartheta},$$

mithin ist die Länge der Knotenlinie durch eine Quadratur bestimmt, sobald man p, q; ϑ, φ als Funktionen der Zeit kennt. Beachtet man jetzt, dass die Koordinate ψ in den Ausdrücken für die Richtungscosinus c_1, c_2, c_3 nicht auftritt und dass daher ψ auch in den Eulerschen Gleichungen (1) nicht vorkommt, so erkennt man, dass die Integration des Systems der sechs Differentialgleichungen (1) und (4) geleistet ist, sobald man aus den Gleichungen (1) und den Poissonschen Gleichungen (vgl. Nr. 28c):

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{dc_1}{dt} = rc_2 - qc_3, \\ \dfrac{dc_2}{dt} = pc_3 - rc_1, \\ \dfrac{dc_3}{dt} = qc_1 - pc_2 \end{cases}$$

p, q, r; ϑ, φ als Funktionen der Zeit bestimmt hat; man kann die Gleichungen (1) und (6) auch als Differentialgleichungen für die sechs Funktionen p, q, r; c_1, c_2, c_3 auffassen, bei denen in dem ersten Integral:

$$(7)\qquad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \text{const.}$$

die Konstante den Wert Eins haben soll.

Wie in Nr. 35a 1) dieses Artikels angegeben wurde, hat sich bereits *J. L. Lagrange* 1788 mit der Frage nach einem *dritten* ersten

Integral der Gleichungen (1) beschäftigt und dabei dem *Eulerschen Fall* der kräftefreien Bewegung (Nr. 34) einen neuen Fall, den bereits ausführlich behandelten *Fall des schweren symmetrischen Kreisels* (Nr. 35), hinzugefügt. Bei den späteren Untersuchungen über das dritte Integral ist die Auffassung von *L. Poinsot* massgebend gewesen, dass man in der Dynamik bei schwierigeren Problemen darauf ausgehen solle, besondere Fälle zu finden, in denen sich die Untersuchung mittels elementarer Funktionen, ja womöglich mittels *algebraischer* Funktionen und den zugehörigen Integralen erledigen lässt. Wie in diesem Artikel wiederholt hervorgehoben worden ist, empfiehlt es sich in der Tat, zuerst *einfache* Spezialfälle aufzusuchen und sich durch ihre Untersuchung eine Übersicht über die möglichen Arten der Bewegung zu verschaffen. Allein es fragt sich, was man unter einfachen Fällen zu verstehen hat, und da erscheint es zweifelhaft, ob man die Begriffe *algebraisch* und *einfach* als gleichbedeutend ansehen darf. Freilich hat man dem dritten Integral die Bedingung des algebraischen Charakters immer nur in bezug auf die Komponenten der Drehgeschwindigkeit p, q, r auferlegt und in bezug auf die darin vorkommenden Eulerschen Winkel bloss die Voraussetzung gemacht, dass das Integral eine analytische Funktion dieser Grössen sein soll, dafür aber auf der anderen Seite verlangt, dass die Zeit in dem dritten Integral nicht explizite vorkommen soll. Ob man unter diesen Umständen berechtigt ist, die bei den genannten wesentlichen Beschränkungen gewonnenen Ergebnisse, über die sogleich berichtet werden soll, dahin auszulegen, dass *es bei dem Problem der Drehung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt bei allgemeinen Anfangsbedingungen ausser den drei Fällen von Euler, Lagrange* und *Kowalewski kein einfaches drittes Integral gebe*, möge dahin gestellt bleiben.

H. Poincaré[535]) hat für das Vorhandensein eines dritten von den Integralen (2) und (3) unabhängigen, die Zeit nicht explizite enthaltenden, in den Geschwindigkeitskomponenten p, q, r *algebraischen Integrales* die *notwendige* Bedingung hergeleitet, dass entweder $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ist (*Eulers* kräftefreier Fall, das dritte Integral ist linear in p, q, r) oder dass zwei der Hauptträgheitsmomente, etwa A und B, einander gleich werden. Ist ausserdem $x_0 = y_0 = 0$, so erhält man den in Nr. 35 betrachteten altbekannten *Lagrange*schen Fall der Kreiselung eines schweren Umdrehungskörpers um einen festen Punkt in der Figurenaxe; das dritte Integral ist hier auch linear.

535) Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste 1, Paris 1892; vgl. auch *Ed. Husson*, Paris C. R. 141 (1905), p. 821.

Diesem Falle hat im Jahre 1888 *Sonja Kowalewski* einen neuen Fall hinzugefügt, bei dem $A = B = 2C$ und $z_0 = 0$ ist, und wo das dritte Integral vom vierten Grade in p, q, r wird[536]). Damit sind aber auch, wie *Ed. Husson* neuerdings bewiesen hat, alle Möglichkeiten erschöpft[537]).

Man kann jedoch der Frage eine andere Wendung geben. Bei der Kreiselung eines starren Körpers kommen im ganzen 12 Konstanten in Betracht: die 6 *Konstanten der Massenverteilung* x_0, y_0, z_0; A, B, C und die 6 *Konstanten der Anfangsbewegung*, nämlich die 6 Integrationskonstanten der Differentialgleichungen (1) und (4). Bei den drei Fällen von *Euler*, *Lagrange* und *Kowalewski* reduzieren sich die Konstanten der Massenverteilung auf drei willkürliche Grössen, während die sechs Konstanten der Anfangsbewegung beliebig bleiben. Denselben Grad der Allgemeinheit wird also ein Kreiselproblem haben, bei dem sich die Gesamtheit der 12 Konstanten auf 9 willkürliche Grössen reduziert; damit man neue Fälle erhält, wird man die Konstanten der Anfangsbewegung spezialisieren können[538]).

Hierher gehört ein von *W. Hess* behandelter Fall[539]). Für die Massenverteilung um den festen Punkt gelten bei ihm die zwei Bedingungen:

$$y_0 = 0, \quad x_0^2(1/B - 1/C) = z_0^2(1/A - 1/B);$$

nach *N. Joukowskij*[540]) besagen sie, dass der Schwerpunkt S auf dem

536) Acta math. 12 (1889), p. 177. Ein ausführlicher Bericht über die zahlreichen Arbeiten, die sich auf den *Kowalewski*schen Fall beziehen, wird in IV 18 (*P. Stäckel*) gegeben werden.

537) Paris C. R. 141 (1905), p. 100; Thèse, Paris 1905; vgl. auch die Versuche von *O. Tedone*, Nuovo Cimento (4) 1 (1895), p. 220, 269, 353 und *S. Tschaplygin*, Moskau, Phys. Sektion d. Kais. Ges. d. Freunde der Naturkunde 9 (1895), Heft 2, p. 15 (russisch). Die Behauptung *R. Liouvilles*, Acta math. 20 (1897), p. 239, dass die Annahmen $z_0 = 0$, $A = B = \frac{2C}{n}$, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, auf algebraische Integrale führen sollten, hat sich als irrtümlich herausgestellt; nur die Werte $n = 1$ (Fall von *Kowalewski*) und $n = 2$ (Fall von *Lagrange* für eine homogene Kugel) sind zulässig.

538) Vgl. *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Kreisel, p. 378.

539) Math. Ann. 37 (1890), p. 153; vergl. auch *R. Liouville*, Paris C. R. 120 (1895), p. 903, 122 (1896), p. 1050. Die Untersuchung des *Hess*schen Falles ist dann von verschiedenen russischen Mathematikern weitergeführt worden; ausführliche Litteraturangaben findet man bei *P. A. Nekrassoff*, Math. Ann. 47 (1896), p. 445—447.

540) Jahresber. d. D. M.-V. 3 (1894), p. 62; vergl. auch *A. Sommerfeld*, Gött. Nachr. 1898, p, 83.

Lote liegt, das in dem festen Punkte O auf einer der Kreisschnittebenen des reziproken Trägheitsellipsoids

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$$

errichtet ist. Zu dieser Bedingung kommt die weitere Beschränkung, dass der Impulsvektor zu Anfang in der genannten Kreisschnittebene durch O liegen soll, so dass im Ganzen wieder 9 willkürliche Konstanten vorhanden sind. Während der Bewegung verharrt der Impulsvektor in jener Ebene, und diese Eigenschaft ist für den *Hess*schen Fall charakteristisch, das heisst: fragt man, unter welchen Bedingungen der Impulsvektor dauernd in einer *im Körper* festen Ebene verbleibt, so wird man gerade zu dem *Hess*schen Falle geführt[541]). Stellt man diese Frage im besonderen für den schweren symmetrischen Kreisel, so gelangt man zu der sphärischen Pendelbewegung, so dass also der *Hess*sche Fall auch als eine Verallgemeinerung dieser elementaren Bewegung aufgefasst werden kann. Wie *N. Joukowskij* gezeigt hat, geht die Analogie noch weiter; der Schwerpunkt des *Hess*schen Pendels bewegt sich nämlich genau so, wie der Massenpunkt eines sphärischen Pendels.

Von besonderem Interesse ist der Fall, dass über die Massenverteilung gar keine Voraussetzung gemacht, dass also die Konstanten x_0, y_0, z_0; A, B, C als willkürliche Grössen angesehen werden. *O. Staude*[542]) hat gezeigt, dass man bei einem solchen *unsymmetrischen Kreisel* stets eine Schar von ∞^2 Bewegungen angeben kann. Die Bewegung des Körpers besteht dabei in einer gleichförmigen Drehung um eine in ihm feste, vertikale Axe. Die Axen, um die solche permanente Drehungen stattfinden, bilden zusammengenommen einen

541) Vgl. auch die Behandlung des *Hess*schen Falles bei *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Kreisel, p. 378—386; die entsprechende Untersuchung für den *Spielkreisel* (vgl. Nr. 37 dieses Artikels) hat *G. Kolossoff* durchgeführt, Moskau, Arbeiten der phys. Sektion der Kais. Russ. Ges. der Freunde der Naturkunde 9 (1898), Heft 2, p. 11 (russisch); Göttingen Nachr. 1898, p. 80; Mess. of math. (2) 30 (1901), p. 174.

542) J. f. Math. 113 (1894), p. 318. *E. J. Routh* hatte bereits gefunden, dass bei einem schweren Kreisel reguläre Präzession um die Vertikale nur möglich ist, wenn man entweder $A = B$ hat (symmetrischer Kreisel, siehe Nr. 35) oder bei ungleichen Hauptträgheitsmomenten, wenn sich die reguläre Präzession auf eine permanente Rotation um die Vertikale reduziert, siehe Dynamik 2, p. 163. Vgl. ferner *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Kreisel, p. 386—390, sowie *L. Lecornu*, Bull. soc. math. de France 30 (1902), p. 71. *O. Staude* hat später die Untersuchung nach der geometrischen Seite weitergeführt, Leipzig Ber. 51 (1899), p. 219.

Kegel zweiter Ordnung:

$$(8) \qquad (B - C)x_0yz + (C - A)y_0zx + (A - B)z_0xy = 0.$$

Jede erzeugende Gerade dieses Kegels liefert, wenn sie mit einem bestimmten ihrer beiden Enden vertikal nach oben gestellt wird, eine permanente Rotationsaxe, sobald der Körper um sie mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit oder der entgegengesetzten Winkelgeschwindigkeit gedreht wird[543]). Im besonderen gehören zu den permanenten Axen die Hauptaxen von O, für die jedoch die Drehgeschwindigkeit unendlich gross wird[544]). Auch die Gerade OS ist eine permanente Axe, und zwar mit der Geschwindigkeit Null; für alle übrigen Axen hat die Winkelgeschwindigkeit endliche, von Null verschiedene Werte. *Bei besonderer Massenverteilung treten jedoch Abänderungen ein;* alle diese Ausnahmefälle hat *O. Staude* in erschöpfender Weise ermittelt und diskutiert. Die Gleichung (8) ist z. B. bei dem *kräftefreien Kreisel* identisch erfüllt; jede Axe durch S ist hier eine permanente Drehaxe, jedoch im allgemeinen mit der Winkelgeschwindigkeit Null, dagegen wird bei den Hauptaxen der Wert der Winkelgeschwindigkeit unbestimmt. Auch bei dem *schweren symmetrischen Kreisel* ist jede Axe durch den festen Punkt O permanente Axe; vgl. Nr. **35**b 1).

Im Anschluss an *O. Staude* hat *B. K. Mlodzejowskij*[545]) untersucht, wann ein der Schwere unterworfener starrer Körper sich um einen festen Punkt O so bewegen kann, dass die Axe der instantanen Drehung im Körper fest bleibt, wobei aber die Drehgeschwindigkeit um diese Axe nicht konstant zu sein braucht. Mit Hilfe der Integralgleichungen (2) und (3) erschliesst er, dass die Drehgeschwindigkeit im allgemeinen konstant sein muss, was auf den *Staude*schen Fall zurückführt. Soll aber die Drehgeschwindigkeit von der Zeit abhängen, so muss der Schwerpunkt S in einer der Hauptebenen durch O liegen; die Bewegung des Körpers besteht alsdann in einer Drehung um die dritte, horizontal zu legende Hauptaxe, die nach Art des physikalischen Pendels erfolgt; vgl. Nr. **35**b 1).

---

543) Die Frage nach der Stabilität dieser permanenten Drehaxen ist noch nicht endgültig beantwortet worden; einen Versuch machte *J. Hadamard*, Assoc. franç. Bordeaux 24 (1895), p. 1.

544) Diesen besonderen Fall hatte vor *Staude* schon *E. Budde*, Berlin Phys. Ges. Mitt. 9 (1890), p. 15, betrachtet und Folgerungen für benachbarte Bewegungen gezogen.

545) Moskau, Arbeiten der phys. Sektion der Kais. Russ. Ges. der Freunde der Naturkunde 7 (1894), Heft 1, p. 46 (russisch); vgl. auch *T. Sludskij*, Moskau, Math. Sammlung 17 (1894) (russisch).

Merkwürdiger Weise hat neuerdings *P. A. Schiff*[545a]) gefunden, dass man bei dem schweren unsymmetrischen Kreisel mittels algebraischer Operationen und zweier Quadraturen sogar eine Schar von ∞^5 Bewegungen angeben kann Sie sind dadurch charakterisiert, dass bei jeder von ihnen der *Impulsvektor konstante Länge* behält; bei der Bewegung beschreibt dieser *im Raume* um die Vertikale einen Kreiskegel von beliebiger Öffnung. Die permanenten Drehungen sind unter den *Schiff*schen Bewegungen enthalten.

Verschiedene Fälle, in denen *die Massenverteilung und die Anfangsbedingungen* spezialisiert sind, haben in neuester Zeit russische Mathematiker, besonders *W. Stekloff*, *D. Gorjatschoff* und *S. Tschaplygin* angegeben[546]); diese Fälle haben jedoch mehr ein analytisches Interesse, und es muss für sie auf IV 13 (*P. Stäckel*) verwiesen werden.

Endlich hat man unsere sehr lückenhaften Kenntnisse von der Bewegung eines allgemeinen schweren Kreisels dadurch zu erweitern gesucht, dass man Fälle betrachtete, die in der Nachbarschaft bekannter Fälle liegen. So hat man gefragt, wann kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage möglich sind, und die Bedingungen für ihre Existenz aufgestellt[547]). Wichtiger ist es, dass nach *G. Koenigs* bei einem schweren Kreisel, dessen Unterstützungspunkt in der Nähe seines Schwerpunktes liegt, stets unendlich viele Anfangsbedingungen vorhanden sind, für die p, q, r, c_1, c_2, c_3, wie beim *Euler*schen Fall, periodische Funktionen der Zeit werden[548]). Man wird daher hoffen dürfen, dass sich auch aus den Ergebnissen in dem *Lagrange*schen Fall Schlüsse auf das Verhalten von Kreiseln mit kleiner Asymmetrie ziehen lassen; vielleicht wird man hier zum Ziele gelangen, indem man ein Näherungsverfahren anwendet, das der Methode der allgemeinen Störungen bei den Astronomen nachgebildet ist[549]). Wenn erst noch mehr Untersuchungen nach dieser Richtung hin angestellt sein werden, wird man nach dem Vorschlage von *F. Klein* und

545a) Moskau, Math. Sammlung 24 (1903), p. 169 (russisch).

546) Siehe den Bericht von *R. Marcolongo*, Palermo, Circ. mat. Rend. 16 (1902), p. 349; vgl. ferner die Untersuchungen von *P. A. Schiff*, Moskau, Math. Samml. 24 (1903), p. 169 (russisch) und von *P. Burgatti*, Ann. di mat. (3) 12 (1905), p. 81.

547) *J. L. Lagrange*, Mécanique analytique, Ausgabe von *Bertrand* 2, p. 234; vgl. auch *R. S. Ball*, Dublin Irish Trans. 24 (1869), p. 593; *C. Jordan*, J. de math. (3) 1 (1875), p. 1 und *E. J. Routh*, Dynamik 1, p. 388; 2, p. 161.

548) Paris C. R. 122 (1896), p. 1048; vgl. auch *G. Kobb*, Toulouse, Fac. Ann. (2) 1 (1899), p. 5.

549) Einen Versuch dazu machte *M. Winkelmann*, Dissertation Göttingen 1904.

A. Sommerfeld dazu übergehen können, die Verbindung zwischen den verschiedenen bekannten Fällen und ihren Nachbarfällen durch eine Art von Interpolation herzustellen[550]). Auch die Andeutungen, die *E. Picard*[551]) über die Verwendung seiner Methode der successiven Approximationen für die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung des unsymmetrischen schweren Kreisels gemacht hat, verdienten genauer durchgeführt zu werden.

37. Auf horizontaler Ebene spielender Kreisel (Spielkreisel). Im gewöhnlichen Leben versteht man unter einem *Kreisel* einen homogenen Rotationskörper, der in eine Spitze ausläuft; durch Abziehen einer Schnur bringt man den Kreisel in rasche Drehung um die Figurenaxe und setzt ihn mit der Spitze auf eine horizontale glatte Ebene. Man hat demnach diesen auf horizontaler Ebene spielenden Kreisel oder kurz den *Spielkreisel* wohl zu unterscheiden von dem *Kreisel*, von dem in den vorhergehenden Nummern die Rede war; dort bedeutete nämlich das Wort Kreisel einen starren Körper von kinetischer Symmetrie in bezug auf eine Figurenaxe, der sich um einen in dieser Axe befindlichen Punkt dreht, oder in noch allgemeinerer Bedeutung des Wortes irgend einen starren Körper, der sich um einen festen Punkt dreht. Allerdings wird sich herausstellen, dass zwischen den Bewegungen des schweren symmetrischen Kreisels und des Spielkreisels eine grosse Ähnlichkeit besteht, so dass eine Reihe von Betrachtungen, die in Nr. 35 dieses Artikels angestellt wurden, sich leicht auf den Spielkreisel übertragen lässt.

1) Die Erfahrung zeigt, dass die Figurenaxe eines rasch rotierenden Spielkreisels sich aus der ursprünglichen geneigten Lage der Schwere entgegen aufrichtet, sodass sie schliesslich fast genau vertikal steht. In permanenter Drehung um die Axe verharrt der Kreisel längere Zeit als sogenannter *schlafender Kreisel* (*sleeping top, toupie dormante*). Schliesslich wird die Energie der Drehbewegung durch die Reibungswiderstände stark vermindert, und unter unregelmässigen Zuckungen fällt der Spielkreisel um; vgl. die ähnlichen Erscheinungen, die für den schweren symmetrischen Kreisel in Nr. 35b 5) beschrieben worden sind.

Diese paradoxen Bewegungen haben bereits die Aufmerksamkeit *J. A. Segners* (1755) auf sich gezogen, der auch ganz richtig bemerkt hat, dass zur Erklärung des Aufrichtens der Kreiselaxe die Reibung benutzt werden müsse[552]). Bald darauf haben *J. d'Alem-*

---

550) Kreisel, p. 390.

551) Torino Atti 34 (1898), p. 6.

552) Specimen theoriae turbinum, Halle 1755. Das Wort *turbo* bedeutet

bert[553]) und *L. Euler*[554]) die Differentialgleichungen der Bewegung angesetzt, zunächst ohne, dann auch mit Berücksichtigung der gleitenden Reibung.

Es handelt sich bei dem Spielkreisel um einen starren Körper mit 5 Graden der Freiheit. Um die zugehörigen Lagekoordinaten zu gewinnen, wähle man die feste Ebene als $\xi\eta$-Ebene und lasse die ζ-Axe vertikal nach unten gehen. Das im Körper feste System der x, y, z habe den auf der Figurenaxe liegenden Schwerpunkt S zum Anfangspunkt, und die z-Axe möge mit der Figurenaxe in der Richtung von S nach der Kreiselspitze O zusammenfallen; die Strecke OS habe die Länge l. Als Lagekoordinaten nehme man die drei *Euler*schen Winkel ϑ, ψ, φ, die die Lage des Kreiselkörpers gegen die Axen der ξ, η, ζ festlegen, und die Koordinaten ξ_0, η_0 des Schwerpunktes; die dritte Koordinate ζ_0 ist mit der Neigung der Figurenaxe gegen die Vertikale ϑ durch die Gleichung

$$\zeta_0 = l \cos\vartheta = l c_3 \tag{1}$$

verknüpft. Als äussere Kraft wirkt die Schwere. Fügt man ihr die Reaktion R der Ebene hinzu, die eine in O angreifende, vertikal nach oben gerichtete Einzelkraft ist, so darf man das System als frei ansehen und erhält auf die bekannte Art die 6 Differentialgleichungen der Bewegung, aus denen sich R leicht eliminieren lässt. Um die gleitende Reibung zu berücksichtigen, wird noch eine Reibungskraft eingeführt, die in O angreift und deren Richtung der Richtung entgegengesetzt ist, in der sich die Kreiselspitze in der festen Ebene bewegt. *Euler* gesteht, dass er „nicht im Stande sei, aus den so gewonnenen Gleichungen etwas zu erschliessen, woraus man die Natur der Bewegung erkennen könne“, und *d'Alembert* ist „zufrieden, das Problem auf eine einfache Aufgabe der Analysis zurückgeführt zu haben“.

2) Erst *S. D. Poisson* hat 1811 die Differentialgleichungen der Bewegung unter der Voraussetzung integriert, dass keine Reibung stattfindet, und einen wichtigen Spezialfall diskutiert[555]). Er verfährt dabei rein rechnerisch. Wenn man aber auch die anschauliche Be-

---

hier Kreisel; es findet sich schon bei *Joh. Bernoulli,* Acta erudit. Lips. 1715, p. 242 = Opera 2, p. 187, der jedoch darunter einen starren Körper versteht, der sich um eine *feste Axe* dreht.

553) Opuscules math. 1, Paris 1761, p. 100; 5, Paris 1768, p. 489 (verfasst 1762).

554) Theoria motus, Greifswald 1765 (verfasst 1760), Kap. 14 und 17, und Supplementum, Kap. 4.

555) Mécanique, 1. éd., Paris 1811, 2, p. 198; 2. éd., Paris 1833, 2, p. 214.

deutung der Gleichungen ins Auge fasst[556]), lässt sich sein Verfahren folgendermassen beschreiben.

Die äusseren Kräfte sind äquivalent einer vertikal gerichteten Einzelkraft $R - mg$ und einer Drehkraft, deren Axe horizontal liegt und deren Grösse gleich dem Moment von R um S ist. Wendet man die Impulssätze an (siehe Nr. 29 dieses Artikels), so folgt zunächst für den Schiebestoss des Impulses, dass Ξ_1 und H_1 konstant sind. Mithin bewegt sich die Horizontalprojektion des Schwerpunktes gleichförmig in gerader Linie, und sieht man von dieser Bewegung ab, so wird der Schwerpunkt selbst nur mehr auf einer festen vertikalen Geraden, die man zur ζ-Axe machen kann, auf und nieder gehen. Die dritte Komponente Z_1 des Schiebestosses liefert die Gleichung

$$(2) \qquad m\ddot{\zeta}_0 = R - mg;$$

aus ihr lässt sich die Reaktion R berechnen. Weiter ist von den Komponenten des Drehstosses N_1 konstant, etwa gleich n, und dasselbe gilt von N_1, also auch von r. Die Konstanz von r lässt sich übrigens, da $A = B$ ist, sofort aus der dritten *Euler*schen Gleichung erschliessen. Die beiden anderen *Euler*schen Gleichungen aufzustellen ist nicht nötig, da schon der Satz der lebendigen Kraft unter Berücksichtigung der Konstanz von N_1 und N_1 zu einer Gleichung führt, die nur die Neigung ϑ und deren Ableitung nach der Zeit enthält. Die lebendige Kraft des Spielkreisels setzt sich nämlich zusammen aus der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes und der drehenden Bewegung um die instantane Axe durch S. Diese aber hat denselben Ausdruck, wie die lebendige Kraft des symmetrischen Kreisels (siehe Nr. 35 dieses Artikels), und jene unterscheidet sich von $\frac{1}{2}m\dot{\zeta}_0^2$ nur um eine Konstante. Da man auch hier unbeschadet der Allgemeinheit $A = B = C$ setzen, also auf den Kugelkreisel spezialisieren darf (vgl. Nr. 35a 3) dieses Artikels), so ergiebt sich schliesslich für $c_3 = u$ die Differentialgleichung

$$(3) \qquad \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{2Ah(1-u^2) - 2Amglu(1-u^2) + 2nN_1u - N_1^2 - n^2}{A^2 + Aml^2(1-u^2)},$$

aus der man t durch eine Quadratur als Funktion von ϑ erhält. Das Zusatzglied $\frac{1}{2}m\dot{\zeta}_0^2$ bewirkt also, dass man nicht mehr, wie beim schweren symmetrischen Kreisel elliptische, sondern hyperelliptische Integrale in u bekommt. Vermöge der kinematischen Gleichungen wird schliesslich auch die Länge der Knotenlinie ψ und das Azimuth φ je durch eine Quadratur als Funktionen von ϑ bestimmt.

556) Vgl. *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, p. 514.

3) Aus den so gewonnenen Formeln lassen sich, wie bei dem schweren symmetrischen Kreisel, sofort gewisse Periodizitätseigenschaften der Bewegung erschliessen; die genauere Untersuchung der Bewegung verlangt jedoch höhere Hilfsmittel[557]). *Poisson* wendet sich daher sogleich zu einem besonderen Falle; er fragt nämlich, ob es Bewegungen des Spielkreisels gebe, bei denen die Neigung der Figurenaxe ϑ nahezu konstant bleibt, so dass man die Bewegung des Spielkreisels als Schwingung um eine reguläre Präzession ansehen kann. Setzt man dementsprechend $\vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon$, wo ε eine kleine Grösse bedeutet, deren Quadrat vernachlässigt werden darf, so führt die in Nr. 9 dieses Artikels auseinandergesetzte Methode zu dem Satze, dass eine solche pseudoreguläre Präzession nur dann eintreten kann, wenn die Komponente des Drehstosses nach der Figurenaxe N_1 sehr gross ist, wenn also dem Spielkreisel anfänglich eine starke Drehung um die Figurenaxe beigebracht worden ist. In diesem Falle erhält man die Bahnkurve der Kreiselspitze, indem man auf einem Kreise zahlreiche kleine Zacken aufsitzen lässt. Wegen ihrer Kleinheit und wegen der Schnelligkeit, mit der diese Zacken durchlaufen werden, entziehen sich die entsprechenden Nutationen der groben Beobachtung, und die Bewegung erscheint als reguläre Präzession; die Analogie mit den Bewegungen eines schweren symmetrischen Kreisels ist unverkennbar[558]).

Die Bahn der Kreiselspitze wird durch den Kreisel selbst aufgezeichnet, wenn man eine berusste Spiegelglasplatte als Unterlage benutzt. Die Figuren 25 und 26 auf der folgenden Seite sind Negative von Originalen, die *Lord Kelvin* und *F. Klein* auf diese Art erhalten haben[559]).

Man erkennt, dass statt des Kreises eine sich verengernde Spirale entsteht; dass die Windungen der Spirale nach der Seite auseinandergezogen sind, ist die Wirkung eines Anfangsstosses oder vielleicht auch einer geringen Neigung der Unterlage. Wie die Beobachtung zeigt, ist die Präzession nicht gleichförmig, sondern beschleunigt. Endlich bleibt der Schwerpunkt, auch wenn er sich anfänglich in Ruhe befand, nicht auf einer vertikalen Geraden, sondern beschreibt in einer horizontalen

557) *F. Klein*, The mathematical theory of the top, Princeton Lectures, London 1897, letzter Abschnitt.

558) Siehe auch *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, Anhang zu Kap. VI, p. 518, sowie auch *V. Puiseux*, J. de math. (1) 13 (1848), p. 249 und *Finck*, Nouv. ann. (1) 9 (1850), p. 310.

559) *C. Barus*, Science (2) 4 (1896), p. 446; *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, p. 622.

Ebene kleinere kreisähnliche Kurven, wobei er der Bewegung der Kreiselspitze mit 90° Phasenverschiebung folgt; die Figurenaxe durchläuft daher nahezu ein Rotationshyperboloid, dessen engste Stelle unterhalb des Schwerpunktes S liegt. Hieraus folgt, dass die Bewegungen, die in Wirklichkeit vor sich gehen, durch die *Poisson*schen

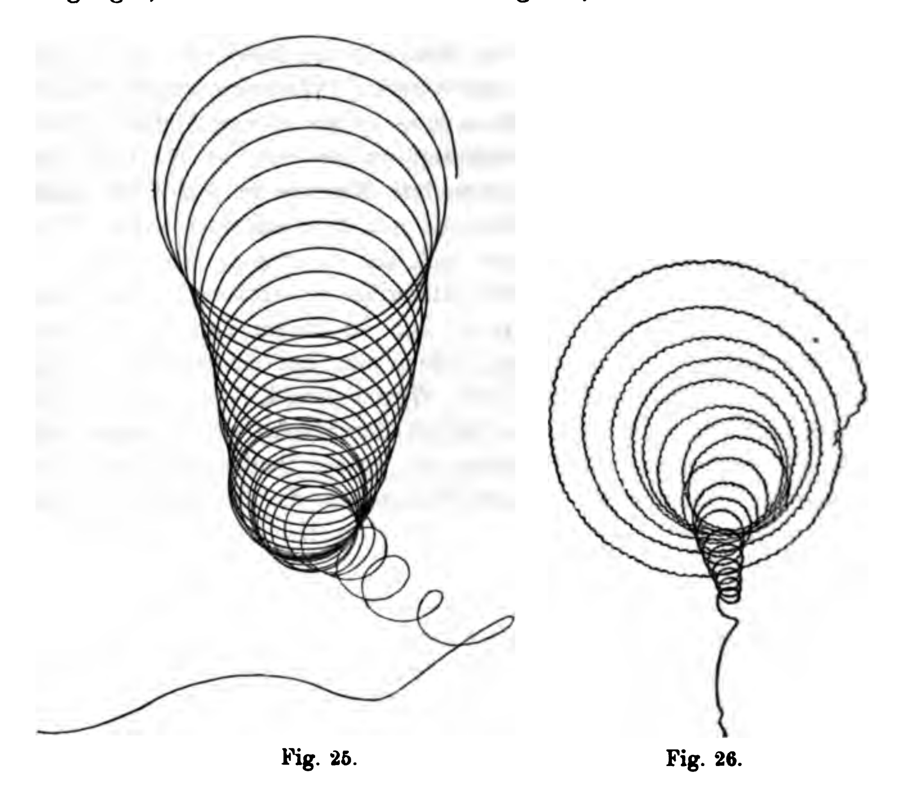


Fig. 25. Fig. 26.

Formeln auch nicht in erster Annäherung dargestellt werden, dass vielmehr der Einfluss der *Reibung*, mag die Unterlage auch noch so glatt sein, von primärer Bedeutung ist. Man wird damit zu ganz ähnlichen Betrachtungen geführt, wie bei dem schweren symmetrischen Kreisel, bei denen man sich wiederum auf eine qualitative Diskussion beschränken muss, und es möge daher auf den Bericht in Nr. **35** b 5) dieses Artikels verwiesen werden[560]).

38. Gleiten und Rollen auf Unterlagen. Einfach und doch lehrreich sind die Untersuchungen über *ebene Berührungsbewegungen*,

560) Vgl. noch *Arch. Smith*, Cambridge math. J. 1 (1846), p. 47; *A. Amthor*, Diss. Leipzig 1869; *J. H. Jellett*, Reibung, p. 198 und *E. G. Gallop*, Cambridge Phil. Soc. Proc. 12 (1903), p. 82; Trans. 19 (1904), p. 356.

d. h. über Berührungsbewegungen (siehe Nr. 31), bei denen die Geschwindigkeitsvektoren aller Punkte des Körpers K stets einer festen *Ebene* parallel bleiben (siehe Nr. 33). Diese Bewegungen haben zwei Grade der Freiheit. Ein Beispiel hierfür ist die Bewegung einer homogenen *Walze* (eines Kreiszylinders), die der Schwere unterworfen ist und eine schiefe Ebene berührt. Die Bewegung ist *eben*, wenn die Anfangsbedingungen so gewählt werden, dass die Axe der Walze stets horizontal bleibt. Es sei a der Halbmesser der Walze, α der Neigungswinkel der schiefen Ebene. Soll reines Rollen stattfinden, so ist, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit um die Axe bedeutet, die Geschwindigkeit des Schwerpunktes gleich $a\omega$, und man hat daher für seine Bewegung die Gleichung

$$(1)\qquad ma\frac{d\omega}{dt} = mg \sin\alpha - F.$$

Hierin bezeichnet F die gleitende Reibung, deren Maximalbetrag im Sinne der sogenannten *Coulomb*schen Gesetze $fMg \cos\alpha$ ist (vgl. Nr. 32 dieses Artikels). Da aber für die Drehung um eine horizontale Axe die Gleichung gilt:

$$(2)\qquad \tfrac{1}{2}ma^2\frac{d\omega}{dt} = Fa,$$

so ist beim reinen Rollen

$$(3)\qquad F = \tfrac{1}{3}mg \sin\alpha.$$

Damit also, bei der genannten Anfangsbedingung, die Walze rollt, ohne zu gleiten, darf die Neigung der Ebene den Winkel α^* nicht übersteigen, der durch die Gleichung

$$(4)\qquad \operatorname{tg}\alpha^* = 3f$$

bestimmt ist; sonst findet *Gleiten und Rollen* statt. Bei dieser Betrachtung ist von der rollenden Reibung abgesehen worden, die auf der rechten Seite der Gleichung (2) noch ein Zusatzglied $kMg \cos\alpha$ bedingen würde, wo k den Koeffizienten der rollenden Reibung bedeutet; den kritischen Winkel erhält man jetzt aus der Gleichung

$$(5)\qquad \operatorname{tg}\alpha^* = 3f - \frac{2k}{a}.$$

In ähnlicher Weise lässt sich auch das ebene Rollen inhomogener Walzen und überhaupt beliebiger Zylinder behandeln[561]).

561) *J. d'Alembert*, Dynamique, Paris 1743, § 115; *L. Euler*, Theoria motus.

Ob die Ergebnisse dieser und der folgenden theoretischen Untersuchungen, bei denen die sogenannten *Coulomb*schen Gesetze zugrunde gelegt sind, in befriedigender Weise mit den Ergebnissen übereinstimmen, die *Versuche* über solche Bewegungen, besonders bei grösseren Geschwindigkeiten, liefern würden, erscheint zweifelhaft. Experimentelle Untersuchungen über das Rollen einer exzentrischen schweren Walze (Kreisscheibe) auf schiefer Ebene hat *H. Chaumat*[561a]) im Anschluss an *P. Painlevés* Kritik der *Coulomb*schen Reibungsgesetze, vgl. Anmerkung 75 dieses Artikels, angestellt; es hat sich dabei ergeben, dass in der Tat der Reibungskoeffizient f, der nach dem sogenannten *Coulomb*schen Gesetze allein durch die Beschaffenheit der sich berührenden Körperflächen bestimmt sein sollte, unter Umständen merklich von der Massenverteilung in der rollenden Scheibe abhängt.

Die Bewegung einer homogenen schweren *Kugel* auf einer horizontalen Ebene hat schon *J. A. Euler* (Sohn)[562]) betrachtet, und später ist sie besonders von *G. Coriolis*[562]) (im Interesse der Theorie des Billardspiels) und von *F. Minding*[563]) untersucht worden. Bei Anfangsbedingungen allgemeiner Art wird Gleiten eintreten. So lange es anhält, bewegt sich nach *J. A. Euler* der Mittelpunkt in einer horizontalen Parabel, deren Hauptaxe der Richtung des Gleitens parallel ist. Die Geschwindigkeit des jeweiligen Berührungspunktes hat dabei konstante Richtung und ist gleichförmig verzögert; die gleitende Reibung ist konstant nach Richtung und Grösse. Endlich ist die Komponente der Winkelgeschwindigkeit um die Axe parallel der Richtung des Gleitens konstant, die Komponente um eine dazu senkrechte horizontale Axe aber gleichförmig verzögert. Da jedoch die Geschwindigkeit des Berührungspunktes beständig abnimmt, so hört das Gleiten nach einer gewissen Zeit auf, und der Mittelpunkt bewegt sich jetzt geradlinig in der Tangente der Parabel weiter. Unter den besonderen Fällen der Bewegung verdient das Zurücklaufen einer Billardkugel erwähnt zu werden, der man

---

Kap. 19; *Ch. Delaunay*, Mechanik, p. 397; *C. Bender*, Archiv Math. Phys. 60 (1877), p. 113; *R. Hoppe*, Archiv Math. Phys. 66 (1881), p. 213; *E. J. Routh*, Dynamik 1, Kap. 4.

561a) Paris C. R. 136 (1903), p. 1634.

562) Berlin Mém. année 1758 (1765), p. 284; année 1760 (1767), p. 261; vgl. auch *L. Euler*, Theoria motus, Kap. 18 und Supplementum Kap. 5.

562) Théorie mathématique des effets du jeu de billard, Paris 1835, chap. 1. Vgl. auch IV 9, Nr. 1 (*G. T. Walker*).

563) Mechanik, Berlin 1838, p. 345; vgl. auch *H. Resal*, Nouv. ann. (2) 11 (7872), p. 193.

durch einen Drehstoss eine starke Drehung nach rückwärts um eine horizontale Axe beigebracht hat[564]).

Die Bewegung einer homogenen schweren Kugel auf einer schiefen Ebene ist von *F. Minding*[565]) untersucht worden. Damit das Gleiten aufgehoben werden kann, darf hier der Neigungswinkel α nicht grösser sein, als ein kritischer Winkel α^*, der durch die Gleichung

$$(6) \qquad \operatorname{tg} \alpha^* = \frac{7}{2} f$$

bestimmt wird. Das Rollen einer Kugel auf einer Kugelfläche und allgemeiner auf einer Rotationsfläche haben *E. J. Routh*[566]), *A. G. Greenhill*[567]) und *A. Vierkandt*[568]) untersucht.

Neben die Kugel tritt der *Reifen*, nämlich ein starrer Körper, der von einer scharfen Kante in Form eines Kreises begrenzt ist, dessen Schwerpunkt in dem Mittelpunkte dieses Kreises liegt und dessen Trägheitsellipsoid in bezug auf den Schwerpunkt ein Rotationsellipsoid ist, bei welchem die Symmetrieaxe senkrecht zu der Ebene des Kreises steht. Die Masse des Reifens werde der Einfachheit halber gleich Eins gesetzt; der Halbmesser des Kreises sei a, die Hauptträgheitsmomente seien A, A, C; wiederum mögen die sogenannten *Coulomb*schen Reibungsgesetze als exakt vorausgesetzt werden.

Die Diskussion des Verlaufes der Bewegung gestaltet sich am einfachsten, wenn man neben dem im Raume festen Koordinatensystem der ξ, η, ζ ein im Raume und im Körper bewegliches System der x^*, y^*, z^* einführt. Die ζ-Axe sei vertikal nach oben gerichtet, die $\xi\eta$-Ebene die feste Ebene. Der Anfangspunkt der x^*, y^*, z^* sei der Schwerpunkt S, die z^*-Axe stehe senkrecht auf der Ebene des Kreises, die x^*-Axe sei horizontal, die y^*-Axe also eine Gerade grösster

---

564) Aus der umfangreichen Litteratur seien noch genannt: *S. D. Poisson*, Mécanique, 2. éd., Paris 1833, 2, p. 249; *H. Resal*, Paris C. R. 68 (1869), p. 1158; Nouv. ann. (2) 2 (1872), p. 193; *A. Amthor*, Diss. Leipzig 1869; *R. Hoppe*, Arch. Math. Phys. 60 (1877), p. 159; *P. Appell*, Roulements, Paris 1899, p. 21; *G. A. Maggi*, Stereodinamica, Mailand 1903, p. 184; *A. G. Webster*, Dynamics, p. 304; *G. Willing*, Diss. Leipzig 1904. Verwandte Probleme behandelten: *J. Didion*, Paris C. R. 77 (1873), p. 167; *M. Pieper*, Diss. Jena 1879; *E. Padova*, Roma Acc. Linc. Rend. (4) 4¹ (1888), p. 507; *E. Crescini*, ebenda (4) 5¹ (1889), p. 204. Für die Anwendungen auf das Billardspiel vgl. IV 9, Nr. 1 (*G. T. Walker*).

565) Mechanik, p. 325.

566) Dynamik 2, Kap. 5; vgl. auch *Cr. Alasia*, Rivista di fisica, mat. e scienze nat. 6 (1905), p. 18.

567) Quart. J. of math. 15 (1877), p. 176; 17 (1880), p. 86; 18 (1882), p. 229.

568) Monatshefte f. Math. 3 (1892), p. 97.

Neigung in der Ebene des Kreises; der Berührungspunkt P von Reifen und Ebene liege auf der negativen y^*-Axe.

Die Lage des Reifens wird festgelegt durch die Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 des Schwerpunktes und die Winkel $\zeta S z^* = \vartheta$, $\xi S x^* = \psi$, sowie den Winkel φ zwischen der x-Axe und einem festen Halbmesser des Kreises. Zwischen diesen sechs Grössen besteht die Gleichung

$$\zeta_0 = a \cos \vartheta, \tag{7}$$

so dass $\xi_0, \eta_0, \vartheta, \psi, \varphi$ als Lagekoordinaten genommen werden dürfen.

Die Komponenten der absoluten Geschwindigkeit des Schwerpunktes nach den Axen der x^*, y^*, z^* seien u^*, v^*, w^*, die Komponenten der relativen Drehung um S nach denselben Axen p^*, q^*, r^*. Bei diesen Festsetzungen werden die kinematischen Gleichungen:

$$p^* = \dot\vartheta, \quad q^* = \dot\psi \sin \vartheta, \quad r^* = \dot\psi \cos \vartheta + \dot\varphi. \tag{8}$$

Sind ferner U^*, V^*, W^* die Komponenten der Reaktion der Ebene, so lauten, wenn die Schwere wirkt, die Differentialgleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes:

$$\begin{cases} \frac{du^*}{dt} + q(w^* - \operatorname{cotg} \vartheta v^*) = U^*, \\ \frac{dv^*}{dt} + q \operatorname{cotg} \vartheta u^* - p w^* = V^* - g \sin \vartheta, \\ \frac{dw^*}{dt} + p v^* - q u^* = W^* - g \cos \vartheta, \end{cases} \tag{9}$$

und die *Euler*schen Gleichungen für die *beweglichen* Axen x^*, y^*, z^* (vgl. Nr. **31** dieses Artikels) werden:

$$\begin{cases} A \frac{dp^*}{dt} + (C r^* - A q^* \operatorname{cotg} \vartheta) q^* = - a W^*, \\ A \frac{dq^*}{dt} - (C r^* - A q^* \operatorname{cotg} \vartheta) p^* = 0, \\ C \frac{dr^*}{dt} = + a U^*. \end{cases} \tag{10}$$

Soll kein Gleiten eintreten, so muss die Geschwindigkeit des Berührungspunktes P gleich 0 sein. Hieraus folgen die Gleichungen:

$$u^* + a r^* = 0, \quad v^* = 0, \quad w^* - a p^* = 0, \tag{11}$$

und das Problem ist auf Quadraturen zurückgeführt, sobald man r^* kennt. Für r^* aber ergiebt sich die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2 r^*}{d\vartheta^2} + \frac{dr^*}{d\vartheta} \cos \vartheta - \frac{C a^2}{AC + A a^2} r^* = 0, \tag{12}$$

die sich mittels der hypergeometrischen Reihe integrieren lässt[569]). Formeln, die eine bequeme numerische Berechnung des Verlaufes der Bewegung bei gegebenen Anfangsbedingungen ermöglichen, hat *E. Carvallo* bei seinen Untersuchungen über die Theorie des Ein- und Zweirades entwickelt[570]).

Wenn man die Bedingung des Rollens von vornherein einführt, wird man auf zwei nichtholonome Bedingungsgleichungen geführt und hat nach den in Nr. **31** angegebenen Grundsätzen die Differentialgleichungen der Bewegung aufzustellen[571]).

Wie neuerdings *S. Tschaplygin* gezeigt hat, lässt sich das Problem der Bewegung eines schweren homogenen *Rotationskörpers* auf einer horizontalen Ebene stets auf die Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückführen[572]). Stationäre Bewegungen solcher Körper und Schwingungen um diese (vgl. Nr. **35** b 3) dieses Artikels) untersuchte *E. J. Routh;* bei der stationären Bewegung rollt die Rotationsfläche so, dass ihre Axe mit der Vertikalen einen gewissen konstanten Winkel bildet[573]). Hierher gehören auch die Untersuchungen über den *Spielkreisel,* wenn man die Spitze durch eine kleine Halbkugel ersetzt, siehe Anmerkung 560, und über die Erscheinung, dass ein eiförmiger starrer Körper, der rasch um eine Axe gedreht und dann auf einen glatten Tisch gesetzt wird, sich aufrichtet: *Ei des Kolumbus* nach *Lord Kelvin.* Dabei wird allerdings ange-

569) *D. J. Korteweg,* Nieuw Archief (2) 4 (1899), p. 130, 204; Palermo Circ. mat. Rend. 14 (1900), p. 7; vgl. auch *P. Appell,* Palermo Circ. mat. Rend. 14 (1900), p. 1; J. f. Math. 121 (1900), p. 310; Mécanique 2, p. 241.

570) Journ. éc. polyt. (2) 5 (1900), p. 119; 6 (1901), p. 1. Für die Anwendungen auf das Fahrrad vgl. IV 9, Nr. 4 (*G. T. Walker*). Ferner beschäftigten sich mit dem Rollen eines Reifens, oder was auf dasselbe herauskommt, einer homogenen Kreisscheibe *N. M. Ferrers,* Quarterly J. of math. 12 (1872), p. 1; *W. Thomson* und *P. G. Tait,* Handbuch, p. 96; *R. Hoppe,* Arch. Math. Phys. 67 (1881), p. 165; *E. Padova,* Venezia Ist. Atti (7) 6 (1895), p. 489.

571) *A. Vierkandt,* Monatshefte f. Math. 3 (1892), p. 97; *A. G. Webster,* Dynamics, p. 313; *P. Appell,* Mécanique 2, p. 382.

572) Moskau, Math. Sammlung 24 (1903), p. 139 (russisch); vgl. auch *P. Woronez,* Die Gleichungen der Bewegung eines starren Körpers, der ohne zu gleiten auf einer unbeweglichen Fläche rollt, Kijew 1903 (russisch).

573) Dynamik 2, p. 186; vgl. auch p. 77 und 88. Das Rollen eines homogenen Rotationskörpers auf einer horizontalen Ebene betrachteten ferner *S. D. Poisson,* Mécanique 2, p. 178; *V. Puiseux,* J. de math. (1) 13 (1848), p. 249; 17 (1852), p. 1; Paris C. R. 32 (1851), p. 621; *C. Neumann,* Leipzig Ber. 1885, p. 352 = Math. Ann. 25 (1885), p. 478; *J. M. H. Falkenhagen,* Nieuw Archief (2) 6 (1903), p. 104. Das Rollen eines homogenen *Kreiskegels* auf einer schiefen Ebene untersuchte *E. Lampe,* Berlin Phys. Ges. Verhandl. 1885, p. 41.

nommen, dass das Ei gekocht ist, da ein rohes Ei sich trotz einer solchen Drehung nicht aufrichtet[573a]).

Was Körper betrifft, denen keine kinetische Symmetrie in bezug auf den Schwerpunkt zukommt, so hat sich *S. D. Poisson* mit dem Rollen eines *homogenen dreiaxigen Ellipsoides* beschäftigt, das unter Einwirkung der Schwere auf einer schiefen Ebene rollt; es gelang ihm die Integration durchzuführen, wenn die Anfangsbedingungen so gewählt werden, dass eine der Hauptaxen stets horizontal bleibt[574]). Seine Ergebnisse lassen sich auch sofort auf das Rollen einer inhomogenen Kugel mit drei ungleichen Hauptträgheitsmomenten übertragen.

Die Anfangsbewegungen (vgl. Nr. 19 dieses Artikels) beliebiger schwerer Körper, die in Berührung mit einer rauhen horizontalen Ebene festgehalten und dann losgelassen werden, hat *J. H. Jellett* ermittelt[575]). Er und *E. J. Routh*[576]) haben auch das bereits im 18. Jahrhundert[577]) in Angriff genommene Problem der kleinen Schwingungen eines auf einer Ebene ruhenden schweren starren Körpers wieder aufgenommen. *E. J. Routh* gelangte dabei zu der Erklärung einer sonderbaren Eigenschaft, die man zuerst bei antiken Steinbeilen (celts) bemerkt hatte[578]), die jedoch überhaupt starren Körpern mit elliptischer Rundung an der Berührungsstelle zukommt, dass sie nämlich auf einem horizontalen Tische in *einer* Richtung stationär rotieren, in der anderen Richtung in Rotation versetzt aber unruhig werden und dann entweder umfallen oder aber anfangen, sich in entgegengesetztem Sinne zu drehen; dieses Verhalten tritt dann und nur dann ein, wenn die Richtungen der beiden Hauptträgheitsaxen für den Berührungspunkt, die auf der Drehaxe senkrecht stehen, mit den Richtungen der beiden Hauptkrümmungstangenten an der Berührungsstelle nicht übereinstimmen.

In engem Zusammenhange mit dem Problem der kleinen Schwingungen steht die Frage nach der *Stabilität des Gleichgewichtes* eines schweren starren Körpers, der auf einer horizontalen Ebene

---

573a) Vgl. *J. Perry,* Spielkreisel (1890), p. 83—89, sowie *H. W. Chapman*, Phil. Mag. (6) 5 (1903), p. 458.

574) Mécanique, 1. éd. Paris 1811, 2, p. 183. Einen anderen integrablen Fall entdeckte *P. Woronez*, siehe Anmerkung 572.

575) Reibung, p. 153.

576) Dynamik 2, Kap. 5.

577) *L. Euler*, Comment. Petrop. 7 ad ann. 1734—35 (1740), p. 99; *Joh. Bernoulli,* Opera omnia, Lausanne 1742, 4, p. 296; *J. d'Alembert,* Dynamique, Paris 1743, § 117.

578) Auf diese paradoxen Bewegungen hatte *G. T. Walker,* Quart. J. of math. 28 (1896), p. 175 hingewiesen.

ruht. Auf dieselbe Frage führt auch, falls die Ebene glatt ist, das viel behandelte Problem der Stabilität des Gleichgewichtes schwimmender schwerer Körper; vgl. Nr. 39 dieses Artikels, wo man Hinweise auf die betreffende Litteratur findet. Gleichgewicht mit Reibung hat besonders *J. H. Jellett* untersucht[579]).

39. Schwimmende Körper. Damit ein der Schwere unterworfener starrer Körper, der auf einer Flüssigkeit schwimmt, sich im Gleichgewichte befindet, ist, wie schon *Archimedes* erkannt hat, notwendig und hinreichend, dass die Gerade, die seinen Schwerpunkt G mit dem Schwerpunkte C des eingetauchten Volumens (Auftriebszentrum) verbindet, vertikal steht und dass das Gewicht dieses Volumens V gleich dem Gewichte P des Körpers ist. Nachdem *Chr. Huygens* die Untersuchung solcher Probleme wieder aufgenommen hatte, haben *P. Bouguer*, *L. Euler* und *Ch. Dupin* einige Begriffe eingeführt, die für die Lehre von der *Stabilität des Gleichgewichtes* grundlegend geworden sind[580]).

Jede Ebene, die von dem Körper das Volumen V abschneidet, dessen Gewicht, wenn es mit der Flüssigkeit erfüllt wird, gleich P ist, heisst eine *Schwimmebene*. Alle Schwimmebenen umhüllen eine krumme Fläche, die *Schwimmfläche* (F), die jene Ebene in den Punkten F berühren möge. Der geometrische Ort der Schwerpunkte C der mit Flüssigkeit erfüllten Volumina V ist eine zweite krumme Fläche, die *Auftriebsfläche* (C), die geschlossen und überall konvex ist[581]). Nach *Dupin* ist F der Schwerpunkt des zugehörigen (homogen gedachten) Querschnittes Q durch den Körper, und die Berührungsebene von (C) in C ist der Berührungsebene von (F) in dem zugehörigen Punkte F parallel. Zieht man ferner in zwei benachbarten Punkten C und C' der Auftriebsfläche die Normalen, so heisst der Fusspunkt ihres gemeinsamen Lotes ein *Metazentrum*, und zwar gehört es zu der Drehaxe a des starren Körpers, die durch den Schnitt der zugehörigen Schwimmebenen bestimmt wird. Der Punkt M liegt im allgemeinen zwischen den beiden Hauptkrümmungsmittelpunkten K_1 und K_2 von C;

579) Reibung, p. 192.

580) Von *P. Bouguer*, Traité du navire, Paris 1746 rührt der Name *Metazentrum* her (p. 257, er hat auch schon die curva metacentrica, p. 269). Der Sache nach findet sich dieser Begriff auch in dem bereits 1739 verfassten Werke *L. Eulers*, Scientia navalis, 2 Bände, Petersburg 1749. *Ch. Dupin* hatte seine Abhandlung: De la stabilité des corps flottants schon 1814 der Pariser Akademie eingereicht, veröffentlicht wurde sie aber erst in den Applications de géométrie et de mécanique, Paris 1822; ihm verdankt man die Begriffe Schwimmebene, Schwimmfläche, Auftriebsfläche und die darüber im Texte mitgeteilten Sätze.

581) Die Gestalten der Oberflächen (F) und (C) sind von *A. G. Greenhill*, Hydrostatics, London 1894, für eine Anzahl besonderer Fälle untersucht worden.

er fällt mit einem von ihnen zusammen, wenn die Drehaxe einer der Hauptrichtungen der Fläche (C) in C parallel ist. K_1 und K_2 heissen das kleine und das grosse Metazentrum; der Ort der Metazentren ist die Brennfläche (Zentrafläche) der Geraden, die auf der von den Schwimmebenen umhüllten Fläche senkrecht stehen. Endlich ist für den (homogen gedachten) Querschnitt Q das Trägheitsmoment J in bezug auf die Achse a gleich $V \cdot CM$.

Wenn Stabilität herrschen soll, so muss bei einer unendlich kleinen Drehung des Körpers um eine beliebige Drehaxe ein Kräftepaar entstehen, das den Körper in die ursprüngliche Lage zurückzuführen strebt, und das ist nur Fall, wenn das zugehörige Metazentrum M oberhalb des Schwerpunktes G des schwimmenden Körpers liegt. Da diese Überlegung für alle möglichen Drehaxen gilt, so ergiebt sich für die Stabilität als notwendige Bedingung, dass *der Schwerpunkt G unterhalb des kleinen Metazentrums K_1 liegt.*

Die Frage, ob diese von *Ch. Dupin* aufgestellte Bedingung auch hinreichend ist, haben *J. M. C. Duhamel*[582]) und *S. D. Poisson*[583]) untersucht, indem sie den in Nr. 17 dieses Artikels besprochenen statischen Ansatz anwandten, und haben sie so auf die Frage zurückgeführt, ob ein auf einer horizontalen glatten Ebene ruhender schwerer Hilfskörper, dessen Oberfläche die Fläche C und dessen Schwerpunkt der Punkt G ist, sich in stabilem Gleichgewicht befindet. Dem gegenüber hat *A. Clebsch*[584]) gezeigt, dass die von der Bewegung der Flüssigkeit herrührenden kinetischen Druckkräfte von derselben Ordnung sind, wie die Glieder, die bei dem statischen Ansatz allein berücksichtigt werden. Allein seine Behauptung, dass jene Druckkräfte unter Umständen die Stabilität zerstören könnten, hat sich nicht bestätigt; denn die Durchführung der Rechnungen, die *Clebsch* selbst nicht vollendet hatte, zeigt, dass dessen Methode zu demselben Ergebnisse führt, wie der statische Ansatz[585]).

Bei den Untersuchungen, über die im Vorhergehenden berichtet worden ist, war der Nachweis der Stabilität mittels der Methode der kleinen Schwingungen geliefert worden. Gegen diese Methode lassen sich jedoch dieselben Bedenken geltend machen, wie bei dem allgemeinen Stabilitätsbeweise von *Lagrange* (Maximum der Kräftefunktion, vgl. Nr. 5 dieses Artikels), und ein strenger Beweis dafür, dass jene Bedingung für das Metazentrum auch hinreichend ist, hat sich

582) Journ. éc. polyt. cah. 24 (1835), p. 12; Mécanique 2, p. 252.

583) Mécanique, 2. éd. 2, p. 579.

584) J. f. Math. 57 (1860), p. 149.

585) *L. V. Turquan,* Bruxelles Soc. scientif. Ann. 2 B (1878), p. 123.

nur führen lassen, indem der Minding-Dirichletsche Stabilitätsbeweis auf den vorliegenden Fall übertragen wurde; nachdem bereits *A. Bravais*[586]) und *W. Thomson*[587]) Ansätze nach dieser Richtung gemacht hatten, hat zuerst *E. Guyou*[588]) diesen Gedanken vollständig durchgeführt.

In neuerer Zeit ist das Archimedische Problem der schwimmenden Körper nach verschiedenen Richtungen hin verallgemeinert worden. *P. Duhem*[589]) hat den Fall betrachtet, dass der starre Körper in zwei über einander gelagerten Flüssigkeiten schwimmt; für die Stabilität kommt alsdann noch die Bedingung hinzu, dass die leichtere Flüssigkeit sich oberhalb der schwereren befindet. Noch verwickelter wird die Frage der Stabilität, wenn der schwimmende Körper einen Hohlraum enthält, der zum Teil mit einer Flüssigkeit erfüllt ist (Tankschiffe mit Petroleum)[590]).

Weitere historisch-litterarische Angaben findet man bei *J. L. Lagrange*, Mécanique, Ausgabe von *J. Bertrand*, 1, p. 167 und *P. Duhem*, J. de math. (5) 1 (1895), p. 91. Zahlreiche bibliographische Angaben enthält auch die Architecture navale von *J. Pollard* und *A. Dudebout*, 4 Bde., Paris 1890—1894; zur Ergänzung für die englische Litteratur möge *A. G. Greenhill*, Treatise on hydrostatics, London 1894, chap. V herangezogen werden. Auch in IV 15, Nr. 4 (*A. E. H. Love*) wird die Stabilität schwimmender Körper behandelt.

Die Lehre von den *endlichen* Bewegungen eines starren Körpers in einer inkompressiblen, insbesondere reibungslosen Flüssigkeit gehört nicht mehr in die elementare Mechanik. Für diesen Gegenstand, der eine eigene grosse Litteratur hat, möge auf den Artikel IV 16 (*A. E. H. Love*) verwiesen werden; leider hat sich herausgestellt, dass die Ergebnisse der mathematischen Untersuchungen, die zum Teil von besonderer Eleganz waren, mit den tatsächlichen Erscheinungen so wenig übereinstimmen, dass man sie nicht einmal als eine Annäherung erster Ordnung bezeichnen darf; vgl. IV 22 (*A. Kriloff*).

---

586) Thèse Lyon 1837 = Sur l'équilibre des corps flottants, Paris 1840.

587) *W. Thomson* and *P. G. Tait*, Treatise, 2. ed. 2, p. 320.

588) Revue maritime März 1879; siehe auch *E. Guyou*, Théorie du navire, Paris 1887, 2. éd. Paris 1894. Eine ausführliche Darstellung des Guyouschen Beweises findet man bei *P. Appell*, Mécanique 3, p. 211.

589) J. de math. (5) 1 (1895), p. 91.

590) *E. Guyou*, Théorie du navire, Paris 1887; *A. G. Greenhill*, Treatise on hydrostatics, London 1894, p. 174; *P. Appell*, Paris C. R. 129 (1899), p. 567, 636, 880; Journ. éc. polyt. (2) 5 (1900), p. 101; *P. Duhem*, Paris C. R. 129 (1899), p. 379.

C. Systeme starrer Körper.

40. Einleitende Bemerkungen. Ein beträchtlicher Teil der Probleme, die herkömmlicher Weise in der Dynamik des einzelnen starren Körpers ihren Platz gefunden haben, gehört im Grunde in die Dynamik der Systeme starrer Körper. Zum Beispiel lässt sich bei dem physikalischen Pendel die feste horizontale Axe, um die sich der starre, der Schwere unterworfene Körper drehen soll, nur verwirklichen, indem man weitere starre Körper zu Hilfe nimmt; allerdings befinden sich diese Körper in relativer Ruhe, sie reiben sich jedoch in den Berührungsflächen an dem Pendelkörper, und die Gestalt dieser Flächen ist von Einfluß auf den Verlauf der Pendelbewegung. Wenn ferner die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt durch eine Cardanische Aufhängung realisiert wird, so muss man bei einer genaueren Diskussion auch die Massen der Ringe des Gehänges berücksichtigen und hat es dann mit einem System von drei starren Körpern zu tun, die durch Gelenke mit einander verbunden sind. Ähnliche Überlegungen gelten immer, wenn es sich um gebundene Bewegungen eines einzelnen starren Körpers handelt.

Auf Systeme starrer Körper, die sich in ihren Bewegungen gegenseitig beeinflussen, wird man aber auch bei zahlreichen Aufgaben der technischen Mechnik geführt, wenigtens wenn man sich mit einer ersten Annäherung begnügt[591]), und es könnte daher scheinen, als ob die theoretische Dynamik solcher Systeme ein Gebiet sei, über das eine umfangreiche Litteratur vorliegt. Wenn das nicht zutrifft, wenn vielmehr die Dynamik der Systeme starrer Körper noch in den Anfängen steckt, so besteht der Grund wohl darin, dass die Untersuchung auch schon in verhältnismässig einfachen Fällen zu verwickelten Ansätzen führt. Vielfach ist bereits die Feststellung der kinematischen Konstitution dieser Systeme, die doch die unentbehrliche Grundlage für eine erschöpfende kinetische Behandlung bildet, praktisch nur in Grenzfällen durchführbar. Zuweilen gelingt es allerdings, Probleme aus der Dynamik der Systeme starrer Körper auf Probleme der Punktdynamik im engeren Sinne des Wortes oder der Dynamik des einzelnen starren Körpers zurückzuführen und damit wenigstens eine approximative Lösung zu ermöglichen. Nach dieser Richtung zeigt sich in der *angewandten Mechanik* vielfach die Kunst des konstruierenden Physikers oder des schöpferischen Ingenieurs darin, dass er

---

591) Die zweite Annäherung besteht darin, dass man die Körper des Systems nicht als starr, sondern als elastisch ansieht; vgl. IV 28 (*L. Prandtl*).

mit feinem Gefühl für die Vorgänge in der Wirklichkeit erkennt, welche Umstände für den vorliegenden Zweck vernachlässigt werden dürfen und welche von wesentlicher Bedeutung sind, und dass er so ein idealisiertes Problem herausschält, das eine genügende Annäherung ergiebt. Ob die Annäherung genügt, wird sich freilich meistens erst nachträglich durch Versuche ermitteln lassen, und es wird sich dabei manchmal herausstellen, dass die Annahme, das betrachtete System lasse sich durch ein System *starrer* Körper ersetzen, unzureichend ist. Alsdann hat man in zweiter Annäherung das System als *elastisch* anzusehen und wird wiederum eine geeignete Idealisierung vorzunehmen suchen.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die Mittel zum analytischen Ansatz von Problemen aus der Dynamik der Systeme starrer Körper in der Regel nicht aus *allgemeinen theoretischen Erwägungen*, sondern vermöge der Hilfsmittel gewonnen werden, *die den einzelnen Gebieten der angewandten Mechanik eigentümlich sind*, und für diese muss auf die betreffenden Artikel, im besonderen auf die vier folgenden Artikel von *Ph. Furtwängler*, *O. Fischer*, *G. T. Walker* und *K. Heun* (IV 7 bis 10) verwiesen werden.

41. Die Differentialgleichung der Bewegung eines Systems starrer Körper.

41a. Freie Systeme starrer Körper. Im allgemeinen begnügen sich die Astronomen damit, die Himmelskörper als materielle Punkte anzusehen, das heisst die Bahnen der Schwerpunkte dieser Körper unter der Voraussetzung zu berechnen, dass die gegenseitigen Anziehungen so erfolgen, als ob die Massen in den Schwerpunkten vereinigt seien. In besonderen Fällen hat man jedoch auf die räumliche Verteilung der Massen Rücksicht nehmen müssen und hat also *Systeme freier starrer Körper* untersucht, die auf einander Gravitationswirkungen ausüben. Für jeden Körper eines solchen Systems haben die Differentialgleichungen der Bewegung genau die Form, die in Nr. 29 dieses Artikels für den einzelnen starren Körper entwickelt worden ist; der Unterschied besteht nur darin, dass jetzt die Kräfte von den Positionskoordinaten *aller* Körper des Systems abhängen. Da aber die Bewegungen der Schwerpunkte der Einzelkörper von den Bewegungen um die Schwerpunkte nur unmerklich beeinflusst werden[592]), so darf

592) Am ehesten könnte man noch vermuten, dass die Sonne einen solchen Einfluss auf den Merkur ausübt; allein *P. Harzer*, Astr. Nachr. 127 (1891), p. 811, hat gezeigt, dass man aus der Ungleichheit der Hauptträgheitsmomente der Sonne die Abweichung bei der Perihelbewegung des Merkur nicht erklären kann.

man die Bewegungen der Schwerpunkte als bekannt ansehen und sich auf die Ermittelung der Bewegungen um die Schwerpunkte beschränken. Als Beispiele seien genannt die genauere Theorie der Präzession und Nutation der Erdaxe (vgl. Nr. 35b 2 dieses Artikels) und die Bewegung des Erdmondes um seinen Schwerpunkt, den man, um die Beobachtungen mit genügender Schärfe darzustellen, als verschieden von dem geometrischen Mittelpunkt annimmt[593]). Erwähnt sei in diesem Zusammenhange auch die in die Kinetostatik der Systeme starrer Körper gehörende Frage nach den inneren Kräften, die in einem starren Ringe auftreten, der um einen Hauptkörper rotiert und mit ihm im Gravitationsverhältnis steht. Bei der Voraussetzung der Starrheit haben sich für die Saturnringe so beträchtliche Beanspruchungen ergeben, dass man sie überhaupt nicht für Kontinua, sondern für dicht gedrängte Schwärme einzelner Teilchen hält.

41b. Allgemeine Kinetik der gebundenen Systeme starrer Körper. 1. *Synthetische Behandlung.* Um bei einem gebundenen System starrer Körper zu den Differentialgleichungen der Bewegung zu gelangen, liegt es am nächsten, den auf das System wirkenden Kräften die Reaktionskräfte hinzuzufügen, die an den Stellen auftreten, wo sich zwei Körper des Systems berühren; ausserdem wird man vielfach für die Berührungsstellen noch Reibungskräfte in Ansatz zu bringen haben. Nachdem man diese Reaktions- und Reibungskräfte hinzugefügt hat, darf man die einzelnen Körper des Systems als frei ansehen und kann auf sie die Sätze anwenden, die in der Dynamik des einzelnen starren Körpers dargelegt worden sind. Dieses Verfahren führt jedoch nur in einfachen Fällen zu den kinetischen Differentialgleichungen, bei denen die expliziten Ausdrücke für einzelne naturgemäß verschwindende Reaktionskomponenten leicht gebildet werden können. Im allgemeinen aber wird man die Reaktionen nach dem d'Alembertschen Prinzip mit Benutzung des Prinzips der virtuellen Verrückungen als Gleichgewichtsbedingung nur dann methodisch eliminieren können, wenn die kinematische Konstitution des Systems genau bekannt ist. In den Lehrbüchern ist über diesen Gegenstand nur wenig zu finden, und erst in neuester Zeit hat *K. Heun* die Bedeutung des d'Alembertschen Prinzips für Systeme starrer Körper eingehender untersucht[594]).

Am günstigsten gestalten sich die Aussichten bei der synthe-

593) Eine allgemeinverständliche Darstellung der betreffenden Untersuchungen gab *E. J. Routh*, Dynamik 2, Kapitel XI und XII; im übrigen vergl. VI 2 22 (*K. Schwarzschild*).

594) Archiv Math. Phys. (3) 2 (1901—02), p. 57, 298.

tischen Behandlung noch für Probleme des Gleichgewichtes mit oder ohne Reibung. Die Lösungen einer erheblichen Anzahl hierher gehöriger statischer Aufgaben findet man bei *M. Jullien*[595]), *J. H. Jellett*[596]), *E. J. Routh*[597]), *G. M. Minchin*[598]) und *E. Budde*[599]). Hier wird zum Beispiel das Gleichgewicht eines zweirädrigen Karrens erörtert, der sich auf einer rauhen schiefen Ebene befindet, oder es wird bestimmt, welches die Gleichgewichtslage einer Anzahl homogener glatter Kugeln ist, die in eine Hohlkugel gesteckt worden sind und der Schwerkraft unterliegen[600]). Bei Aufgaben, in denen die Schwere allein als wirkende Kraft auftritt, erweist sich übrigens oft das Prinzip von *E. Torricelli* als nützlich, wonach ein beliebiges schweres System im Gleichgewicht ist, wenn sein Schwerpunkt möglichst hoch oder möglichst tief liegt[601]).

2. *Analytische Behandlung.* Der soeben geschilderten synthetischen Behandlung steht eine analytische Behandlung gegenüber, die im Wesentlichen durch *J. L. Lagrange* begründet worden ist und neuerdings durch *G. A. Maggi* eine ausführliche Darstellung erfahren hat[602]). *Als normale Koordinaten* eines Systems starrer Körper, die mit einander auf vorgeschriebene Art verbunden sind, bezeichnet *Maggi* die Gesamtheit der Koordinaten der Schwerpunkte und der Eulerschen Winkel für jedes Glied des Systems; bei n Gliedern hat man also $6n$ normale Koordinaten. Bei den Bedingungen oder *Fesselungen* unterscheidet er solche *erster Art*, zu deren Angabe die Kenntnis der kinematischen Konstitution des Systems allein ausreicht und die sich daher durch endliche Gleichungen zwischen den normalen Koordinaten und der Zeit ausdrücken lassen, und Fesselungen *zweiter Art*, zu deren Angabe man den Bewegungszustand des Systems kennen muss und

595) Problèmes 1, p. 113.

596) Reibung, p. 49.

597) Statics, chap. IV, V, VII.

598) Statics, 3. ed., 1, p. 198, 227.

599) Mechanik 2, p. 935.

600) Vergl. auch *Osb. Reynolds*, Phil. Mag. (5) 20 (1885), p. 469 = Papers on mechanical and physical subjects 2, London 1901, p. 203; hier werden *Schrotsysteme* betrachtet, nämlich Anhäufungen von Kugeln, die auf einander gleiten, von einander abrollen und sich auch von einander trennen können. Weitere Ausführungen dieses Gedankens hat *Reynolds* in der grossen Abhandlung gegeben: On the sub-mechanics of the universe, die 1903 als dritter Band der Papers erschienen ist; vgl. dazu auch *J. D. Everett*, Phil. Mag. (6) 8 (1904), p. 30.

601) De motu gravium naturaliter descendentium, Opera geometrica, Florenz 1644.

602) Stereodinamica, Mailand 1903.

die sich durch Gleichungen zwischen den normalen Koordinaten, deren ersten Ableitungen nach der Zeit und der Zeit selbst ausdrücken lassen. Er beschränkt sich jedoch, wie es üblich ist, auf Gleichungen, die linear und homogen in den Differentialen der normalen Koordinaten sind und den sogenannten nichtholonomen Bedingungen entsprechen[603]). *Reine Gleichungen* der Bewegung nennt *Maggi* den Inbegriff derjenigen Differentialgleichungen zwischen den normalen Koordinaten und der Zeit, in denen die von den Fesselungen herrührenden Drucke nicht vorkommen; ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der Grade der Freiheit des Systems. *Maggi* giebt nicht nur ein Verfahren an, wie man diese reinen Gleichungen aufstellen kann, sondern führt auch die Aufstellung an einer Reihe von Beispielen wirklich durch (vgl. auch Nr. **31c** dieses Artikels).

Wenn die Anzahl der Grade der Freiheit des Systems klein, also etwa gleich eins, zwei oder drei ist, erweist es sich als zweckmässig, statt der normalen Koordinaten andere Positionskoordinaten und zwar in möglichst geringer Anzahl einzuführen. Die Differentialgleichungen zwischen diesen Koordinaten und der Zeit werden alsdann häufig unmittelbar durch das Prinzip der lebendigen Kraft, die Flächen- und die Schwerpunktssätze geliefert[604]). Bei dem Ansatz dieser Differentialgleichungen kann man überdies unter Umständen von den Näherungsmethoden Gebrauch machen, die in der Lehre von den kleinen Schwingungen entwickelt worden sind, und ist dann in der Lage, qualitative und quantitative Schlüsse auf den Verlauf der Bewegung zu ziehen, ein Verfahren, das in der angewandten Mechanik eine wichtige Rolle spielt, dessen korrekte Handhabung aber freilich einen sicheren mechanischen Instinkt erfordert.

41c. Gelenkketten; Massenausgleich. Eine besondere Ausbildung hat in neuester Zeit die Dynamik der sogenannten *Gelenkketten* erfahren, die in der Technik des Maschinenbaues und in der physiologischen Mechanik eine wichtige Rolle spielen. Der Körper I des Systems möge einen Zapfen tragen, und es möge aus dem Körper II ein Lager gebohrt sein, in das der Zapfen passt, sodass die beiden Körper I und II gezwungen sind, relativ gegen einander sich um eine feste Axe zu drehen. Statt eines solchen Zylindergelenks kann man gegebenen Falls auch ein Kugelgelenk nehmen, so dass die beiden Körper sich relativ gegen einander um einen festen Punkt drehen

603) Über die Begriffe holonom und nicht-holonom siehe Nr. 4, Anm. 33, sowie Nr. 38.

604) Vgl. zum Beispiel *A. Föppl*, Dynamik, p. 129 und *A. Love*, Mechanics, chap. 7—9.

müssen usw. Indem man so durch Gelenke Körper an Körper fügt, erhält man eine Gelenkkette. Systeme dieser Art sind schon uralt; man denke an den Storchschnabel des Paters *Chr. Scheiner*[605]), an das Parallelogramm von *J. Watt*[606]), an die Geradführung von *A. Peaucellier*[607]). Aber erst 1875 hat *F. Reuleaux*[608]) veranlasst durch die Bedürfnisse des Maschinenbaues die dort verwendeten Mechanismen klassifiziert sowie ihre *kinematischen* Eigenschaften systematisch untersucht, und erst am Schlusse des 19. Jahrhunderts ist die *Kinetik* der Gelenkketten in Angriff genommen worden.

Gewisse spezielle Gelenkketten hatte bereits *A. Wangerin* (1889) vom Standpunkte der theoretischen *Kinetik* aus untersucht[609]); die Anregungen zu einer eingehenderen Beschäftigung mit diesem Gegenstande sind aber von der technischen und der physiologischen Mechanik ausgegangen.

Aus der Technik ist die *Massenausgleichung bei Schiffsmaschinen* (1893) zu nennen. Während nämlich bei fest aufgestellten Dampfmaschinen die Rückwirkungen der Maschine auf das Gestell von dem Fundament aufgenommen werden, geben bei Schiffen die Massenverschiebungen in der Maschine, die sich in regelmässigem Wechsel wiederholen, zu unangenehmen Schwingungen Veranlassung, und bei den grossen Ozeandampfern, bei denen die bewegten Teile sehr schwer sind und überdies grosse Geschwindigkeiten besitzen, können diese Schwingungen gefährlich werden. Damit die bewegten Massen, also im wesentlichen die Kurbelmechanismen, die zu den einzelnen Zylindern der Dampfmaschine gehören, ohne Einfluss auf die Bewegungen des Schiffes bleiben, muss nicht nur der Schwerpunkt der bewegten Massen relativ zum Schiffe ruhen, sondern es muss auch das statische Moment der Bewegungsgrössen dieser Massen für jeden beliebigen Momentenpunkt in jedem Augenblicke verschwinden. Erst bei Berücksichtigung der zweiten Forderung ist ein praktisch befriedigender Massenausgleich möglich, und da man durch geeignete Wahl der Dimensionen

605) Pantographice, Rom 1631.

606) Patent vom 28. April 1784; siehe auch *J. P. Muirhead*, Mechanical inventions of James Watt 3, London 1854, p. 88.

607) Nouv. ann. (2) 3 (1864), p. 344; (2) 12 (1873), p. 71.

608) Theoretische Kinematik, Braunschweig 1875; ein zweiter Band ist 1900 unter dem Titel: „Die praktischen Beziehungen der Kinematik zu Geometrie und Mechanik" erschienen; beide Bände zusammen haben jetzt den Titel: „Lehrbuch der Kinematik". Vgl. auch IV 3, Nr. 28—30 (*A. Schoenflies* und *M. Grübler*).

609) Über die Rotation mit einander verbundenen Körper, Halle Univ.-Schrift 1889, p. 3; vergl. auch *M. v. Rohr*, Diss. Halle 1892 und *E. Jahnke*, J. de math. (5) 5 (1899), p. 155.

der einzelnen Getriebe und ihrer Schränkungswinkel beide Forderungen bei vierzylindrigen Maschinen angenähert erfüllen konnte, ist ein grosser Fortschritt in dem Bau der Ozeandampfer erzielt worden[610].

In der physiologischen Mechanik hat die Untersuchung der *Bewegungen des menschlichen Körpers*, der sich näherungsweise durch das Gelenksystem des Skelettes ersetzen lässt, dazu Veranlassung gegeben, dass *O. Fischer* (1893) für die Gelenkketten gewisse *Hauptpunkte* und *Hauptstrecken* eingeführt hat, durch die man eine erhebliche formale Vereinfachung und zugleich eine grössere Anschaulichkeit der Betrachtungen erzielt[611].

Vereinigt man nämlich bei der Betrachtung eines einzelnen Gliedes in dem Mittelpunkte eines jeden begrenzenden Gelenkes die Masse desjenigen Körperabschnittes, der nach Durchschneidung dieses Gelenkes abfallen würde, so ergiebt sich für das Glied, wenn man dessen eigene Masse hinzunimmt, ein Massensystem, das die Gesamtmasse der ganzen Kette besitzt. Es heisst nach *O. Fischer* das zu dem betreffenden Gliede gehörige *reduzierte System*. Der Schwerpunkt eines jeden reduzierten Systems wird von ihm der *Hauptpunkt* des betreffenden Gliedes genannt, und die Strecken, die die Mittelpunkte der Gelenke mit den Hauptpunkten der zugehörigen Glieder verbinden, führen den Namen *Hauptstrecken*. Hat man etwa ein dreigliedriges Gelenksystem (Fig. 27), und sind m_1, m_2, m_3 die Massen der Glieder, $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ die Gelenkmittelpunkte, so findet man das zu dem ersten Gliede gehörige reduzierte System, indem man im Punkte $G_{1,2}$ die Massen m_2 und m_3 vereinigt und dem ersten Körper hinzufügt; ebenso wird für den zweiten Körper in $G_{1,2}$ die Masse m_1, in $G_{2,3}$ die Masse m_3 vereinigt, und man fügt diese Massen dem zweiten Körper hinzu. Endlich werden bei dem dritten Körper in $G_{2,3}$ die Massen m_1 und m_2 vereinigt und diesem Körper hinzugefügt. Es

610) Vgl. etwa *O. Schlick*, Trans. Inst. of Nav. Arch. 42 (1900), p. 185 (Deutsches Reichspatent Nr. 80 974 vom 10. Nov. 1893); *H. Lorenz*, Dynamik der Kurbelgetriebe, Leipzig 1901, Mechanik, p. 543; *H. Schubert*, Theorie des Schlickschen Massenausgleichs, Leipzig 1901; *A. Föppl*, Dynamik, p. 127, sowie IV 10 (*K. Heun*).

611) Literatur in IV 8 (*O. Fischer*); dazu das inzwischen erschienene Werk von *O. Fischer*, Theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper mit speziellen Anwendungen auf den Menschen sowie auf einige Bewegungsvorgänge bei Maschinen, in möglichst elementarer und anschaulicher Weise dargestellt, Leipzig 1906. Ursprünglich hatte *Fischer* die Hauptpunkte und Hauptstrecken nur bei *ebenen* Gelenkketten angewandt, und er ist erst neuerdings dazu übergegangen, *räumliche* Gelenkketten zu betrachten, Leipzig Abhandl. 29, Heft 4 (1905). Spezielle Durchführungen für die dreigliedrige ebene Gelenkkette mit Rücksicht auf technische Anwendungen (Massenausgleich bei Kurbelgetrieben) hat *Fischer* in der Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 429 gegeben.

versteht sich von selbst, dass dabei jeder Gelenkmittelpunkt das eine Mal als fester Punkt des einen, das andere Mal als fester Punkt des anderen Körpers aufgefasst wird. Die Schwerpunkte H_1, H_2, H_3 der so gefundenen reduzierten Systeme sind die Hauptpunkte der dreigliedrigen Gelenkkette.

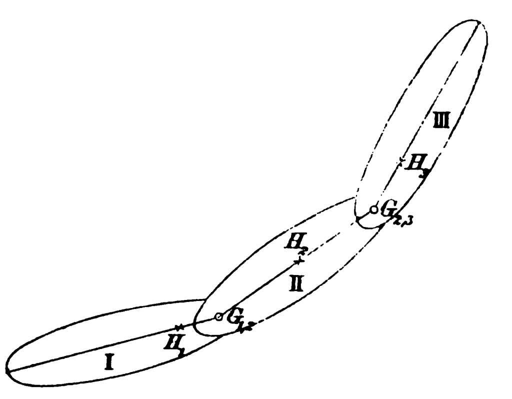


Fig. 27.

Die Hauptpunkte haben in der Dynamik der n-gliedrigen Gelenkketten eine ähnliche Bedeutung, wie der Schwerpunkt bei dem einzelnen starren Körper. Im Besonderen ermöglichen sie es, einen einfachen Ausdruck für die lebendige Kraft der Bewegung der Kette um ihren Gesamtschwerpunkt aufzustellen. Wenn man darin noch die Hauptträgheitsradien der reduzierten Systeme einführt, so ergeben sich für die normalen Koordinaten der einzelnen Kettenglieder Differentialgleichungen von verhältnismässig durchsichtiger Struktur, die es ermöglichen, einen Einblick in die Art zu gewinnen, wie sich die Glieder in ihrer Bewegung gegenseitig beeinflussen.

Neuerdings hat auch *K. Heun* die Kinetik der Gelenkketten in eigenartiger Weise behandelt und für sie ein Analogon der Eulerschen Gleichungen beim einzelnen starren Körper aufgestellt[612]).

42. Kinetostatik der Systeme starrer Körper. Während man in der *Kinetik* die *Bewegungen* der einzelnen Teile eines Systems betrachtet, ist es nach *K. Heun* die Aufgabe der *Kinetostatik* „die Veränderlichkeit der statischen Verhältnisse in der Mannigfaltigkeit der Lagen der einzelnen Teile zu erforschen“[613]). *Heun* fügt hinzu, dass es sich also in dieser Disziplin darum handle, „nicht allein die Zapfen- und Lagerdrücke, die Kupplungsspannungen und Fundamentreaktionen während der veränderlichen Bewegungs- und Kraftverhältnisse bei der Maschine zu verfolgen, sondern auch die Kräfte und Momente der inneren Beanspruchungen eines beliebigen Querschnittes jedes einzelnen Maschinenelementes für jede Lage und Stellung desselben zu erkennen“. Er kennzeichnet damit die Bedeutung, die der Kinetostatik für die ge-

612) Archiv Math. Phys. (3) 2 (1902), p. 311.
613) Jahresber. d. D. M.-V. 9, Heft 2 (1901), p. 5.

samte technische Mechanik zukommt. In der Tat ergiebt sich erst aus der Grösse der Reaktionskräfte und ihrer Momente ein Aufschluss über die praktische Ausführbarkeit der konstruierten Mechanismen, deren Bestandteile ja nur dann als starr angesehen werden dürfen, wenn die Beanspruchungen unterhalb gewisser Grenzen liegen. Diesen Umständen entsprechend tragen die Einzelausführungen zur Kinetostatik der Systeme starrer Körper einen so spezifisch technischen Charakter, dass über sie nicht an dieser Stelle, sondern in dem Artikel IV 10 *Dynamische Probleme der Maschinentechnik* von *K. Heun* berichtet werden wird. Wohl aber kann hier auf die theoretische Seite eingegangen werden.

Die Anfänge der Kinetostatik liegen weit zurück. Schon *I. Newton* hatte (1687) auf die Wichtigkeit des von ihm aufgestellten Prinzips der Gleichheit der Aktion und Reaktion für die Maschinen hingewiesen[614]). Ferner löste *Jacob Bernoulli* (1691) das Problem des Schwingungsmittelpunktes, indem er davon ausging, dass die Gesamtheit der Reaktionen der einzelnen Massenpunkte bei einem physikalischen Pendel in Gleichgewicht stehen muss[615]). Endlich betrachtete *J. d'Alembert* (1743) beliebige gebundene Systeme, bei denen vermöge der Verbindungen zwischen den einzelnen Teilen Reaktionen stattfinden[616]); bei *vollständigen Systemen* müssen diese Reaktionen in ihrer Gesamtheit beständig im Gleichgewicht stehen[617]). Allerdings verschwinden bei *d'Alembert* die Reaktionen sogleich wieder vom Schauplatze; sie werden vermöge des nach ihm benannten Prinzips eliminiert. Ähnlich steht es bei *J. L. Lagrange* (1761—1788), der das *d'Alembert*sche Prinzip analytisch formulierte. Die Reaktionen erscheinen bei ihm in Gestalt der *Multiplikatoren* λ. Mit einer ungenauen Ausdrucksweise hat *Lagrange* diese Multiplikatoren manchmal schlechtweg als Kräfte (Reaktionskräfte, Drucke) bezeichnet; *J. Bertrand* bemerkt hierzu[618]): „les coefficients λ, μ, ν ne sont pas nommés *forces*

614) Principia, Scholium zur Lex tertia.

615) Acta erud., Lips. 1686, 1691 = Opera 1, Genevae 1774, p. 227 und 460, vergl. auch *E. Mach*, Mechanik, 3. Kapitel.

616) Dynamique, Paris 1743.

617) Ein unvollständiger System ist zum Beispiel ein Massenpunkt, der sich auf einer krummen Fläche bewegt; das System wird jedoch vollständig, wenn man die krumme Fläche zum Systeme hinzunimmt. In ähnlicher Weise hat man immer zu verfahren, wenn die von den Verbindungen herrührenden Reaktionen in ihrer Gesamtheit nicht im Gleichgewichte stehen; Reibungskräfte sind hierbei nicht als Reaktionskräfte anzusehen, sondern den äusseren Kräften zuzuzählen.

618) *Bertrands* Ausgabe der Mécanique analytique 1, p. 153 (= Oeuvres 11, p. 174), vgl. auch *Bertrands* Anmerkung zu p. 160.

que par une locution figurée, familière à *Lagrange*. Nous avons averti plusieurs fois qu'il ne fallait pas prendre cette locution à la lettre". Die Multiplikatoren λ, μ, ν sind allerdings den Komponenten der betreffenden Reaktion proportional, allein welchen Proportionalitätsfaktor man zu nehmen hat, das lässt sich nicht angeben, wenn die zugehörigen Positionskoordinaten lediglich analytische Grössen ohne konkrete Bedeutung sind; sobald aber die Bedeutung der Positionskoordinaten feststeht, wird alles deutlich, indem man den Ausdruck für die elementare Arbeit heranzieht.

Auch bei *Lagrange* zeigt sich vielfach das Bestreben, die Multiplikatoren zu eliminieren; jedoch ist das keineswegs immer der Fall, und es entspricht nicht der historischen Wahrheit, wenn man im 19. Jahrhundert vielfach ausschliesslich diejenigen Differentialgleichungen, in denen allein die unabhängigen Positionskoordinaten vorkommen, als *Lagrange*sche Gleichungen bezeichnet hat[619]). Noch weniger aber ist die Befürchtung begründet, dass die von *Lagrange* aufgestellten Differentialgleichungen zur Bestimmung der Reaktionen ungeeignet seien; sein Verfahren „trennt vielmehr nur das rein kinetische Problem von dem kinetostatischen und erleichtert dadurch gleichzeitig die Behandlung beider"[620]).

In einem gewissen Gegensatze zu *Lagrange* steht *S. D. Poisson*. Er hat in seiner Mechanik (1811) die Bedeutung der Reaktionen scharf hervorgehoben, wie er denn auch den von *Lagrange* ganz vernachlässigten Einfluss der Reibung gebührend berücksichtigt[621]). Neben ihm ist *J. V. Poncelet* (seit 1826) zu nennen, der die technische Mechanik zu einer selbständigen Disziplin gemacht hat[622]). Seit der Mitte des 19. Jahrhunderts trat jedoch ein Stillstand ein, und erst in der neuesten Zeit hat die Kinetostatik durch die Untersuchungen von *K. Heun* wieder einen Aufschwung erfahren[623]).

Heun hat sich besonders mit den statischen Verhältnissen bei der Bewegung einer einfach zusammenhängenden Gelenkkette beschäftigt und die Reaktionskräfte bestimmt, die in den Punkten eines

619) Vergl. Nr. 7 dieses Artikels.

620) *G. Hamel*, Zeitschr. Math. Phys. 51 (1904), p. 439.

621) Im Anschluss an eine nachgelassene Arbeit *Lagranges* hat *Poisson* auch die Wirkung eines Schusses auf die verschiedenen Teile der Lafette einer Kanone untersucht, J. éc. polyt. cah. 21 (1832), p. 187.

622) Einen ausführlichen Bericht über *Poncelets* Leistungen in der technischen Mechanik gab *K. Heun*, Jahresber. d. D. M.-V. 9, Heft 2 (1901).

623) Jahresber. d. D. M.-V. 9, Heft 2 (1901); Archiv Math. Phys. (3) 2 (1901—02), p. 57, 298.

Schnittes wirken, den man durch eines der Glieder oder durch eines der Gelenke geführt hat. Bei der synthetischen Methode benutzt man zu diesem Zwecke jedesmal aufs neue das Prinzip der virtuellen Verrückungen, das man auf die beiden durch den Schnitt von einander getrennten Teile der Kette anwendet. Bei der analytischen Methode werden für beide Teile die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen angesetzt, in denen ausser den gegebenen Kräften noch die unbekannten Reaktionen auftreten; wenn die Bewegung des Systems bekannt ist, lassen sich aber diese Reaktionen mittels jener Gleichungen ermitteln.

Zum Schluss dieser Nummer möge noch darauf hingewiesen werden, dass sich in der Kinetostatik der Systeme starrer Körper dieselbe Schwierigkeit einstellt, auf die schon bei der Statik des einzelnen starren Körpers (Nr. 27 dieses Artikels) hingewiesen wurde, dass nämlich die vollständige Bestimmung der lokalen Beanspruchungen nur gelingt, wenn man die betrachteten Körper als elastisch ansieht. Die Lehre vom starren Körper gestattet nur für jeden Querschnitt die Resultante aller Spannungen und ihr resultierendes Moment zu berechnen, was jedoch unter Umständen für praktische Zwecke ausreicht; vgl. das sogenannte *Saint-Venant*sche Prinzip in der Elastizitätslehre (IV 25 *O. Tedone* und *A. Timpe*).

43. Spezielle Probleme aus der Kinetik der Systeme starrer Körper.

In dieser Nummer soll nur über einige spezielle Probleme aus der Kinetik der Systeme starrer Körper berichtet werden, die ein grösseres theoretisches Interesse besitzen; im übrigen möge auf die zahlreichen Beispiele verwiesen werden, die sich in den folgenden Artikeln 7—10 des Bandes IV finden.

Die Konstitution vieler Systeme starrer Körper lässt sich so auffassen, dass man einem gegebenen Systeme, auf das gegebene Kräfte wirken, einen einzelnen starren Körper hinzugefügt hat, meistens von kinetischer Symmetrie in bezug auf eine Figurenaxe, um die er sich dreht; je nach der Art, wie dieser Körper mit dem ursprünglichen Systeme verbunden ist (vgl. die Bemerkungen über Gelenkketten, Nr. 41c dieses Artikels), wird durch ihn die Anzahl der Grade der Freiheit um eine, zwei, drei Einheiten vermehrt. Dies trifft für die Regulatoren, Gyrostaten und Gyroskope zu, die hier behandelt werden sollen.

43a. Regulatoren. Unter dem Regulator einer Kraftmaschine versteht man eine Vorrichtung, die die Drehgeschwindigkeit der

Maschine dadurch in engen Grenzen hält, dass sie jeder einseitigen Änderung des Kraftfeldes (etwa einer Entlastung durch Ausschaltung von Arbeitsmaschinen) eine sie ausgleichende Änderung entgegensetzt (etwa eine Verminderung des Dampfzutritts). Das klassische Beispiel ist der *Watt*sche *Zentrifugalregulator* (Patent vom Jahre 1784); siehe Fig. 28. Die beiden Schwungkugeln bleiben dauernd symmetrisch zu der Axe, sodass der Maschine nur *ein* neuer Freiheitsgrad zugeführt wird. Der Ausschlagswinkel φ hängt wesentlich von der Drehgeschwindigkeit des Regulators um die Symmetrieaxe ab; bei einer Änderung von φ wird die Muffe oder Hülse gehoben oder gesenkt, und diese wirkt mittels eines Stellzeuges auf den Dampfzutritt, die Steuerung oder dergleichen. In etwas anderer Weise wird der *Watt*sche Regulator bei den Triebwerken verwendet, die dazu dienen, Pendeluhren und Chronometer in gleichförmigem Gang zu erhalten oder astronomische Fernrohre auf längere Zeit parallaktisch einzustellen; vgl. VI 2 4, Nr. 12 (*C. E. Caspary*).

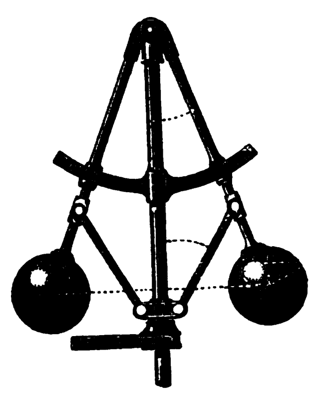


Fig. 28.

Über die genauere Behandlung des Problems der Regulatoren, die von den *Lagrange*schen Gleichungen ausgeht und vor allem eine eingehende Analyse des Kraftfeldes erfordert, wird in IV 10 (*K. Heun*) berichtet werden; hier möge es genügen, die wichtigsten Züge der Erscheinungen anzudeuten[624]).

Jedem dauernden Belastungszustande der Maschine entspricht eine bestimmte Stellung φ der Regulaturhülse, bei der gerade diejenige Triebkraft zugeführt wird, die zur Überwindung der Belastung erforderlich ist. Die *statische Behandlung* des Problems besteht nun darin, dass der Zusammenhang zwischen φ und der Drehgeschwindigkeit ω ermittelt wird, indem man die Sätze über das Gleichgewicht unter Berücksichtigung der Zentrifugalkraft auf das System der Schwungkugeln anwendet. Diese Untersuchung führt zu einem Kriterium über die Brauchbarkeit des Regulators: es soll ω mit φ wachsen (*statischer Regulator*) oder höchstens konstant sein (*astatischer Regulator*)[625]).

Die *kinetische Behandlung* des Problems zeigt, dass die soeben

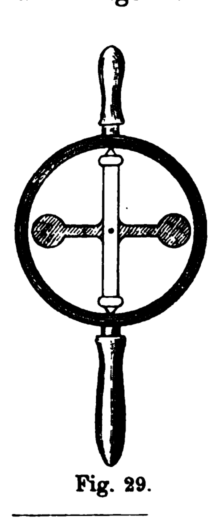
624) Man vgl. auch *K. Heun*, Kinetische Probleme, Abschnitt F; *H. Lorenz*, Mechanik, p. 526; *A. Föppl*, Dynamik, § 34.

625) Vgl. die historisch-litterarischen Angaben bei *W. Hort*, Zeitschr. Math. Phys. 50 (1904), p. 234, die auch für das Folgende in Betracht kommen.

angegebene Bedingung weder notwendig noch hinreichend ist, was aus der Praxis schon lange bekannt war. Den Grundgedanken dieser Behandlungsart, nämlich *die Stabilität der Bewegung mittels der Methode der kleinen Schwingungen zu prüfen*, hat zuerst *G. B. Airy* (1840) auf den *Watt*schen Regulator[626]) und später *J. Clerk Maxwell* (1868) auf andere Klassen von Reglern angewendet[627]). Bezeichnet man die Winkelgeschwindigkeit um die Drehaxe mit $\omega_0 + \dot{\eta}$, den Ausschlagswinkel mit $\varphi_0 + \varepsilon$, so erhält man bei den Vernachlässigungen, die in der Methode der kleinen Schwingungen üblich sind, aus den *Lagrange*schen Gleichungen für η und ε lineare Differentialgleichungen:

$$\ddot{\varepsilon} + a\dot{\varepsilon} + b\varepsilon + c\eta = 0, \quad \dot{\eta} + a_1\dot{\varepsilon} + b_1\varepsilon + c_1\eta = 0;$$

die Koeffizienten sind Konstanten, die von der Massenverteilung und dem Kraftfelde abhängen. Die Bedingungen der Stabilität ergeben sich aus der Forderung, dass die charakteristische Gleichung der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung, die sich für ε durch Elimination von η ergiebt, keine Wurzeln mit positivem reellen Teil besitzt; man wird so auf eine Frage der Algebra geführt, die bereits *E. J. Routh*[628]) untersucht hatte und die *A. Hurwitz*[629]) für algebraische Gleichungen beliebigen Grades erledigt hat.


Fig. 29.

43b. Kreisel mit einem Freiheitsgrade; Gyrostaten. Um eine Einsicht in die Erscheinungen zu gewinnen, die bei den sogenannten *Gyrostaten* auftreten, beginnt man am besten mit Versuchen an einem sogenannten *Handkreisel mit einem Grade der Freiheit.* Dieser besteht aus einem Schwungrade, das reibungslos in einem äusseren Ringe gelagert ist; an dem Ringe befindet sich oben und unten je eine Handhabe, die man mit den beiden Händen anfassen möge. Dreht man die Handhaben in der Ebene des äusseren Ringes, so hat man beiderseits einen Druck (*Deviationsdruck*) auszuhalten. Diese Drucke entsprechen einem Kräftepaare, dessen Axe senkrecht gegen die beiden Handhaben ist und in

626) London Astr. Soc. 11 (1840); 20 (1851); vgl. auch *E. J. Routh*, Dynamik 2, p. 81.

627) London Royal Soc. Proc. 1868 = Scientif. papers 2, p. 105. Unabhängig von *Maxwell* ist später *J. Wischnegradski*, Paris C. R. 83 (1876), p. 318; Zivilingenieur (2) 23 (1877), p. 95 zu derselben Differentialgleichung gelangt.

628) Stability of motion, Cambridge 1878; siehe auch Dynamik, 2, p. 224.

629) Math. Ann. 46 (1895), p. 273.

der Ebene des äusseren Ringes liegt. Das Moment dieses Paares ist der Grösse nach $C\mu\nu$, wenn ν die Winkelgeschwindigkeit bedeutet, mit der die Handhaben gedreht werden und μ die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das Schwungrad um seine Axe dreht. Was den Sinn der Drehung anlangt, die das Kräftepaar hervorzurufen strebt, so bestimmt er sich aus der Regel von der Tendenz zum gleichsinnigen Parallelismus der Drehaxen, vgl. Nr. 35 b 3), p. 635 dieses Artikels.

Will man allgemeiner dem Handkreisel eine reguläre Präzessionsbewegung aufzwingen, bei der die Präzessionsgeschwindigkeit ν ist und die Axe der Präzession den Winkel ϑ_0 mit der Axe des Schwungrades bildet, so wird das Moment der *Deviationsdrucke* der Grösse nach gleich

$$[C\mu\nu + (C - A)\nu^2 \cos\vartheta_0] \sin\vartheta_0,$$

und seine Axe fällt in die Knotenlinie; dabei bedeutet μ wieder die Winkelgeschwindigkeit, mit der das Schwungrad sich um seine Axe dreht. Der Kreisel scheint also immer senkrecht gegen die Bewegungsrichtung ausweichen zu wollen, was *J. Perry* mit dem Verhalten eines störrischen Schweines vergleicht, das an einem Stricke gezogen wird[630]).

Will man aber dem Handkreisel eine beliebig vorgeschriebene Kreiselung aufzwingen, so setzt sich die Dyname, welche die beiden führenden Hände auszuhalten haben, aus drei Komponenten zusammen, nämlich Deviationsdrucken senkrecht zur instantanen Drehaxe und dem *Accelerationsdruck* in der Richtung dieser Axe.

Beim *Kugelkreisel* ist der aus der Umlagerung des Drehvektors $\mathfrak{w}$ entspringende Deviationsdruck gleich $A\mu\nu \sin\vartheta_0$ und der aus der Änderung der Grösse von $\mathfrak{w}$ entspringende Accelerationsdruck gleich $A\dot{\mathfrak{w}}$, mithin herrscht bei ihm in dieser Beziehung vollständige Analogie mit dem *materiellen Punkte* der Masse m. Will man nämlich diesem Punkte eine Bewegung auf vorgeschriebener Bahn mit vorgeschriebener Geschwindigkeit aufzwingen, so entsteht ein *Trägheitsdruck*, dessen *Komponente nach der Tangente* der Bahn, die aus der Änderung der Grösse des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$ entspringt, gleich $m\dot{v}$ ist, während die aus der Änderung der Richtung von $\mathfrak{v}$ entspringende Komponente, die *Zentrifugalkraft* mv^2/R, senkrecht zur Tangente in der Richtung des Krümmungshalbmessers R wirkt. Die Ähnlichkeit geht sogar noch weiter, da zur Überwindung der Deviationsdrucke und der Zentrifugalkraft keine *Arbeit* erforderlich ist[631]).

630) Drehkreisel, Leipzig 1904, p. 28.

631) Vgl. etwa *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, Kapitel III, § 8.

Um den überraschenden Eindruck, den die vorher beschriebenen Erscheinungen beim Handkreisel machen, noch zu verstärken, hat man dessen Handhaben in der Höhlung eines starren Körpers befestigt, die nur mittels einer verschliessbaren Öffnung zugänglich ist; nach *W. Thomson* (*Lord Kelvin*) heisst dieser Apparat ein *Gyrostat*. Trägt man einen solchen Gyrostaten im Zimmer umher, nachdem man das Schwungrad in rasche Drehung versetzt hat, „so ist es", wie sich *H. B. Lübsen* naiv, aber recht ungenau, ausdrückt, „gerade als ob ein in dem Kästchen befindliches lebendes Wesen die Drehung des Kästchens zu hindern suche, kurzum, dass ein Körper durch die Bewegung [des Schwungrades] gleichsam Leben erhält und in diesem Zustande ein ganz anderes Tier ist als im Zustande der Ruhe"[632]).

Im besonderen hat *W. Thomson* das Schwungrad in ein bilateralsymmetrisches Gehäuse eingeschlossen, das ringsherum mit einer Schneide versehen ist; siehe die Figuren 30 und 31. Setzt man diesen Gyrostaten auf eine horizontale Glasplatte, sodass sein Schwerpunkt ungefähr senkrecht über der Schneide steht, und lässt das Schwungrad unaufgezogen, so ist das Gleichgewicht selbstverständlich *instabil* und der Apparat fällt um. Ist aber das Schwungrad in sehr rasche Drehung versetzt worden, so dass in dem Gyrostaten eine *verborgene Bewegung* von hinreichender Intensität stattfindet, so bleibt er stehen; dabei dreht sich die Schneide, falls sie nicht genau senkrecht aufgesetzt wurde, um die durch den Schwerpunkt des Gyrostaten gehende Vertikale langsam herum.

Die analytische Theorie dieser Erscheinung ist die folgende. Wenn sich der Schwerpunkt nur nach links und rechts (Fig. 30) bewegt, hat man ein System von drei Graden der Freiheit[632a]). Die Lagekoordinaten seien die Neigung $90^0 + \vartheta$ der Axe des Schwungrades gegen die Vertikale, der Winkel ψ, den die Tangente an die krumme Schneide im Berührungspunkte mit einer festen Richtung in der Ebene bildet, und der Winkel χ, um den sich das Schwungrad gegen die Anfangslage gedreht hat.

Unter der Voraussetzung, dass der Eigenimpuls des Schwungrades N_2 sehr gross ist und ϑ, $\dot{\vartheta}$ und $\dot{\psi}$ bei der Bewegung sehr klein bleiben, erhält man bei den Vernachlässigungen, die in der Methode der kleinen Schwingungen üblich sind, für die lebendige Kraft, die

632) Mechanik 2, p. 55; vgl. auch *J. Perry*, Drehkreisel, Leipzig 1904, p. 15.

632a) Eigentlich hat man ein System mit *vier* Graden der Freiheit. Jedoch ist der vierte Freiheitsgrad (seitliche Bewegung des Schwerpunktes in Fig. 31) für sich stabil und kommt insofern nicht in Betracht.





Fig. 30.

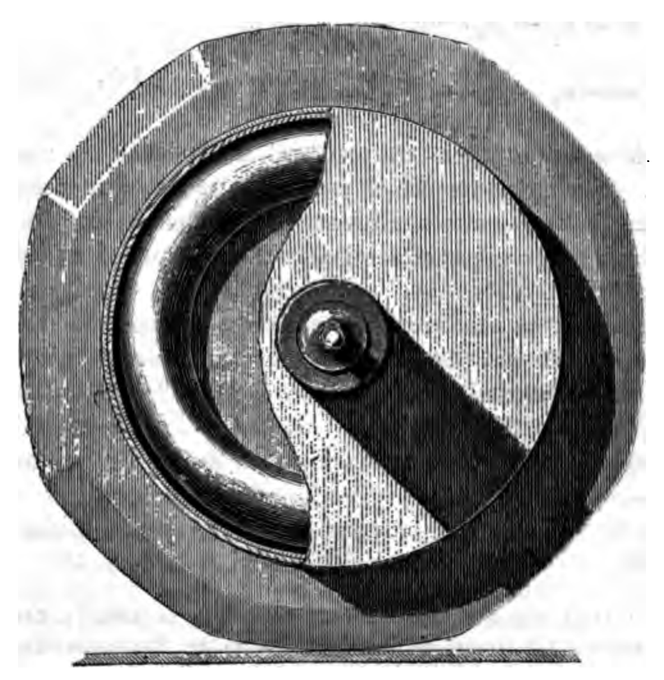


Fig. 31.

dem Gehäuse und dem Schwungrade zusammen zukommt, den Ausdruck:

$$T = \frac{1}{2}(A_1\dot{\vartheta}^2 + A_1\dot{\varphi}^2 + 2C_2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\dot{\chi} + C_2\dot{\chi}^2),$$

während die Kräftefunktion

$$U = \frac{1}{2}P\vartheta^2$$

wird; hierin bedeuten A_1 und C_2 die bezüglichen Trägheitsmomente des Gehäuses und des Schwungrades, und P ist das Moment der Schwere bei der Drehung um die Schneide. Man erhält also als *Lagrange*sche Differentialgleichungen der Bewegung die Gleichungen:

$$(3)\ \frac{d}{dt}(A_1\dot{\vartheta}) - C_2\dot{\psi}\dot{\chi} = P\vartheta,\quad \frac{d}{dt}(A_1\dot{\psi} + C_2\vartheta\dot{\chi}) = 0,\quad \frac{d}{dt}(C_2\dot{\chi}) = 0.$$

Die dritte Gleichung zeigt, dass der Eigenimpuls N_2 des Schwungrades konstant ist, und für ϑ und ψ gelten daher die linearen Differentialgleichungen:

$$(4)\qquad A_1\ddot{\vartheta} - N_2\dot{\psi} = P\vartheta,\qquad A_1\ddot{\psi} + N_2\dot{\vartheta} = 0.$$

Weil bei sehr rascher Drehung $N_2^2 - A_1P_1$ positiv ist, werden diese Gleichungen befriedigt durch die Ausdrücke:

$$(5)\quad \begin{cases} \vartheta = \vartheta_0 + A_1\varepsilon\sin\dfrac{\sqrt{N_2^2 - A_1P}}{A_1}t, \\ \psi = \psi_0 - \vartheta_0\dfrac{P}{N_2}t + \dfrac{N_2}{\sqrt{N_2^2 - A_1P}}A_1\varepsilon\cos\dfrac{\sqrt{N_2^2 - A_1P}}{A_1}t; \end{cases}$$

den Anfangsbedingungen entsprechend sind dabei ϑ_0 und ε kleine Grössen. Die Bewegung der Gyrostaten setzt sich demnach zusammen aus einer sehr langsamen Drehung der Schneide um die Vertikale und kleinen Schwingungen der beiden Koordinaten ϑ und ψ um diese Drehung[633]).

Hierbei ist es eine wesentliche Voraussetzung, dass die horizontale Ebene *glatt* ist. Ist sie *rauh*, so wird durch die Reibung die Koordinate ψ festgehalten; folglich ist die Gleichgewichtslage instabil, und der Gyrostat fällt um.

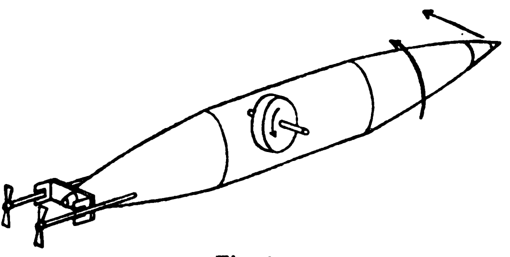
Lord Kelvin bezeichnet den Apparat, dessen Theorie soeben ent-

---

633) *W. Thomson*, Nature 15 (1877), p. 297; Treatise, 2. ed. Cambridge 1886, 1, art. 345x; vgl. auch *C. Neumann*, Leipzig Ber. 21 (1869), p. 182 = Math. Ann. 3 (1870), p. 350; Math. Ann. 11 (1877), p. 395; *R. Hoppe*, Zeitschr. Math. Phys. 17 (1872), p. 167; *D. Bobylew*, Moskau Math. Sammlung 16 (1892), p. 544 (russisch); *A. G. Greenhill*, Art. Gyroscope and gyrostate in der Encyclopaedia Britannica, und endlich die populäre Darstellung von *J. Perry*, Spinning tops, London 1890, deutsch von *A. Walzel*, Drehkreisel, Leipzig 1904.

wickelt wurde, als einen *Gyrostaten mit zwei Graden der Freiheit*, indem er die *verborgene Bewegung* des Schwungrades nicht mitzählt oder, wie er sich auch ausdrückt, *die Lagekoordinate χ ignoriert*. Er hat auch Gyrostaten konstruiert, die, in demselben Sinne des Wortes, drei, vier und mehr Grade der Freiheit besitzen, und gefunden, dass nur bei einer *geraden* Anzahl der Freiheitsgrade eine solche Stabilisierung der Bewegung stattfinden kann, wie sie sich vorher bei zwei Freiheitsgraden ergab; der Grund hierfür liegt darin, dass bei der Veränderung eines Parameters in einer algebraischen Gleichung immer nur eine *gerade* Anzahl von Wurzeln von reellen Werten zu komplexen Werten übergehen kann. Endlich hat *Lord Kelvin* auch Systeme betrachtet, die aus gelenkig verbundenen Gyrostaten zusammengesetzt sind, und zwar im Hinblick auf seine *kinetische Theorie der Materie*, bei der alle potentielle Energie als kinetische Energie verborgener Bewegungen von Gyrostaten aufgefasst wird; vgl. Nr. **26**, p. 551 dieses Artikels, sowie IV 1, Nr. **26** (*A. Voss*).

Eine technische Anwendung des Kreisels mit einem Freiheitsgrad ist das *Howellschen Torpedo*. Es enthält in seinem Innern ein schweres Schwungrad, das 10000 Umdrehungen in der Minute macht; die Axe des Schwungrades liegt horizontal und steht senkrecht auf der Symmetrieaxe des Torpedos. Wenn nun ein störendes Kräftepaar das Torpedo horizontal aus seinem geradlinigen Kurse abzulenken sucht, so dreht sich die Axe des Schwungrades in vertikaler Richtung, das Torpedo dreht sich daher um seine horizontale Längsaxe und jetzt wird, vermöge eines Pendels, eine Steuerung betätigt, die die horizontale Abweichung der Torpedoaxe von der normalen Bahn und damit auch die Drehung der Kreiselaxe wieder aufhebt. Der Kreisel stellt somit die Torpedoaxe wieder in ihre ursprüngliche Richtung, und das Torpedo bewegt sich so automatisch in gerader Bahn[634]).


Fig. 32.

43c. Kreisel mit zwei Freiheitsgraden. Zu ganz anderen Erscheinungen gelangt man bei Versuchen mit einem *Handkreisel mit zwei Graden der Freiheit*, der etwa durch Fig. 33 dargestellt wird.

634) Vgl. etwa *A. G. Webster*, Dynamics, p. 272.

Wenn die Masse des Schwungrades die Masse des inneren Ringes erheblich überwiegt, so ist die natürliche Bewegung dieses Kreisels (bei festgestellter Handhabe) eine reguläre Präzession, bei der sich das Schwungrad mit der gleichförmigen Geschwindigkeit μ um die Axe PQ dreht und der innere Ring mit der gleichförmigen Geschwindigkeit ν um die Axe ST rotiert; dabei findet ein konstanter Druck auf jede der Handhaben statt.

Zu Anfang des Versuches möge keine Drehung des inneren Ringes um die Axe ST stattfinden, dagegen dem Schwungrade eine starke Drehung um die Axe PQ erteilt werden. Wenn man jetzt den Handkreisel in der Ebene des äusseren Ringes um einen kleinen Winkel v dreht und ihn dann plötzlich wieder festhält, so hat der innere Ring begonnen sich mit der kleinen Geschwindigkeit

$$\nu = \frac{C\mu}{A} v$$

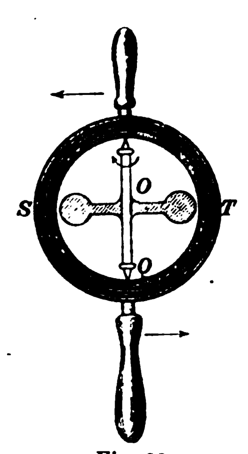


Fig. 33.

in Bewegung zu setzen, während das Schwungrad die Drehung mit der Geschwindigkeit μ beibehält. Auch hier kommt also die *Tendenz zum homologen Parallelismus* zur Geltung; vgl. Nr. 35b 3) dieses Artikels. Dabei entspringt aus dem beiderseitigen Deviationsdruck ein Moment, dessen Grösse gleich $C^2\mu^2 v/A$ ist und das die Drehung v rückgängig zu machen strebt. Lassen wir mit den Händen nach, so kehrt der Handkreisel wieder in seine Anfangslage zurück und bleibt dort stehen; er besitzt mithin eine gewisse Widerstandskraft gegen Richtungsänderungen.

Einen Kreisel mit zwei Freiheitsgraden erhält man auch, wenn man bei der Cardanischen Aufhängung den äusseren beweglichen Ring festhält; dadurch wird der Eulersche Winkel ψ konstant erhalten. Zur Erläuterung der Regel von der Tendenz zum homologen Parallelismus ist folgender, wohl von *Fr. Heinen*[634a]) herrührende Versuch sehr geeignet. Man versetze den Kreisel in rasche Rotation und drehe darauf den äusseren Ring mit der Hand um die Vertikale. Alsdann stellt sich der innere Ring so ein, dass die Axe des Schwungrades ebenfalls vertikal steht und der Sinn der Drehung des Schwungrades mit dem

634a) Über einige Rotationsapparate, besonders den *Fessel*schen, Braunschweig 1857. Der Mechaniker *Fr. Fessel* in Köln hatte nach den Angaben von *J. Plücker* einen Rotationsapparat hergestellt; vgl. Ann. d. Physik 90 (1853) p. 175, 351.

Sinn der Drehung des äusseren Ringes übereinstimmt. Jetzt möge man den Sinn dieser Drehung plötzlich umkehren. Die Folge ist, dass sich die Axe des Schwungrades plötzlich um 180° dreht; denn nur so behalten die beiden Drehungen denselben Sinn. Lässt man also den äusseren Ring im Takte um seinen Durchmesser hin und her gehen, so kann man es so abpassen, dass die Figurenaxe des Kreisels beständig umkippt und zwar immer in demselben Sinne der Drehung.

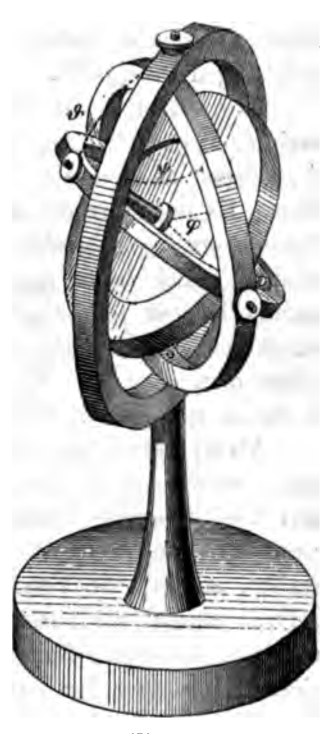


Fig. 34.

Kreisel mit zwei Graden der Freiheit gewinnen in der Technik eine täglich zunehmende Bedeutung. Es genüge hier den *Schiffskreisel* von *O. Schlick* zu erwähnen, der den Zweck hat, das Schlingern (Drehen um die horizontale Längsaxe) der Dampfer zu vermindern. Auf dem Schiffe ist ein Rahmen angebracht, der mittels zweier Zapfen um eine wagerechte, querschiffs liegende Axe schwingen kann, und in dem Rahmen befindet sich ein Schwungrad, das um eine daran befestigte, zu der wagerechten Axe senkrechte Axe durch elektromagnetischen Antrieb in rascher Drehung erhalten wird. Der Schwerpunkt der Vorrichtung liegt unterhalb der wagerechten Axe, so dass die Axe des Schwungrades in dem ruhigen Schiffe senkrecht steht. Schlingert jedoch das Schiff, so sucht sich die Kreiselaxe während jeder Drehung des Schiffs in homologen Parallelismus zu der Drehaxe des Schiffes zu stellen, und der Kreiselrahmen gerät dem entsprechend ebenfalls in Schwingungen. Der Erfolg ist, dass die Periode des Schlingerns bei dem Schiffe mit Kreisel grösser ist, als bei dem Schiffe ohne Kreisel. Damit würde aber an sich wenig erreicht sein, und der Schiffskreisel erlangte eine praktische Bedeutung erst dadurch, dass der Kreiselrahmen mit einem hydraulischen Bremszylinder in Verbindung gebracht wurde, der seine Schwingungen dämpft. Die Energie, die durch die Wellen der Schlingerbewegung zugeführt wird, überträgt sich also zum Teil auf den Kreisel, wird von diesem aber nicht wieder an das Schiff abgegeben, sondern vermöge der Bremse in Wärme verwandelt. Die Schlingerbewegung des Schiffes wird daher bei einmaligem Impulse

in kurzer Zeit vernichtet, bei mehrmaligem Impulse aber erheblich verringert. *A. Föppl* hat die Differentialgleichungen der Bewegung mittels der Methode der kleinen Schwingungen aufgestellt und danach die Dimensionen des Kreisels und die Grösse der vorteilhaftesten Dämpfung für Drehgeschwindigkeiten berechnet, die sich verwirklichen lassen; Versuche haben eine gute Übereinstimmung mit den Berechnungen gezeigt[635]).

43 d. Kreisel als Gyroskope. Unter *Gyroskopen* versteht man nach *L. Foucault*[636]) Apparate, die anzeigen, ob und in welchem Sinne ein Körper, an dem sie befestigt sind, eine Drehung im Raume ausführt. Es ist daher ein Missbrauch, wenn von manchen Autoren der Name *Gyroskop* schlechtweg für den *symmetrischen Kreisel* gebraucht wird. Freilich hatte man früher keine kurze Bezeichnung für einen starren Körper mit kinetischer Symmetrie in bezug auf eine Axe durch den Schwerpunkt, auf der der Unterstützungspunkt liegt; jetzt sollte man aber die Worte *Gyroskop* und *symmetrischen Kreisel* je in ihrem spezifischen Sinne gebrauchen.

Als Gyroskop kann man einen Kreisel in der Form eines Schwungringes verwenden, der um seinen Schwerpunkt frei beweglich ist, also drei Freiheitsgrade besitzt. Wenn man den Schwungring in sehr rasche Drehung versetzt und keine unnötig starken seitlichen Stösse ausübt, so ist, wie bereits in Nr. 34 b, p. 616 dieses Artikels ausgeführt wurde, die Bewegung des Kreisels eine Präzessionsbewegung von sehr kleinem Öffnungswinkel, und da sich diese Bewegung bei kleinen Störungen fast unverändert fortsetzt, so giebt uns der Apparat eine Art von absoluter Orientierung im Raume.

Der Gedanke, solche Gyroskope zum Nachweise der Erddrehung zu benutzen, hat um die Mitte des 19. Jahrhunderts verschiedene Physiker beschäftigt, aber erst *L. Foucault* hat einen ernstlichen Versuch gemacht, ihn zu verwirklichen[637]). Dabei stiess er freilich auf grosse technische Schwierigkeiten, und es ist ihm nicht gelungen, entscheidende quantitative Ergebnisse zu erlangen; die Bedeutung seiner Versuche

---

635) Zeitschr. d. Vereins Deutscher Ingen. 1904; vgl. auch *H. Lorenz*, Phys. Zeitschr. 1904, p. 27.

636) Paris C. R. 35 (1852), p. 421, 424 = Recueil des travaux, p. 401, 406.

637) Paris C. R 35 (1852), p. 421, 424 = Recueil des travaux p. 401, 406. Als Physiker, die gleichzeitig mit *Foucault* den Nachweis der Erddrehung durch einen Kreiselapparat ins Auge fassten, seien genannt *J. C. Poggendorff*, Ann. d. Phys. 83 (1851); *G. Sire*, Paris C. R. 35 (1852), p. 431; *Ch. C. Person*, Paris C. R. 36 (1852), p. 417; *E. Lamarle*, Acad. Belg. Bull. (1) 19 (1852), II. part., p. 31, 274, 436. Für die Geschichte des Gyroskops vgl. *Ph. Gilbert*, Bruxelles Soc. scientif. Ann. 2 B (1878), p. 255; *J. Bertrand*, Revue astron. 5 (1886), p. 441.

liegt daher wohl weniger in einem neuen Nachweise der Erddrehung als darin, dass die allgemeine Aufmerksamkeit auf die Kreiselwirkungen gelenkt wurde.

Erst in neuester Zeit hat man durch Versuche mit Gyroskopen die Umdrehungsdauer der Erde bestimmen können, und zwar wurden dabei Kreisel mit *zwei* Freiheitsgraden benutzt, auf deren Verwendung zu Gyroskopen ebenfalls schon *L. Foucault* aufmerksam gemacht hatte; bei ihnen kommt nach den Ausführungen in dem vorhergehenden Abschnitt dieser Nummer zur Geltung, dass sich die Drehaxe des Kreisels

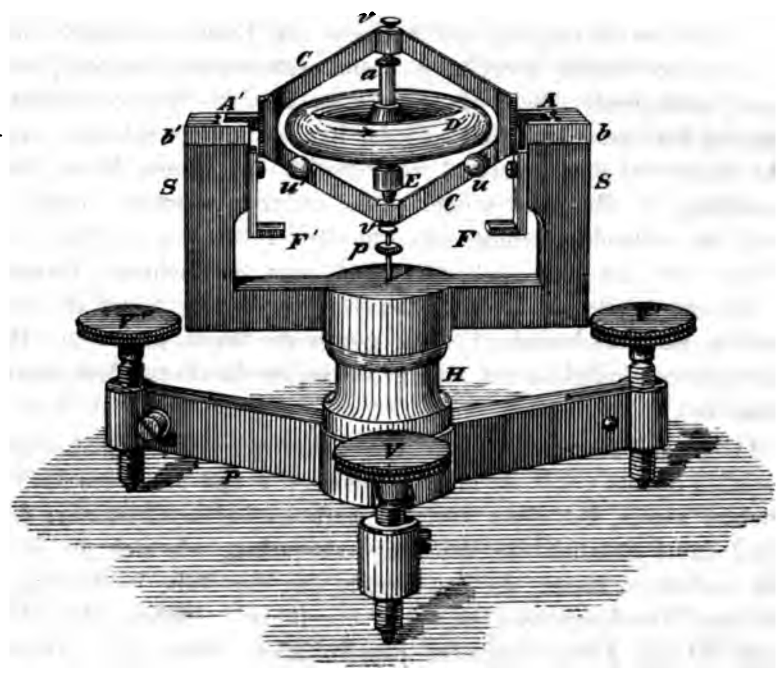


Fig. 35.

zur Drehaxe der Erde, der sogenannten Weltaxe, in homologen Parallelismus zu stellen sucht. Ferner verzichtete man auf die volle Äquilibrierung des Kreisels, die doch nur unvollkommen blieb, liess vielmehr auf die Kreiselaxe ein äusseres Kräftepaar wirken, dessen Moment dem Drehwinkel proportional ist und mass die Grösse des statischen Ausschlags. Zu diesem Zwecke brachte *Ph. Gilbert* bei seinem *Barygyroskop*[638]) ein kleines Übergewicht an, das in der

638) Bull. scienc. math. (2) 6 (1882), p. 213; vgl. auch *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, p. 752 und *P. Appell*, Mécanique 2, p. 359.

Figur 35 mit p bezeichnet ist, während *A. Föppl* einen Elektromotor an drei Stahldrähten aufhing und deren Torsion benutzte[639]). Einen ausführlichen Bericht über die Konstruktion dieser Apparate und die Versuche mit ihnen findet man in dem Artikel IV 7, Nr. **43**—**44** (*Ph. Furtwängler*).

Die einfache Erklärung der Erscheinungen bei den Apparaten mit drei Freiheitsgraden, die darauf beruht, dass der Präzessionskegel sehr eng ist und dass auch die störenden Einflüsse für die Dauer des Versuches daran nichts ändern können, hat wohl zuerst *E. Guyou* gegeben[640]). Die früheren Autoren hatten lange und verwirrende Formeln für die relative Bewegung des Kreisels zur Erde entwickelt; diese sind jedoch vollständig überflüssig. Denn erstens hat es keinen Zweck, in dem vorliegenden Fall die *kinetischen* Formeln für die Relativbewegung heranzuziehen, weil sich der Kreisel nur um seinen Schwerpunkt dreht und dem entsprechend lediglich die *Kinematik* der Relativbewegung in Betracht kommt, die dadurch entsteht, dass der Kreisel im ruhenden Raume eine reguläre Präzession ausführt und wir dies von der sich drehenden Erde aus beobachten. Zweitens aber kommt in Betracht, dass man von vornherein konsequent das Gyroskop als verschwindend klein gegen die Erde und seine Umdrehungsgeschwindigkeit als sehr gross gegen die Erdumdrehung anzusehen hat.

44. Stösse starrer Körper. Die Lehre von dem *Impulse* eines materiellen Systems, wie sie in den Nummern 7 und 28 dieses Artikels betrachtet wurde, hat einen abstrakt mathematischen Charakter; denn es wird dabei gänzlich von der Frage abgesehen, wie sich die Stosskräfte realisieren lassen, die das System aus der Ruhe in den augenblicklichen Geschwindigkeitszustand überführen. Streng davon zu sondern ist die Lehre von dem *physikalischen Stosse*, über die von *H. Lamb* in dem Artikel IV 26, Nr. 8d ausführlich berichtet worden ist; bei den Problemen aus der angewandten Mechanik hat man überdies zu untersuchen, ob das gegebene System solche Stösse ertragen würde, das heisst, in welchen Grenzen es erlaubt ist, von der Starrheit oder von der vollkommenen Elastizität der einzelnen Teile des Systems zu sprechen; vgl. IV 10 (*K. Heun*). Die Lehre von den *Stössen starrer Körper*, über die in dieser Nummer berichtet werden soll, nimmt eine eigenartige Zwischenstellung ein: sie ist zwar im

---

639) München Ber. 34 (1904), p. 5; Phys. Zeitschr. 5 (1904), p. 416.

640) Paris C. R. 106 (1888), p. 1143; vgl. *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, p. 737.

Grunde nichts als eine mathematische Fiktion, aber sie lässt sich doch in gewissem Umfange als erste Annäherung bei wirklichen Stössen verwerten.

Zahlreiche besondere Fälle des Stosses starrer Körper sind schon im 17. und 18. Jahrhundert betrachtet worden[641]), aber erst *S. D. Poisson* hat 1811 die Frage in allgemeinster Weise aufgefasst[642]). Wenn zwei überall konvexe, starre und glatte Körper, die sich beliebig bewegen, in einem Punkte zusammenstossen, so erleiden in diesem Augenblicke, in der neueren Ausdrucksweise, die 6 Koordinaten der Impulsdyname eines jeden der beiden Körper plötzliche Änderungen; diese Änderungen konstituieren je eine Stossdyname, und zwar ist bei dem *reibungslosen Stosse* jede dieser beiden Stossdynamen eine Einzelkraft, die in dem Berührungspunkte angreift und deren Richtungslinie in der zugehörigen gemeinsamen Normale der Oberflächen der beiden Körper liegt. Nach dem Prinzip von der Gleichheit der Aktion und der Reaktion sind diese beiden Einzelkräfte entgegengesetzt gleich. Mithin ergeben sich für die 13 Unbekannten des Problems, nämlich die Koordinaten der beiden Impulsdynamen nach dem Stosse und die Grösse der unbekannten Einzelkraft, 12 lineare Gleichungen. Hieraus folgt, dass die Annahme der Starrheit noch nicht ausreicht, um das Verhalten der beiden Körper nach dem Stosse zu bestimmen. Man hat sich daher genötigt gesehen, weitere Annahmen zu machen.

Zu einer solchen Annahme wurde *I. Newton* geführt, indem er die lebendige Kraft zusammenstossender Kugeln vor und nach dem Stoss betrachtete. Das Verhältnis der gesamten kinetischen Energieen nach und vor dem Stosse wird von ihm als *Restitutionskoeffizient* bezeichnet und als eine für den einzelnen Fall charakteristische Konstante angesehen. Ist dieser Koeffizient k gegeben, so hat man eine dreizehnte Gleichung. Im Allgemeinen ist k ein echter Bruch; die Körper heissen vollkommen elastisch, wenn $k = 1$ wird.

Auf andere Art verfuhr *S. D. Poisson*. Er machte nämlich die Annahme, dass die beiden Körper auch nach dem Stosse in Berührung bleiben, und erhielt so als 13. Gleichung die Bedingung, dass die Geschwindig-

---

641) Vgl. Nr. 18, Anm. 242ᵃ und ausserdem die Monographien von *H. P. J. St. Kroese*, Diss. Leiden 1879; *E. Gelcich*, Zeitschr. Math. Phys., hist.-litt. Abt. 33 (1888), p. 41, 81.

642) Mécanique, 1. éd. 2, Paris 1811, p. 222; ausführlichere Darstellungen des Stosses starrer Körper enthalten die Lehrbücher von *J. V. Poncelet*, Mécanique, 1, p. 451; *E. J. Routh*, Dynamik 1, Kapitel IV; *W. Schell*, Bewegung 2, p. 352—86; *P. Appell*, Mécanique 2, chap. XXVI, p. 476; *T. Levi-Civita*, Meccanica, p. 430.

keit des Berührungspunktes nach dem Stosse in beiden Körpern dieselbe ist. Einen Grenzfall hiervon untersuchte *L. Poinsot*[643]), nämlich den, bei welchem sich der eine der beiden Körper in Ruhe befindet und seine Masse unendlich gross ist. *Poinsots* Problem lässt sich auch so formulieren, ein starrer Körper werde plötzlich in einem seiner Punkte festgehalten, und es soll untersucht werden, um welche durch den festgehaltenen Punkt gehende Axe und mit welcher Winkelgeschwindigkeit er sich dreht. Im besonderen betrachtete *Poinsot* den Fall, dass der Impuls des starren Körpers eine Einzelkraft ist, die entweder in der Ebene durch zwei Hauptaxen des Körpers in bezug auf den Schwerpunkt liegt oder auf einer solchen Ebene senkrecht steht; er ermittelte unter diesen Annahmen die Lagen des festgehaltenen Punktes, bei denen der Körper den grössten Stoss erleidet und die Lagen, bei denen die neue Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die instantane Axe extreme Werte hat.

Schon *Poisson* hatte auch den Reibungsstoss untersucht, der stattfindet, wenn die beiden Körper rauh sind und während des Zusammenstosses auf einander gleiten[644]); später haben *E. Phillips*[645]), *G. Darboux*[646]), *E. J. Routh*[647]) und *A. Mayer*[648]) sich mit diesem schwierigen Gegenstande beschäftigt, der schon mehr in die technische Mechanik gehört; für den Reibungsstoss von Billardkugeln vgl. IV 9, Nr. 1 (*G. T. Walker*).

---

643) J. de math. (2) 2 (1857), p. 281 = Zeitschr. Math. Phys. 3 (1858), p. 274; J. de math. (2) 4 (1859), p. 161, 171, 421; vgl. auch *R. Townsend*, Quart. J. of math. 12 (1873), p 138; *D. Chelini*, Bologna Acc. Mem. (3) 6 (1873), p. 409; (3) 8 (1878), p. 273; *N. Joukowsky*, J. de math. (3) 4 (1878), p. 417; Petersburg, Physiko-chemische Gesellschaft J. 16 (1884), p. 388 (russisch), sowie *A. Gray*, Physik 1, p. 191, wo man noch verschiedene andere lehrreiche Beispiele findet.

644) Bull. de Férussac 6 (1826), p. 163; auf *Poissons* Veranlassung hat auch der General *A. J. Morin* Versuche über den Reibungsstoss angestellt.

645) J. de math. (1) 14 (1849), p. 312.

646) Paris C. R. 78 (1874), p. 1421, 1559, 1645, 1767; Bull. scienc. math. (2) 4 (1880), p. 126; Note XXI in der Mécanique von *M. Despeyrous*: Étude géométrique sur la percussion et le choc des corps.

647) Dynamik 1, p. 343; vergl. auch *K. v. Szily*, Ungarische Berichte 19 (1904), p. 283.

648) Leipzig Ber. 54 (1902), p. 208, 327.

Namenverzeichnis.

Ein Stern (*) vor dem Namen bedeutet, dass der betreffende Autor im Litteraturverzeichnis, p. 437—442 des Artikels, angeführt wird. Die in Antiqua gedruckten Zahlen 435—684 beziehen sich auf die Seiten des Artikels, die cursiv gedruckten Zahlen *1—648* bedeuten die Nummern der Fussnoten.

*) D., nicht C., wie p. 452, Fussnote 14 irrtümlich gesetzt worden ist.
**) Die Angabe: Clairaut A. p. 538 ist falsch, die Abhandlung rührt von Clairaut, dem Vater, her.

*) Statt W. J. M. steht p. 546 irrtümlich J. W. M.

*) Statt T. steht in der Fussnote 300 fälschlich F.

(Abgeschlossen im Dezember 1905.)

Band IV1. **Heft 1.**

ENCYKLOPÄDIE

DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN IM AUFTRAGE
DER AKADEMIEEN DER WISSENSCHAFTEN ZU MÜNCHEN UND WIEN
UND DER GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN,
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK UND ALGEBRA, RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 2 TEILEN . . . . H. BURKHARDT IN ZÜRICH.
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . . . . W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— IV: MECHANIK, IN 2 TEILEN . . . . F. KLEIN IN GÖTTINGEN.
— V: PHYSIK, IN 2 TEILEN . . . . A. SOMMERFELD IN AACHEN.
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK . . . . E. WIECHERT IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE . . . . R. LEHMANN-FILHÉS IN BERLIN.
— VII: HISTORISCHE, PHILOSOPHISCHE UND DIDAKTISCHE FRAGEN BEHANDELND, SOWIE GENERALREGISTER . . . . . . (IN VORBEREITUNG).

BAND IV1. HEFT 1. AUSGEGEBEN AM 13. SEPTEMBER 1901.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.



IV1. Heft 2.

ENCYKLOPÄDIE

DER

:ATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN IM AUFTRAGE
R AKADEMIEEN DER WISSENSCHAFTEN ZU MÜNCHEN UND WIEN
D DER GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN,
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

D I: ARITHMETIK UND ALGEBRA, RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
II: ANALYSIS, IN 2 TEILEN . . . . H. BURKHARDT IN ZÜRICH.
III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . . . . W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
IV: MECHANIK, IN 2 TEILEN . . . . F. KLEIN IN GÖTTINGEN.
V: PHYSIK, IN 2 TEILEN . . . . A. SOMMERFELD IN AACHEN.
VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK . . . . E. WIECHERT IN GÖTTINGEN.
VI, 2: ASTRONOMIE . . . . R. LEHMANN-FILHÉS IN BERLIN.
VII: HISTORISCHE, PHILOSOPHISCHE UND DIDAKTISCHE FRAGEN BEHANDELND, SOWIE GENERALREGISTER . . . . . . (IN VORBEREITUNG).

BAND IV1. HEFT 2. AUSGEGEBEN AM 8. JULI 1902.

MIT 17 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

Bisher erschien: Band I, Heft 1—6; Band II1, Heft 1—4; Band II2, Heft 1; IV1, Heft 1 und IV2, Heft 1.

Unter der Presse befinden sich: Band I, Heft 7 (Schlufs); Band II1, Heft 5

Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Eine dankenswerte Abteilung ist in dem Archiv der Mathematik und Physik von den Herren E. Lampe, W. Franz Meyer und E. Jahnke neu eingerichtet worden, nämlich ein Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Unter dieser Abteilung nimmt die Redaktion des Archivs ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in litterarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an das Redaktionsmitglied Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, zu richten. Beiträge für den Sprechsaal haben bisher beigesteuert die Herren W. Ahrens, A. v. Braunmühl, T. J. I'A. Bromwich, H. Burkhardt, G. Eneström, H. Fehr, M. Krause, A. Loewy, J. Lüroth, W. Fr. Meyer, E. Müller, E. Netto, M. Noether, W. Osgood, L. Saalschütz, Carl Schmidt, A. Schoenflies, W. Wirtinger.

Inhalt des vorliegenden Heftes.

Berichtigungen zu Band IV_2, Heft 1 (Artikel: Hydrodynamik I u. II):

S. 50, Z. 8 v. u. statt „R. S. Heath" lies „T. L. Heath".
S. 75, Z. 28 statt „unten" lies „oben".
S. 96, Z. 23 statt „Quart. of J. math" lies „Quart J. of math".
S. 106, Z. 6 statt „$2Nvw$" lies „$2Nrw$".
S. 124, letzte Zeile des Textes statt „W. Voigt [98])" lies „W. Voigt [91])".


Band IV1.


Heft 3.

ENCYKLOPÄDIE

DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN IM AUFTRAGE
DER AKADEMIEEN DER WISSENSCHAFTEN ZU MÜNCHEN UND WIEN
UND DER GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN,
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK U. ALGEBRA, RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 2 TEILEN . . . . H. BURKHARDT IN ZÜRICH.
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . . . . . . W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— IV: MECHANIK, IN 2 TEILEN . . . . . . F. KLEIN IN GÖTTINGEN.
— V: PHYSIK, IN 2 TEILEN . . . . A. SOMMERFELD IN AACHEN.
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK . . . E. WIECHERT IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE . . . . K. SCHWARZSCHILD IN GÖTTINGEN.
— VII: HISTORISCHE, PHILOSOPHISCHE UND DIDAKTISCHE FRAGEN BEHANDELND, SOWIE GENERALREGISTER . . . . . (IN VORBEREITUNG).

BAND IV1. HEFT 3. AUSGEGEBEN AM 11. SEPTEMBER 1903.

MIT 59 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

Bisher erschien: Band I, Heft 1—7; Band II1, Heft 1—4; Band II2, Heft 1; Bd. III2, Heft 1; Bd. III3, Heft 1—3; Bd. IV1, Heft 1—3; Bd. IV2, Heft 1—2; Bd. V1, Heft 1.

Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung **Sprechsaal** für die **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** nimmt die Redaktion des **Archivs der Mathematik und Physik** (hrsg. von E. Lampe, W. Franz Meyer und E. Jahnke) ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Unterzeichneten zu richten. Beiträge für den **Sprechsaal** haben bisher beigesteuert die Herren W. Ahrens, A. v. Braunmühl, T. J. I'A. Bromwich, H. Burkhardt, G. Eneström, H. Fehr, E. Jahnke, F. Klein, M. Koppe, M. Krause. Josef Kürschák, A. Loewy, Gino Loria, J. Lüroth, W. Fr. Meyer, E. Müller, E. Netto, M. Noether, W. Osgood, L. Saalschütz, Carl Schmidt, A. Schoenflies, W. Wirtinger.

W. Fr. Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.

Inhalt des vorliegenden Heftes.

Unter der Presse:

Band II. Teil 1. Variationsrechnung. Von **A. Kneser** in Berlin.

" V. " 2. Standpunkt der Fernwirkung, die Elementargesetze. Von **R. Reiff** in Stuttgart und **A. Sommerfeld** in Aachen. — Standpunkt der Feldwirkung, Maxwell'sche Theorie. Von **H. A. Lorentz** in Leiden.

Band IV: Mechanik, in 2 Teilen. Redigiert von F. Klein in Göttingen.



